Физико-Математическое Наследие

И. И. Привалов

РЯДЫ ФУРЬЕ

Математика

Математический анализ

URSS

И. И. Привалов

РЯДЫ ФУРЬЕ

URSS

Иван Иванович ПРИВАЛОВ
(1891–1941)

Выдающийся советский математик, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР (1939). В 1913 г. окончил Московский университет. Ученик Д. Ф. Егорова, участник математической школы Н. Н. Лузина (знаменитой «Лузитании»). Профессор Саратовского (с 1918 г.) и Московского (с 1922 г.) университетов. Также преподавал в Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского.

Основные труды И. И. Привалова были посвящены теории функций и интегральным уравнениям. В диссертации «Интеграл Коши» он обобщил единственность так называемой теоремы Лузина—Привалова, доказал свою основную лемму для интегралов типа Коши и свою теорему об особом интеграле. И. И. Привалов положил начало исследованиям по теории однолистных функций в СССР. Ему принадлежат работы по теории тригонометрических рядов, теории субгармонических функций (монография «Субгармонические функции»), а также получившие широкую известность учебники «Введение в теорию функций комплексного переменного» и «Аналитическая геометрия».

10670 ID 126866

9 785397 022323

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине http://URSS.ru

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

URSS НАШИ НОВЫЕ КООРДИНАТЫ

ТЕЛЕФОН / ФАКС (многоканальный) +7 (499) 724-25-45

117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56

Физико-математическое наследие: математика
(математический анализ)

И. И. Привалов

РЯДЫ ФУРЬЕ

Издание четвертое

URSS
МОСКВА

ББК 22.161 22.162 22.1я44

Привалов Иван Иванович

Ряды Фурье. Изд. 4-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 168 с. (Физико-математическое наследие: математика (математический анализ).)

Вниманию читателей предлагается книга выдающегося советского математика, члена-корреспондента АН СССР И. И. Привалова (1891–1941), в которой представлено изложение классической теории тригонометрических рядов Фурье и некоторых ее приложений к отдельным задачам математической физики и теории упругости. Рассматривается проблема суммирования рядов Фурье методом среднеарифметических Фейера, исследуется вопрос о сходимости рядов Фурье, в том числе двойных рядов; описывается интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. В приложении приведен краткий обзор теории почти периодических функций.

Книга рекомендуется широкому кругу математиков — научным работникам, аспирантам, студентам, преподавателям вузов.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 10,5. Зак. № ГН-99.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-02232-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании подвергнуто переработке изложение вопроса о сходимости рядов Фурье, которое проведено без использования интегральной формулы Дирихле и теоремы Фейера. Кроме того расширено введение, и прибавлен § 5 части II, в остальном же текст прежний. Выражаю благодарность моему ученику по Ломоносовскому институту Б. Л. Гуревичу за участие в просмотре корректур.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Задача настоящей небольшой книги — дать изложение классической теории тригонометрических рядов Фурье и некоторых ее приложений к отдельным задачам математической физики и теории упругости. При построении теории рядов Фурье, что составляет главную цель настоящего руководства, в некоторых случаях я отступаю от традиционных, обычно применяемых, способов изложения и доказательств. Так, я рассматриваю проблему суммирования рядов Фурье методом средне-арифметических Фейера ранее исследования их сходимости по двум основаниям: во-первых, вследствие того, что решение задачи суммирования рядов Фурье по методу Фейера проще проблемы сходимости таких рядов; во-вторых, на том основании, что прекрасная теорема Фейера позволяет сделать вывод, упрощающий рассмотрение задачи сходимости. При исследовании сходимости рядов Фурье в первую очередь я даю элементарное изложение этого вопроса, не пользуясь интегральной формулой Дирихле, а основываясь на идее, лежащей в основе метода улучшения сходимости, подробно развитого в дальнейшем, ввиду большого значения этого метода для приложений. Доказательство теоремы Дирихле проводится мной, в отличие от общепринятого способа, без пользования второй теоремой о среднем значении, что значительно упрощает для читателя понимание этого вывода. Наконец вследствие большого значения, которое имеют кратные ряды Фурье в приложениях, я посвящаю несколько страниц краткому изложению вопроса о сходимости двойных рядов Фурье, в теории которых за последние годы сделаны значительные успехи. Конец книги я отвожу для приложений теории рядов Фурье к некоторым конкретным задачам математической физики и теории упругости; в виде добавления к настоящему руководству я даю краткий обзор теории почти периодических функций, созданной за последние годы.

Проф. *И. Привалов.*

ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях математического анализа, как например при исследовании явлений колебания, мы встречаемся с периодическими функциями, т. е. такими функциями, значения которых повторяются через определенный промежуток независимого переменного, называемый периодом этой функции. Периодическая функция с периодом $2l$ характеризуется равенством $f(x+2l)=f(x)$, справедливым для всех значений независимого переменного. Для изображения периодических функций весьма удобно независимое переменное x представлять посредством точки окружности. Так, если функция $f(x)$ имеет период 2π, то представим x как центральный угол круга радиуса 1, отсчитываемый от произвольно выбранного начального радиуса; тогда периодичность функции $f(x)$ выражается в том, что всем точкам окружности однозначно соответствуют определенные значения функции.

Очевидно, чтобы знать периодическую функцию с периодом $2l$, нам достаточно рассматривать ее течение на любом промежутке длины $2l$, например в области $-l<x\leqslant l$. Обратно, если нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная в промежутке $-l<x\leqslant l$, то мы можем ее всегда продолжить как периодическую функцию, назначая вне этого промежутка значения функции посредством равенств $f(x+2nl)=f(x)$, где n обозначает произвольное целое положительное или отрицательное число. Эта операция продолжения приводит, вообще говоря, к функции прерывной в точках вида $(2n+1)l$.

Среди точек прерывности, которые может представлять функция $f(x)$ одного переменного, следует особо различать простейший случай прерывности, часто встречающийся в дальнейшем: x_0 называется **точкой прерывности первого рода** для функции $f(x)$, если, при возрастании переменного x к x_0, $f(x)$ стремится к конечному пределу, который обозначим, следуя Дирихле, через $f(x_0-0)$, и если, при убывании x к x_0, $f(x)$ также стремится к конечному пределу, обозначаемому через $f(x_0+0)$ [1]. Если $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, то функцию $f(x)$ можно считать непрерывной в точке x_0, принимая $f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0-0)$, что мы и будем всегда предполагать в дальнейшем.

[1] Ради краткости пишут $f(+0)$ и $f(-0)$ вместо $f(0+0)$ и $f(0-0)$.

В случае же $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ x_0 будет для функции $f(x)$ точкой прерывности первого рода со скачком $D=f(x_0+0)-f(x_0-0)$, причем D очевидно не равно нулю.

Точки прерывности первого рода обладают существенным свойством, заключающимся в следующем.

Если некоторая функция $\varphi(x)$ имеет в x_0 точку прерывности первого рода со скачком $D_\varphi=\varphi(x_0+0)-\varphi(x_0-0)$, то, какова бы ни была функция $f(x)$, для которой x_0 также является точкой прерывности первого рода со скачком D_f, можно всегда найти постоянное K так, что для функции $F(x)=f(x)+K\varphi(x)$ будет $F(x_0+0)=F(x_0-0)$, т. е. что при надлежащем подборе постоянного K функция $F(x)$ станет непрерывной в точке x_0.

Действительно, чтобы удовлетворить требуемому условию:

$$F(x_0+0)=F(x_0-0),$$

или в раскрытом виде:

$$f(x_0+0)+K\varphi(x_0+0)=f(x_0-0)+K\varphi(x_0-0),$$

достаточно принять $K=-\dfrac{D_f}{D_\varphi}$.

Отмеченное свойство не существует для других точек прерывности, которые называются точками прерывности второго рода.

Это свойство позволяет в некоторых случаях, как мы увидим далее, делать заключения относительно любой точки прерывности первого рода на основании предварительного изучения точки первого рода частного вида. Во всех случаях, практически важных, точки прерывности функции $f(x)$ суть первого рода. Возвращаясь теперь к определению периодической функции $f(x)$, мы заметим, что в силу периодичности, очевидно, значения x_1 и x_2, отличающиеся друг от друга на кратное $2l$, играют одну и ту же роль в рассуждениях, так что является почти бесполезным различать такие значения x_1 и x_2. Мы будем в этом случае писать $x_1 \equiv x_2$, заимствуя это обозначение из теории сравнений, и будем называть x_1 конгруэнтным x_2, подразумевая, что сравнение считается по модулю $2l$. Простейшей периодической функцией будет функция вида $a\sin(\omega x+\xi)$, где $a>0$ и ω, ξ суть постоянные. Эту функцию называют **гармоникой** с периодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$; число ω называется ее частотой, так как, если $\dfrac{1}{T}$ есть число колебаний в единицу, то ω равно числу колебаний в промежутке 2π. Число a называется амплитудой гармоники; оно дает максимальное значение, которое принимает функция $a\sin(\omega x+\xi)$. Наконец число $\omega x+\xi$ называют фазой, а ξ — начальной фазой.

Мы получим график функции $y=a\sin(\omega x+\xi)$ из графика обыкновенной синусоиды, если изменим масштабы по направлениям осей координат в отношениях $1:\omega$ и $a:1$, а затем переместим полученную кривую вдоль оси абсцисс на расстояние $-\dfrac{\xi}{\omega}$ (черт. 1).

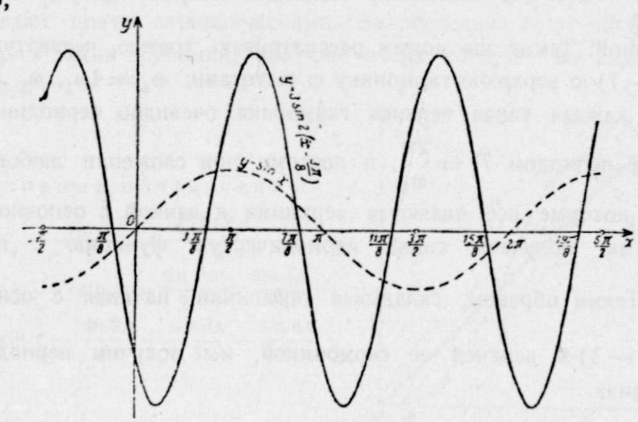
На основании формул сложения тригонометрических функций возможно нашу гармонику представить в виде:

$$A\cos\omega x+B\sin\omega x,$$

где $A=a\sin\xi$, $B=a\cos\xi$. Обратно, каждая функция вида $A\cos\omega x+B\sin\omega x$ представляет гармонику $a\sin(\omega x+\xi)$ с амплитудой $a=\sqrt{A^2+B^2}$ и начальной фазой ξ, определяемой из уравнений

$$\sin\xi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\xi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отсюда мы можем заключить, что сумма гармоник с одной и той же частотой ω изображает функцию того же вида, т. е. гармонику с частотой ω.



Черт. 1.

Если мы будем рассматривать x как время, а y как координату движущейся точки, то гармоника $y=a\sin(\omega x+\xi)$ выражает закон гармонического колебательного движения. Хотя такого рода движения весьма часто встречаются в приложениях, однако большинство периодических движений имеют более сложный характер, представляя собою **наложение** простых гармонических колебаний. С математической точки зрения это обозначает следующее: движение, например расстояние точки от ее положения равновесия, задается функцией времени, которая является суммой некоторого числа гармоник. Геометрически волны отдельных гармоник тогда прикладываются одна за другой, или, как принято говорить, они налагаются. Естественно при этом принимать периоды составляющих гармоник различными, так как сложение двух гармоник с одной и той же частотой дает снова гармонику с той же частотой, только с измененными амплитудой и фазой.

При сложении двух гармоник с частотами ω_1, ω_2 имеется существенное различие, смотря по тому, будут ли их частоты соизмеримы или нет. Рассматривая первый случай, примем сперва как простейший пример для второй частоты значение $\omega_2 = 2\omega_1$. Тогда вторая гармоника имеет вдвое меньший период, так как $T_2 = \frac{2\pi}{2\omega_1} = \frac{T_1}{2}$, и, само собой разумеется, она допускает не только период T_2, но также и двойной период T_1, потому что течение функции очевидно повторяется после изменения ее аргумента на двойной период. Эту гармонику с двойным числом колебаний и половинным периодом называют первой верхней гармоникой к первоначальной.

Аналогично гармоника с частотой $\omega_3 = 3\omega_1$ будет повторяться с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1} = T_1$. Эту гармонику называют второй верхней по отношению к данной. Также мы можем рассматривать третью, четвертую и наконец $(n-1)$-ю верхнюю гармонику с частотами: $\omega_4 = 4\omega_1$, $\omega_5 = 5\omega_1, \ldots$, $\omega_n = n\omega_1$; каждая такая верхняя гармоника очевидно периодически повторяется с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, и поэтому при сложении любого числа гармоник, которые все являются верхними к данной с основной частотой ω_1, мы получаем снова периодическую функцию с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Таким образом, складывая гармоники, начиная с основной и кончая $(n-1)$-й верхней ее гармоникой, мы получим периодическую функцию вида:

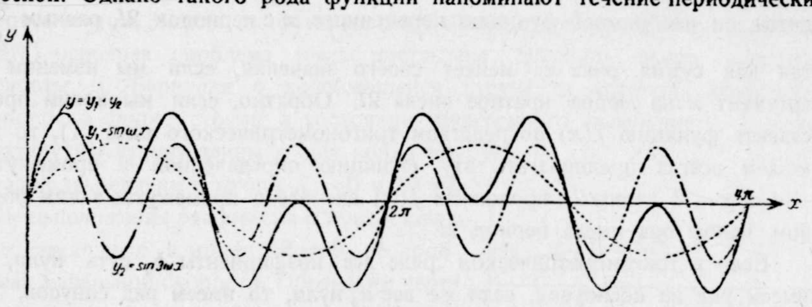
$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$

причем прибавленное постоянное a_0 очевидно не изменяет периодичности.

Свободно располагая $2n+1$ постоянными, содержащимися в этой формуле, мы получаем возможность образовать весьма сложные кривые с уравнениями $y = s_n(x)$, течение которых совсем не напоминает плавной и симметричной формы обыкновенной синусоиды. В сказанном можно наглядно убедиться, рассматривая черт. 2 и 3.

В общем случае при сложении гармоник, у которых частоты находятся в рациональных отношениях, периоды представляются как целые

кратные общего основного периода. Поэтому и в этом случае мы получаем в результате периодическую функцию с основным периодом. Совсем иначе обстоит дело при сложении двух гармоник с несоизмеримыми частотами ω_1 и ω_2. Получающаяся в сумме функция не будет периодической. Однако такого рода функции напоминают течение периодических



Черт. 2.

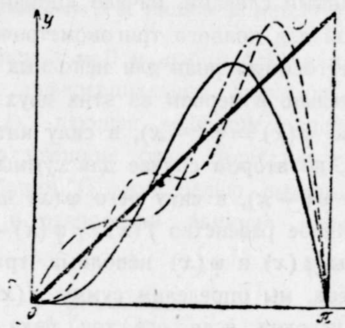
функций, т. е. они „приблизительно" периодически повторяются, и потому их называют почти периодическими. За последние годы построена полная теория таких функций, краткий очерк которой мы дадим в конце этой книги.

Условные обозначения:

—— $\sin x - \frac{\sin 2x}{2}$

— — — $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$

- - - $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4}$



Черт. 3.

Заставляя в выражении

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

число гармоник n неограниченно расти, мы приходим к бесконечному ряду вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) + \ldots, \qquad (1)$$

где a_k, b_k и ω суть постоянные числа.

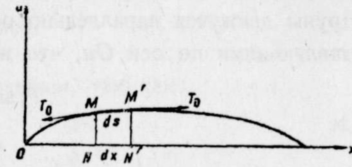
Свободный член берут с множителем $\frac{1}{2}$ для того, чтобы приводимое далее выражение для коэфициентов было вполне общим. Такой ряд называют тригонометрическим. Когда тригонометрический ряд (1) сходится, он изображает функцию переменного x с периодом $2l$, равным $\frac{2\pi}{\omega}$, так как сумма ряда не меняет своего значения, если мы изменим ее аргумент x на любое кратное числа $2l$. Обратно, если мы хотим представить функцию $f(x)$ посредством тригонометрического ряда (1), то мы можем всегда предполагать эту функцию определенной в промежутке $-l < x \leqslant l$ длины $2l$, продолжая $f(x)$ вне этого промежутка таким образом, чтобы она имела период $2l$.

Если в тригонометрическом ряде все коэфициенты b_k суть нули, то имеем ряд из косинусов, если же все a_k нули, то имеем ряд синусов. Такие неполные тригонометрические ряды рассматривались в самом начале развития их теории, но они представляют неудобства в том отношении, что изменяют форму при преобразовании x в $x+c$, между тем как полные тригонометрические ряды сохраняют свою форму при такой замене переменного.

Иными словами, начало координат $x=0$ не является замечательной точкой для полного тригонометрического ряда, в то время как эта точка играет особую роль для неполных рядов косинусов или синусов. Действительно в первом из этих двух случаев имеем для суммы $\varphi(x)$ тождество $\varphi(x)=\varphi(-x)$, в силу которого $\varphi(x)$ называется четной функцией; во втором случае для суммы $\psi(x)$ ряда синусов имеем: $\psi(x)=-\psi(-x)$, в силу чего $\psi(x)$ называется нечетной функцией. Заметив очевидное равенство $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, мы заключаем, что, вычислив суммы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неполных тригонометрических рядов косинусов и синусов, мы определим сумму $f(x)$ полного тригонометрического ряда, при условии, если все три ряда сходятся. В силу этих соображений можно, как это делает Фурье, заниматься определением коэфициентов неполных тригонометрических рядов косинусов и синусов, служащих для представления функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при изменении x от 0 до l, и уже отсюда вывести формулы, относящиеся к представлению функции $f(x)$ в промежутке $(-l, l)$ посредством полного ряда, или же принять обратный метод, рассматривая неполные ряды как частные случаи полного ряда. Мы в дальнейшем пойдем по этому второму пути.

Теория изображения функций действительного переменного посредством тригонометрических рядов имеет исключительно важное значение как в силу того факта, что такой способ представления функций постоянно употребляется в различных ветвях математической физики и почти

во всех дисциплинах чистой математики вплоть до теории чисел, так и благодаря тому, что эта теория оказала чрезвычайно сильное влияние на развитие современного математического анализа. Еще Эйлер пришел к рассмотрению тригонометрических рядов частного вида, занимаясь некоторыми вопросами астрономии. Ему же принадлежит постановка вопроса о том, всякая ли функция изобразима тригонометрическим рядом. Эта основная проблема была поставлена Эйлером после появления работы Д. Бернулли о колеблющейся струне, в которой исследуется вопрос о форме струны в состоянии поперечного колебания [1]. Выведем натянутую струну длины l, два конца которой закреплены в точках $x=0$ и $x=l$, из ее положения равновесия и предоставим ее самой себе в момент $t=0$, не сообщая начальной скорости. Обозначим через u ординату точки струны, в момент t находящейся на расстоянии x от постоянного начала в положении равновесия. При такой постановке задачи u является функцией двух независимых переменных x и t, удовлетворяющей двум начальным условиям: 1) $u=f(x)$ при $t=0$, каково бы ни было x, заключенное между 0 и l, 2) $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ при $t=0$ и любом x между 0 и l, и двум граничным условиям: 1) $u=0$ при $x=0$ и любом t, 2) $u=0$ при $x=l$ и любом t. Выведем теперь диференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x,t)$, дающая величину поперечного колебания струны, предполагая, что внешние силы отсутствуют, т. е. рассматривая случай свободных колебаний. С этой целью выделим элемент струны $ds=MM'$, который в равновесии занимал положение $NN'=dx$ (черт. 4).



Черт. 4.

Имеем:

$$ds=\sqrt{dx^2+du^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}=dx,$$

пренебрегая квадратом малой величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ [2]. Скорость точки M есть очевидно $\frac{\partial u}{\partial t}$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, так как движение точки M совершается перпендикулярно Ox; масса же элемента MM' будет $\rho\, dx$, где ρ обозна-

[1] Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться и работает только на растяжение.

[2] Мы рассматриваем малые колебания, а потому u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ считаются малыми величинами.

чает линейную плотность струны. Приравняв произведение массы элемента струны на его ускорение, т. е. $\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, силе, действующей на этот элемент, мы получим искомое уравнение движения. Остается следовательно подсчитать величину силы, действующей на выделенный элемент. На элемент MM' действуют силы: натяжение T_0 в точке M', направленное по касательной в точке M', и натяжение T_0 в точке M, направленное по касательной в точке M в обратную сторону. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания струны, предполагая, что точки струны движутся параллельно оси Ou, то мы должны ограничиться составляющими по оси Ou, что нам даст:

$$T_0 \sin\alpha' - T_0 \sin\alpha,$$

где

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Замечая, что

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

мы имеем:

$$\sin\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M, \quad \sin\alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}.$$

Следовательно составляющая по оси Ou сил, действующих на выделенный элемент, будет:

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M\right] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx,$$

так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx.$$

Итак уравнение движения будет:

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx,$$

или, сокращая на dx и обозначая $\frac{T_0}{\rho}$ через a^2, перепишем его в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде: $u = X \cdot T$, где X есть функция одного x, а T зависит только от t. Подставляя $u = X \cdot T$ в наше уравнение, получим:

$$XT'' = a^2 X'' T,$$

или

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}.$$

Так как левая часть зависит только от t, а правая только от x, то вследствие независимости x и t между собой, должно быть:

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = \text{const}.$$

Это постоянное будем считать отрицательным, так как

$$\text{const} = a^2 \frac{X''}{X} = a^2 \frac{X''T}{XT} = a^2 \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u},$$

вторая же производная $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеет знак, противоположный знаку u [1] (черт. 4). Итак можем положить:

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} = -a^2 n^2.$$

Из уравнения $X'' = -n^2 X$ находим:

$$X = A\cos nx + B\sin nx.$$

В силу граничных условий должно быть:

$$X = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l,$$

что дает:

$$A = 0, \ \sin nl = 0,$$

откуда

$$nl = k\pi, \text{ или } n = \frac{\pi}{l} k,$$

где k — любое целое число.

Таким образом имеем:

$$X = B \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

Точно так же из уравнения $T'' = -a^2 n^2 T$ найдем:

$$T = A_1 \cos ant + B_1 \sin ant.$$

В силу второго начального условия должны потребовать, чтобы

$$T' = -A_1 na \sin ant + B_1 na \cos ant$$

[1] При этом мы принимаем, что, когда $u > 0$, кривая $u = u\,(x,\, t)$ обращена выпуклостью кверху, когда же $u < 0$, то — вогнутостью кверху.

обращалось в нуль при $t=0$, что будет при $B_1=0$. Итак имеем:

$$T=A_1 \cos ant = A_1 \cos \frac{a\pi k}{l} t.$$

Следовательно

$$u=XT=C \sin \frac{\pi kx}{l} \cos \frac{a\pi kt}{l},$$

где $C=A_1B$, будет решением нашего уравнения, причем это решение удовлетворяет обоим граничным условиям и второму из начальных условий. Так как в наших рассуждениях k означает любое целое число, то мы получим бесконечную последовательность частных решений нашего диференциального уравнения, давая k значения $1, 2, 3, \ldots$ (при $k=-1, -2, -3, \ldots$ получим те же решения вследствие произвольности постоянного множителя C; при $k=0$ получим тривиальное решение $u\equiv 0$). Следовательно мы нашли последовательность частных решений рассматриваемого диференциального уравнения:

$$u_k = C_k \sin \frac{\pi kx}{l} \cos \frac{a\pi kt}{l} \; (k=1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

каждое из которых удовлетворяет обоим граничным условиям и второму начальному условию задачи. Очевидно

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{a\pi t}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi at}{l} + \ldots, \tag{2}$$

будучи суммой из u_k, будет формально удовлетворять как диференциальному уравнению нашей задачи, так обоим граничным и второму начальному условиям, каковы бы ни были постоянные C_k. Остается подобрать постоянные C_k так, чтобы u удовлетворяло первому начальному условию задачи, т. е. чтобы при $t=0$ функция u обращалась в заданную a priori функцию $f(x)$. Полагая в формуле для u переменное t равным значению 0, получим:

$$f(x)=C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots \tag{3}$$

Таким образом u, определяемое формулой (2), дает решение поставленной задачи о поперечном колебании струны, где постоянные C_k определяются, согласно формуле (3), как коэфициенты разложения данной функции $f(x)$ в ряд синусов дуг, кратных $\frac{\pi x}{l}$, на промежутке $(0, l)$. Д. Бернулли рассматривает свою формулу (2) как самое общее решение задачи. Для того чтобы это было так, нужно, чтобы функция $f(x)$ могла быть представлена в виде ряда синусов (3) для всякого x, изменяющегося от 0 до l.

В эпоху Эйлера различали два рода кривых: с одной стороны, геометрические кривые, у которых x и y связаны аналитическим соотношением, с другой стороны, произвольные кривые, которые возможно изобразить графически по нашему желанию. Эйлер и его современники полагали, что второй класс кривых более широкий, чем первый. Отсюда понятно, что, для того чтобы утверждение Бернулли, который рассматривал свою формулу как общее решение задачи поперечно колеблющейся струны, было обосновано, нужно было доказать, что произвольная кривая, представляющая начальное положение струны, могла быть определена аналитически с помощью тригонометрического ряда, т. е. в сущности доказать совпадение произвольной кривой с геометрической кривой. Простейший случай, который можно рассмотреть, заключается в том, что за начальное положение струны принимают ломаную линию с двумя звеньями. Если принять справедливым утверждение Бернулли, то выходит, что один и тот же тригонометрический ряд может равняться одной линейной функции в одном промежутке и другой линейной функции в другом промежутке. Отсюда следует, что два аналитические выражения, тригонометрический ряд и линейная функция, равны в одном промежутке и неравны в другом. Все это в ту эпоху казалось невозможным. В то время допускали, что два аналитические выражения, равные в одном промежутке, равны повсюду, и отсюда естественно заключали о том, что достаточно задать функцию с аналитическим определением в сколь угодно малом промежутке для того, чтобы она была тем самым и однозначно определена во всей своей области существования. Между прочим из таких воззрений происходит название „непрерывная“ функция, которое Эйлер дал этим аналитически представимым функциям, постоянным, с точки зрения Эйлера, по своим свойствам. Только Коши дал впервые точное определение непрерывной функции, которым мы пользуемся в настоящее время. Эти ложные воззрения на понятие функции, существовавшие у современников Эйлера и задерживавшие эволюцию этого основного понятия математики, удалось разрушить окончательно Дирихле, которым впервые была строго разрешена основная проблема об изображении функции сходящимся тригонометрическим рядом. Дирихле дал весьма общие условия, накладываемые им на класс функций, представимых помощью сходящихся тригонометрических рядов. С этими условиями Дирихле мы познакомимся на страницах настоящего сочинения. До появления работы Дирихле существовали лишь аргументы физического характера, с помощью которых пытались доказать возможность разложения произвольной функции в сходящийся тригонометрический ряд. Например приводилось такого рода рассуждение: функция $f(x)$ с периодом $2l$, $2l=\frac{2\pi}{\omega}$, повсюду непрерывная, может быть рассматриваема как определяющая в момент x положение конца колеблющейся волны. Эта волна производит звук, который можно разложить на простейшие звуки; его гармоники соответствуют движениям, определяемым функциями вида:

$$\rho_n \sin(n\omega x+\xi_n)=a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x.$$

Таким образом $f(x)$ есть сумма таких простейших функций. Очевидно такого рода аргументы не могут заменить математического доказательства. Впрочем, что сразу показывает несостоятельность попыток такого рода, существуют непрерывные функции, неразложимые в сходящиеся тригонометрические ряды.

Итак мы видим, сколь важное принципиальное значение имела проблема о возможности представления произвольной функции тригонометрическим рядом в истории развития самого понятия функции. С другой стороны, к самой постановке этой общей проблемы математики пришли из рассмотрения частных задач математической физики, среди которых задача о колеблющейся струне была лишь первой из многочисленных других физических задач, приводящих к необходимости представления функций тригонометрическими рядами.

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ 1. Приближенное выражение функций тригонометрическими суммами

Во многих вопросах естествознания приходится иметь дело с периодическими функциями, и вследствие этого задача о приближенном изображении таких функций посредством тригонометрических сумм приобретает особо важное значение. Допустим, что единица меры выбрана так, что период данной периодической функции $f(x)$ равен 2π [1]. Задача состоит в том, чтобы функцию $f(x)$ приближенно изобразить посредством суммы косинусов и синусов аргументов, кратных x, вплоть до n-й кратности с подходяще выбранными постоянными коэфициентами; другими словами, нужно заменить функцию $f(x)$ с возможно малой ошибкой выражением такого вида:

$$S_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x+\cdots+\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx. \qquad (1)$$

Нам нужно предварительно условиться в том, каким образом мы будем измерять погрешность, происходящую от замены функции $f(x)$ тригонометрической суммой порядка n, при данном значении n. Для этой цели мы воспользуемся идеей, примыкающей к методу наименьших квадратов. Величина погрешности в точке x, получаемая при замене $f(x)$ тригонометрической суммой (1), равна $f(x)-S_n(x)$; за меру погрешности изображения функции $f(x)$ посредством суммы (1) во всем промежутке $-\pi<x\leqslant\pi$, составляющем один период, примем корень квадратный из средне-арифметического квадратов всех ошибок, т. е. величину I_n, где

$$I_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx.$$

Наилучшее приближение значений функций $f(x)$ доставит следовательно та сумма $S_n(x)$, для которой этот интеграл I_n^2, дающий квадрат так называемой средней квадратичной ошибки, получает наименьшее

[1] Следовательно частота $\omega=1$.

значение; на основании этого требования мы можем определить значения всех $2n+1$ коэфициентов:

$$\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_n.$$

С этой целью преобразуем прежде всего выражение I_n^2:

$$\left.\begin{aligned} I_n^2 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\{[f(x)]^2 - 2f(x)\,S_n(x) + [S_n(x)]^2\}\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[S_n(x)]^2 dx. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя во второй интеграл вместо $S_n(x)$ сумму из формулы (1), получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx = \frac{\alpha_0}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx + \frac{\alpha_1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos x\,dx +$$

$$+\cdots+\frac{\alpha_n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{\beta_1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin x\,dx + \cdots +$$

$$+\frac{\beta_n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu a_\nu + \beta_\nu b_\nu);$$

при этом мы пользуемся обозначениями

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos\nu x\,dx,\quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin\nu x\,dx. \qquad \text{(I)}$$

Интегралы вида (I) называются **к о э ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е** функции $f(x)$. Прежде чем приступить к образованию третьего интеграла, который отличается от второго тем, что функция $f(x)$ заменена функцией $\frac{1}{2}S_n(x)$, отметим ряд вспомогательных формул. Так как

$$\cos lx\cos mx = \begin{cases} \dfrac{\cos(l-m)x + \cos(l+m)x}{2}, & \text{если } l \neq m \\[2mm] \dfrac{1+\cos 2mx}{2}, & \text{если } l = m, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos lx\cos mx\,dx = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если } l \neq m \\ \pi, & \text{если } l = m \end{Bmatrix}. \qquad (3')$$

Заметив, что

$$\sin lx\sin mx = \begin{cases} \dfrac{\cos(l-m)x - \cos(l+m)x}{2}, & \text{если } l \neq m \\[2mm] \dfrac{1-\cos 2mx}{2}, & \text{если } l = m, \end{cases}$$

имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin lx\sin mx\,dx = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если } l \neq m \\ \pi, & \text{если } l = m \end{Bmatrix}. \qquad (3'')$$

Наконец, замечая, что

$$\sin lx\cos mx = \begin{cases} \dfrac{\sin(l+m)x + \sin(l-m)x}{2}, & \text{если } l \neq m \\[2mm] \dfrac{\sin 2mx}{2}, & \text{если } l = m \end{cases}$$

получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin lx\cos mx\,dx = 0. \qquad (3''')$$

Теперь мы можем легко вычислить коэфициенты Фурье от функции $\frac{1}{2}S_n(x)$. Действительно, при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ находим:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)\cos\nu x\,dx = \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos\nu x\,dx + \alpha_1\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos x\cos\nu x\,dx + \cdots$$

$$\cdots + \alpha_n\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\cos\nu x\,dx + \beta_1\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin x\cos\nu x\,dx + \cdots$$

$$\cdots + \beta_n\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sin nx\cos\nu x\,dx.$$

Согласно формулам (3′, 3‴), все члены справа равны нулю, кроме члена, содержащего α_ν, который равен $\alpha_\nu\cdot\pi$.

Таким образом находим:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)\cos\nu x\,dx = \alpha_\nu\cdot\pi\ (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Эта формула справедлива и при $\nu = 0$, благодаря тому, что мы присоединили множитель $\frac{1}{2}$ к коэфициенту α_0. Таким же образом находим далее, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)\sin\nu x\,dx = \beta_\nu\cdot\pi\quad(\nu=1,\,2,\ldots,\,n).$$

Итак коэфициенты Фурье от функции $\frac{1}{2}S_n(x)$ равны

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}S_n(x)\cos\nu x\,dx=\frac{1}{2}\alpha_\nu,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}S_n(x)\sin\nu x\,dx=\frac{1}{2}\beta_\nu.$$

Следовательно для третьего интеграла получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_n(x)\,S_n(x)\,dx=\frac{\alpha_0\cdot\alpha_0}{4}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\alpha_\nu\frac{\alpha_\nu}{2}+\beta_\nu\frac{\beta_\nu}{2}\right)=$$
$$=\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2).$$

Подставим найденные значения второго и третьего интегралов в формулу (2) и произведем простые преобразования:

$$I_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu a_\nu+\beta_\nu b_\nu)+\frac{\alpha_0^2}{4}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2dx+\frac{\alpha_0^2-2\alpha_0 a_0+a_0^2}{4}-$$
$$-\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}[(\alpha_\nu^2-2\alpha_\nu a_\nu+a_\nu^2)+(\beta_\nu^2-2\beta_\nu b_\nu+b_\nu^2)]-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2).$$

Таким образом окончательно получаем:

$$\left.\begin{aligned}I_n^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2dx+\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{4}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}[(\alpha_\nu-a_\nu)^2+(\beta_\nu-b_\nu)^2]-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2).\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Эта формула сразу обнаруживает, что средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции $f(x)$ посредством тригонометрической суммы n-го порядка будет наименьшей, если коэфициенты этой суммы суть коэфициенты Фурье функции $f(x)$. В самом деле, в этом и только в этом случае обращаются в нуль все квадраты разностей, т. е. исчезает в сумме целый ряд положительных слагаемых.

Величину j_n наименьшей погрешности получим, подставляя в формулу (4) вместо α_ν, β_ν соответственно a_ν, b_ν, что дает:

$$j_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2).\qquad(4')$$

Эта наименьшая погрешность j_n соответствует тригонометрической сумме Фурье n-го порядка

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

Весьма важно отметить, что полученные значения коэфициентов Фурье **не зависят от общего числа членов** тригонометрической суммы. Даже более того, если в апроксимирующей тригонометрической сумме значения некоторых коэфициентов заранее фиксированы, то и в этом случае, как показывает формула (4), наименьшая квадратичная погрешность получится очевидно, когда значения остальных коэфициентов будут равны соответствующим коэфициентам Фурье функции $f(x)$, так как при этом обращаются в нуль все находящиеся в нашем распоряжении положительные слагаемые в выражении для I_n^2. Если, например, мы хотим возможно ближе апроксимировать функцию $f(x)$ посредством одного только члена с синусом $\beta_\nu\sin\nu x$ (т. е. значения всех остальных α и β берем равными нулю), то и в таком случае мы получим для β_ν как раз написанное выше значение b_ν. Вследствие этого указанный метод приближения оказывается особенно удобным на практике. Действительно апроксимируя функцию, ход изменений которой похож на ход изменения синуса, помощью одного только члена с $\sin\nu x$, и замечая при этом, что это приближение недостаточно точно, мы можем присоединить в виде слагаемых сколько угодно членов на основании того же принципа наименьшей средне-арифметической суммы квадратов ошибок, не изменяя величины уже найденного первого члена.

Выражение (4) показывает, что при возрастании n, т. е. порядка тригонометрической суммы, погрешность j_n может только уменьшаться т. е. точность приближения увеличивается при возрастании n. В дальнейшем мы увидим, что при неограниченном возрастании n погрешность j_n стремится к нулю, т. е. точность приближения можно сделать сколь угодно большой. Иными словами, мы докажем далее замечательное соотношение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2). \qquad (5)$$

Весьма важно отметить, что сходимость бесконечного ряда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)$$

уже вытекает из установленной здесь формулы (4'), которая показывает, что сумма

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2+b_\nu^2),$$

не убывающая при возрастании n, остается при всяком n меньше постоянного числа

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2 dx,$$

а следовательно стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании n.

Так как общий член сходящегося ряда стремится к нулю, то заключаем: коэфициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

стремятся к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Во всем предыдущем анализе мы считали периодическую функцию $f(x)$ ограниченной и кусочно-непрерывной на области $-\pi < x \leqslant \pi$ [1] (следовательно и в любом конечном интервале).

[1] Мы называем $f(x)$ ограниченной и кусочно-непрерывной функцией в промежутке (a, b), если она удовлетворяет следующим условиям:
1°. $|f(x)| \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$, где M — постоянное число.
2°. $f(x)$ может иметь конечное число точек прерывности на (a, b).

До сих пор мы рассматривали промежуток $-\pi < x \leqslant \pi$, но мы могли бы конечно с таким же успехом взять любой промежуток длины 2π например $(a, a+2\pi)$, так как подъинтегральные функции во всех встречающихся интегралах имеют период 2π. В частности отметим, что в формулах (I) для a_n и b_n можно заменить пределы $-\pi$ и $+\pi$ соответственно через a и $a+2\pi$ (a — произвольное число), не изменяя величины a_n и b_n.

Примечание 1°. Мы видели, что интегралы

$$\int_{a}^{2\pi+a} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a}^{2\pi+a} f(x)\sin nx\,dx$$

стремятся к нулю при неограниченном возрастании n, какова бы ни была функция $f(x)$, ограниченная и кусочно-непрерывная на промежутке $(a, 2\pi+a)$. Это заключение остается в силе, если за промежуток интегрирования принять любой сегмент (a, b), т. е. интегралы

$$\int_{a}^{b} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a}^{b} f(x)\sin nx\,dx$$

стремятся к нулю при неограниченном возрастании n, если $f(x)$ — функция ограниченная и кусочно-непрерывная на (a, b).

Этот случай приводится к доказанному путем введения вспомогательной функции $\varphi(x)$, полагая:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{если } b < x \leqslant a+2\pi. \end{cases}$$

Мы считаем $b \leqslant a+2\pi$, что всегда можно предполагать, так как интегралы, у которых промежуток интегрирования равен 2π по предыдущему, стремятся к нулю с возрастанием n. Тогда, заметив, что

$$\int_{a}^{b} f(x)\cos nx\,dx = \int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx$$

и

$$\int_{a}^{b} f(x)\sin nx\,dx = \int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

убеждаемся в справедливости нашего утверждения, так как интегралы правых частей последних равенств стремятся к нулю при неограниченном возрастании n, так как $\varphi(x)$ есть функция ограниченная и кусочно-непрерывная на $(a, 2\pi+a)$.

Примечание 2°. Из доказанной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

вытекает сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}.$$

Действительно, так как

$$\left(|a_n|-\frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0,$$

то

$$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

и сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

вытекает из сходимости рядов

$$\sum a_n^2 \text{ и } \sum \frac{1}{n^2}.$$

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum \frac{|b_n|}{n}.$$

§ 2. Ряд Фурье

Для всякой функции $f(x)$ периода 2π, ограниченной и кусочно-непрерывной в промежутке $(-\pi, +\pi)$, можно составить последовательность коэфициентов Фурье по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$
$$\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots,$$

в котором коэфициенты a_n и b_n определены по формулам (1), называется рядом Фурье, соответствующим функции $f(x)$.

Если ряд Фурье сходится при каком-либо значении x_0, то он сходится и имеет ту же сумму для всех значений x, $x \equiv x_0$. Сумма ряда Фурье есть следовательно периодическая функция с периодом 2π. Поэтому всякий ряд Фурье достаточно исследовать в каком-нибудь промежутке длины 2π, например в промежутке $-\pi < x \leqslant \pi$.

Основная задача теории рядов Фурье заключается в установлении условий, накладываемых на функцию $f(x)$, при наличии которых эта функция разлагается в ряде Фурье, т. е.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\longrightarrow f(x)$$

при $n\longrightarrow\infty$, или, что то же,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где a_k и b_k определяются по формулам (1).

При помощи ряда Фурье мы осуществляем разложение сложной периодической функции $f(x)$ на составляющие гармоники, периоды которых относятся как

$$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\ldots$$

Очевидно, что тем самым сложный закон периодического явления, характеризуемый функцией $f(x)$, приводится к ряду простых законов гармонического колебания. Эти простые законы действуют самостоятельно и независимо друг от друга, но действия их складываются. Так например рассмотрим вопрос о вынужденных колебаниях упругой системы и предположим, что сила, вызывающая эти колебания, выражается посредством одной гармоники. Тогда легко установить, что при приближении периода этой силы T к периоду τ свободных колебаний рассматриваемой упругой системы амплитуда колебаний резко возрастает, т. е. имеет место явление резонанса. Во многих случаях однако внешняя периодическая сила не может быть представлена в виде одной гармоники и тогда, чтобы разобраться в ее действии, нужно разложить ее на составляющие гармоники, отдельно учесть действия этих составляющих и сложить их действия. Так как периоды этих составляющих гармоник будут T, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T\cdots$, то очевидно резкого повышения амплитуды можно ожидать не только тогда, когда τ близко к T, но и когда τ близко к $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T\cdots$

Итак мы приходим к необходимости разложения периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Основной метод для решения поставленной задачи состоит в следующем. Заменяя в сумме $(n+1)$ первых членов ряда Фурье коэфициенты a_k и b_k по формулам Фурье, представляем эту сумму $s_n(x)$ в виде интеграла:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x) \right] d\alpha,$$

который легко преобразуется к виду:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\cos n(\alpha - x) - \cos(n+1)(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)} d\alpha. \tag{2}$$

В этой цепи преобразований требует доказательства только последнее преобразование суммы

$$s(y) = \frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \ldots + \cos ny.$$

Мы имеем:

$$2s(y) \cos y = \cos y + 2 \cos y \, \cos y + 2 \cos y \, \cos 2y + \ldots$$

$$\ldots + 2 \cos y \cos ny = \cos y + 1 + \cos 2y + \cos y + \cos 3y + \ldots$$

$$\ldots + \cos(n-1)y + \cos(n+1)y = 1 + 2\cos y + 2 \cos 2y + \ldots$$

$$\ldots + 2\cos(n-1)y + \cos ny + \cos(n+1)y,$$

откуда

$$2s(y)(1 - \cos y) = \cos ny - \cos(n+1)y,$$

и следовательно

$$s(y) = \frac{\cos ny - \cos(n+1)y}{2(1 - \cos y)}.$$

Заставляя теперь n стремиться к бесконечности, мы ищем предел выражения (2), каковой и будет представлять сумму ряда Фурье в точке x. К исследованию этой задачи мы вернемся в дальнейшем. Теперь же заметим только, что если $f(x)$ есть произвольная периодическая функция, ограниченная и кусочно-непрерывная на $(-\pi, +\pi)$, то $s_n(x)$ не стремится вообще к определенному пределу при $n \to \infty$, т. е. такая функция не является суммой ряда Фурье. Более того, можно построить пример периодической всюду непрерывной функции $f(x)$, ряд Фурье которой расходится при отдельных значениях x (точки расходимости могут образовывать бесконечное множество точек, заключенное в промежутке $(-\pi, +\pi)$)[1]. Итак даже непрерывная периодическая функция должна удовлетворять дополнительным условиям, для того чтобы она могла быть рассматриваема как сумма своего ряда Фурье.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли произвольную непрерывную функцию изобразить рядом Фурье, вводя понятие обобщенной суммы ряда вместо обыкновенной, т. е. применяя к ряду Фурье тот или иной процесс суммирования, более общий, чем обыкновенная сходимость. На этот вопрос утвердительный ответ дается в дальнейшем.

Примечание. Ряд Фурье.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

можно записать в более сжатой форме, если заметить, что

$$\cos kx + i \sin kx = e^{kxi}, \quad a_k - b_k i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-kxi} dx.$$

Придавая в последней формуле k целые значения как положительные, так и отрицательные, мы замечаем, что при замене k на $-k$ коэфициент a_k останется без изменения, а b_k переменит знак. Таким образом сумма двух выражений вида $(a_k - b_k i)e^{kxi}$ при значениях k, равных по величине, но обратных по знаку, будет:

$$(a_k - b_k i)e^{kxi} + (a_k + b_k i)e^{-kxi} = 2(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Следовательно, полагая

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-kxi} dx \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

можно записать ряд Фурье в следующем виде:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}$$

[1] Вопрос о том, могут ли точки расходимости заполнять весь промежуток $(-\pi, \pi)$, до сих пор не разрешен и представляет одну из сложнейших проблем теории рядов Фурье.

§ 3. Теорема замкнутости

Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывные в промежутке (a, b)[1] называются ортогональными в этом промежутке, если они удовлетворяют условию:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Если дана система непрерывных функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\ldots,\ \varphi_n(x), \tag{1}$$

не равных тождественно нулю и удовлетворяющих условию:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0,\ (m \neq n),$$

то говорят, что система (1) есть ортогональная система в промежутке (a, b).

Так, например, система функций:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{1'}$$

в силу соотношений (3′, 3″, 3‴) § 1 есть ортогональная система в промежутке $(-\pi, +\pi)$.

Таковыми же для промежутка $(0, \pi)$ являются системы:

$$1, \cos x,\ \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \text{ и } \sin x,\ \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$$

Мы скажем, что ортогональная система функций (1) есть замкнутая, если не существует непрерывной функции, кроме тождественного нуля, ортогональной ко всем функциям этой системы, т. е. если всякая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0\ (n = 0,\ 1,\ 2\ldots)$$

есть необходимо тождественный нуль[2].

Покажем теперь, что тригонометрическая система функций (1′) есть замкнутая.

---

[1] Предполагается, что ни одна из этих функций не равна тождественно нулю.

[2] Очевидно замкнутость ортогональной системы есть понятие относительное: мы определяем здесь ортогональную систему, замкнутую относительно семейства всех непрерывных функций.

Действительно, предположив, что функция $f(x)$, непрерывная на $(-\pi, +\pi)$, удовлетворяет условиям:

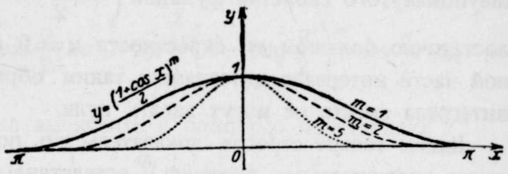
$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0\ (n = 1, 2, \ldots),$$

докажем, что $f(x) \equiv 0$.

С этой целью допуская, что $f(x)$ не повсюду равна нулю, мы придем к противоречию.

Сделаем некоторые предварительные замечания.

Очевидно функция $\left(\cos^2 \dfrac{x}{2}\right)^m = \left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^m$, рассматриваемая на промежутке $(-\pi, +\pi)$, имеет максимум при $x = 0$, равный 1, и функция убывает к конечным точкам промежутка до значения 0. Чем больше m, тем круче будет падение графика функции и тем меньше будет область вблизи $x = 0$, внутри которой функция еще заметно отлична от нуля (черт. 5).



Черт. 5.

Разлагая нашу функцию по формуле бинома и замечая, что каждая степень $\cos x$ выражается посредством линейной комбинации функций $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos mx$, мы представим рассматриваемое выражение

$$\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^m$$

в виде

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_m \cos mx,$$

где $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_m$, суть постоянные.

Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x + x_0)$ и заметим, что она в силу предположений относительно $f(x)$ будет ортогональна к функциям системы (1′). Так, например:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(u)\cos n(u - x_0)\,du = \int_{-\pi} f(u)\cos n(u - x_0)\,du^{1} =$$

$$= \cos nx_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\cos nu\,du + \sin nx_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\sin nu\,du = 0.$$

---

[1] Тут пользуемся периодичностью $f(x)$.

Умножая обе части равенства

$$\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m = a_0 + a_1 \cos u + \cdots + a_m \cos mu \quad \text{на} \quad F(u) \quad \text{и}$$

интегрируя, мы вследствие ортогональности функций $F(u)$ и $\cos ku$ получим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(u)\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m du = 0.$$

Из последнего равенства мы получим противоречие, предполагая, что

$$f(x_0) = F(0) \neq 0.$$

Это противоречие возможно предвидеть, потому что вследствие вышеупомянутого свойства функции $\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m$ влияние в интеграле при достаточно большом m окрестности $u=0$ превосходит влияние остальной части интервала интеграции; таким образом соответствующие части интеграла вместе не могут давать нуля.

Дадим теперь строгое доказательство последнего факта. Пусть $F(0)$ имеет положительное значение[1]; вследствие непрерывности функции $F(u)$ существует промежуток $-q \leqslant u \leqslant q$, в котором $F(u) > \mu$, где μ положительное постоянное число.

Разложим теперь выражение

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(u)\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m du,$$

которое по предположению равно нулю, на два слагаемые

$$I_1 = \int_{-q}^{q} F(u)\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m du \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{-\pi}^{-q} F(u)\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m du + \int_{q}^{\pi} F(u)\left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^m du.$$

Теперь найдем пределы для $|I_2|$ сверху, а для I_1 снизу. Очевидно имеем:

$$|I_2| \leqslant \left|\int_{-\pi}^{-q} F(u)\cos^{2m}\frac{u}{2}\,du\right| + \left|\int_{q}^{\pi} F(u)\cos^{2m}\frac{u}{2}\,du\right| < 2\pi M \cos^{2m}\frac{q}{2}.$$

[1] Если $F(0) < 0$, то, изменив знак у F, придем к рассматриваемому случаю.

Здесь M обозначает верхнюю границу для абсолютной величины функции $F(u)$ в целом промежутке, т. е. $|F(u)| \leqslant M$. Это неравенство становится очевидным, если заметить, что в области интеграции между $-\pi$ и $-q$, а также в области интеграции между q и π подъинтегральная функция по абсолютной величине все время меньше, чем $M\cos^{2m}\frac{q}{2}$, а длина интервала интеграции для каждого из обоих интегралов меньше π. Обозначая $\cos^2\frac{q}{2}$ через λ, где $0 < \lambda < 1$, перепишем полученное неравенство так:

$$|I_2| < 2\pi M \lambda^m.$$

С другой стороны,

$$I_1 = \int_{-q}^{q} F(u)\cos^{2m}\frac{u}{2}\,du \geqslant \mu \int_{-q}^{q} \cos^{2m}\frac{u}{2}\,du = 2\mu \int_{0}^{q}\left(1-\sin^2\frac{u}{2}\right)^m du >$$

$$> 2\mu \int_{0}^{q}\left(1-\sin^2\frac{u}{2}\right)^m \cos\frac{u}{2}\,du > 2\mu \int_{0}^{q}\left(1-\sin\frac{u}{2}\right)^m \cos\frac{u}{2}\,du.$$

Последний интеграл можно вычислить с помощью подстановки

$$\sin\frac{u}{2} = t; \quad \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\,du = dt:$$

$$\int_{0}^{q}\left(1-\sin\frac{u}{2}\right)^m \cos\frac{u}{2}\,du = 2\int_{0}^{p}(1-t)^m\,dt = \frac{2}{m+1}\left[1-(1-p)^{m+1}\right],$$

где $p = \sin\frac{q}{2}$, положительное число, меньшее 1.

Так как $(1-p)^{n+1} < 1-p$, то имеем неравенство:

$$I_1 > \frac{4p\mu}{m+1}.$$

Как мы видели, $I_1 + I_2 = 0$, поэтому $|I_2| = |I_1|$, следовательно

$$2\pi M\lambda^m > \frac{4p\mu}{m+1} \quad \text{или} \quad \lambda^m > \frac{c}{m+1},$$

где c — число, не зависящее от m.

Но это невозможно, если m достаточно большое, так как степень λ^m при возрастании m стремится к нулю быстрее, чем $\frac{c}{m+1}$.

Иными словами, возможно m выбрать столь большим, чтобы $\lambda^m < \frac{c}{m+1}$, и тогда не может существовать неравенство $\lambda^m > \frac{c}{m+1}$, которое мы выше получили.

Таким образом, считая $f(x_0) \neq 0$, мы пришли к противоречию, а потому $f(x_0) = 0$. Так как это рассуждение имеет место для каждого значения x_0 промежутка $(-\pi, \pi)$, то доказано, что $f(x)$ есть тождественный нуль.

Итак мы доказали свойство замкнутости системы тригонометрических функций, которое может быть формулировано так: функция $f(x)$, непрерывная в промежутке $(-\pi, +\pi)$, не может иметь все свои коэфициенты Фурье равными нулю, не будучи тождественным нулем.

Это свойство позволяет ответить на вопрос: в какой степени функция определяется своими коэфициентами Фурье?

Очевидно невозможно, чтобы имелось две различные функции, непрерывные на $(-\pi, +\pi)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с одними и теми же коэфициентами Фурье, так как их разность $f_1(x) - f_2(x)$, для которой все коэфициенты Фурье суть нули, была бы по предыдущему тождественным нулем.

Итак коэфициенты Фурье единственным образом определяют функцию.

§ 4. Сходимость рядов Фурье. Случай непрерывных функций.

Всякая всюду непрерывная функция $f(x)$, периода 2π, производная которой ограничена и кусочно-непрерывна в промежутке $(-\pi, +\pi)$, изображается соответствующим ей рядом Фурье. Последний сходится абсолютно и равномерно.

Чтобы в этом убедиться, мы применим к формулам, выражающим коэфициенты Фурье, интегрирование по частям:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{f(x)\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{+\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\, dx,$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi}\left(f(x)\frac{\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{+\pi} +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\, dx,$$

так как по условию $f(+\pi) = f(-\pi)$.

Таким образом, обозначая через a'_n и b'_n коэфициенты Фурье для производной функции $f'(x)$, мы будем иметь:

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, \quad b_n = \frac{a'_n}{n}. \tag{1}$$

Мы видели, что (§ 1, примечание 2°) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a'_n|}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b'_n|}{n}$$

сходятся. Следовательно в силу (1) сходятся также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|.$$

Отсюда следует, что ряд Фурье с общим членом

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

сходится абсолютно и равномерно, так как абсолютная величина его n-го члена менее, нежели $|a_n| + |b_n|$. Итак мы обнаружили, что наш ряд Фурье сходится равномерно и имеет суммой всюду непрерывную функцию $s(x)$. Остается показать, что $s(x) \equiv f(x)$.

С этой целью выразим коэфициенты a_n и b_n через функцию $s(x)$ сумму ряда. Интегрируя равномерно сходящийся ряд почленно, получаем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} s(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} s(x)\, dx.$$

Подобным же образом, помножая все члены нашего ряда на $\cos nx$ и интегрируя полученный равномерно сходящийся ряд почленно, помня при этом, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2 nx\, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\sin mx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\cos mx\, dx = 0 \quad (n \neq m)$$

(см. § 1, формулы 3′, 3‴), мы получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} s(x)\cos nx\,dx$$

и аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} s(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В прошлом параграфе мы видели, что если две непрерывные функции $f(x)$ и $s(x)$ имеют одинаковые коэфициенты Фурье, то они тождественны между собой.

Итак $f(x) \equiv s(x)$ и теорема полностью доказана.

§ 5. Разложения функций $\varphi(x) = x$ и $\psi(x) = x^2$

В качестве первого примера рассмотрим разложение в ряд Фурье периодической функции $\psi(x)$, определяемой формулой

$$\psi(x) = x^2 \text{ при } -\pi < x \leqslant \pi.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos mx\,dx = -\frac{2}{\pi m}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi m^2}\left| x\cos mx\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx = \frac{4}{\pi m^2}\pi\cos m\pi = \frac{4}{m^2}(-1)^m.$$

При вычислении коэфициентов a_m мы дважды применили формулу интеграции по частям.

Что касается коэфициентов b_m, то они все равны нулю. Действительно подъинтегральная функция в

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin mx\,dx,$$

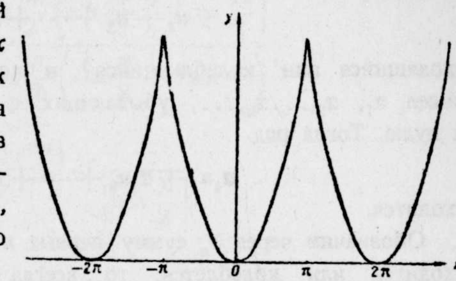
равная $x^2\sin mx$, есть нечетная: она меняет знак вместе с изменением знака переменного x. Поэтому в промежутке от $-\pi$ до π диференциал $x^2\sin mx\,dx$ принимает значения попарно одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку и суммы этих значений суть нули. Следовательно интеграл, входящий в b_m, тоже есть нуль.

Итак находим:

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right] = x^2 \text{ (если } -\pi < x \leqslant \pi).$$

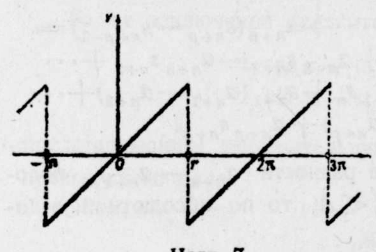
Вне промежутка $-\pi < x \leqslant \pi$ сумма ряда изображает функцию, получающуюся периодическим продолжением x^2 (черт. 6).

То обстоятельство, что образованный ряд Фурье для функции $\psi(x)$ действительно сходится к этой функции при всех значениях x следует из теоремы § 4, так как функция $\psi(x)$ всюду непрерывна и ее производная ограничена в промежутке $(-\pi, +\pi)$. Полученное разложение для функции $\psi(x)$, как мы знаем, сходится абсолютно и равномерно.



Черт. 6.

В качестве второго примера составим ряд Фурье для функции $\varphi(x)$, определяемой формулой: $\varphi(x) = x$ при $-\pi < x < \pi$. Эта функция имеет точки прерывности первого рода при $x = (2n+1)\pi$, где n — любое целое число (черт. 7). Поэтому к ней не приложима теорема § 4, и возникает вопрос: будет ли ее ряд Фурье сходиться и, если он сходится, то изображает ли он данную функцию $\varphi(x)$? Эти вопросы мы подвергнем исследованию и полученными результатами воспользуемся в следующем § 6 для изучения общего случая разложения в ряд Фурье прерывных функций.



Черт. 7.

Прежде всего образуем ряд Фурье для функции $\varphi(x)$.

Здесь $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ суть нули, так как подъинтегральные функции $x\cos mx$ являются нечетными. Что касается коэфициентов b_m, то их вычислим методом интеграции по частям. Находим:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\,dx = -\frac{1}{\pi m}\left| x\cos mx\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi m}2\pi\cos m\pi = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}.$$

Итак искомый ряд Фурье функции $\varphi(x)$ будет:

$$\varphi(x) \sim 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right].$$

Исследование сходимости этого ряда будет основано на следующей теореме Абеля из теории рядов.

Дан ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

сходящийся или колеблющийся[1] и последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, убывающих с возрастанием n и стремящихся к нулю. Тогда ряд

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n + \cdots \tag{2}$$

сходится.

Обозначим через s_n сумму первых n членов ряда (1). Если ряд (1) сходится или колеблется, то всегда существует постоянное число $A, (A > 0)$ такое, что $|s_n| < A$ при всяком n.

Обозначая через S_n сумму первых n членов ряда (2), имеем:

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} u_{n+1} + \cdots + a_{n+p} u_{n+p}.$$

Вторую часть этого равенства перепишем так:

$$\begin{aligned} &a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \cdots + a_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1}) = \\ &= -a_{n+1} s_n + a_{n+1} s_{n+1} - a_{n+2} s_{n+1} + a_{n+2} s_{n+2} - a_{n+3} s_{n+2} + \cdots \\ &\cdots - a_{n+p} s_{n+p-1} + a_{n+p} s_{n+p} = -a_{n+1} s_n + s_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots \\ &\cdots + s_{n+p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p} s_{n+p}. \end{aligned}$$

Так как числа a убывающие, то все разности $a_{n+k} - a_{n+k+1}$ положительны, и так как кроме того $|s_n| < A$, то по абсолютной величине предыдущая сумма будет меньше чем

$$A[a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}],$$

т. е.

$$|S_{n+p} - S_n| < 2Aa_{n+1}.$$

При неограниченном возрастании n выражение $2Aa_{n+1}$ стремится к нулю, следовательно ряд (2) сходящийся.

Положим в частности $u_n = (-1)^{n-1} e^{nxi}$.

Тогда

$$s_n = e^{xi} - e^{2xi} + \cdots \pm e^{nxi} = e^{xi}\,\frac{1 \pm e^{nxi}}{1 + e^{xi}}.$$

[1] То есть сумма первых n членов, взятая по модулю, остается меньше некоторого постоянного числа, не зависящего от n.

Заметив, что

$$\frac{1 + e^{nxi}}{1 + e^{xi}} = \frac{\cos\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)}$$

и

$$\frac{1 - e^{nxi}}{1 + e^{xi}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)},$$

мы видим

$$\left|\frac{1 \pm e^{nxi}}{1 + e^{xi}}\right| < \frac{1}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$$

и, следовательно,

$$|s_n| < \frac{1}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|} = A,$$

где A — конечное число при любом x, кроме $x \equiv \pi$.

Таким образом ряд $a_1 e^{xi} - a_2 e^{2xi} + a_3 e^{3xi} - \cdots$, где числа a положительны и неограниченно убывают, будет сходящимся при любом x, кроме $x \equiv \pi$.

То же заключение относится к рядам

$$\begin{aligned} &a_1 \cos x - a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x - \ldots \\ &a_1 \sin x - a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x - \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

представляющим действительную часть и коэфициент при мнимой части предыдущего ряда.

Очевидно, если

$$-q \leqslant x \leqslant q \ (q < \pi),$$

то

$$|s_n| < \frac{1}{\cos\frac{q}{2}} = A$$

и значит ряды (3) будут равномерно сходящимися. Заметим, что ряд $a_1 \sin x - a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x \ldots$ сходится и при $x \equiv \pi$; полагая $a_n = \frac{1}{n}$, мы заключаем:

ряд

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$$

всюду сходится, причем его сходимость равномерная *во всяком промежутке, не содержащем точек x конгруэнтных с π.*

Возвращаясь теперь к вопросу о разложении функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье, мы видим, что этот ряд сходится при всех значениях x, причем он сходится равномерно во всяком промежутке, не содержащем точек прерывности функции $\varphi(x)$. Чему равна его сумма? В точках прерывности $x \equiv \pi$ сумма ряда равна нулю, т. е. среднеарифметическому предельных значений функции $\varphi(x)$ справа и слева, так как $\varphi(\pi+0) = -\pi$, $\varphi(\pi-0)=\pi$. Во всякой же точке непрерывности сумма ряда равна $\varphi(x)$. Действительно наш ряд является производным от ряда Фурье функции $\frac{1}{2}\psi(x)$ и будет равномерно сходящимся при $-q \leqslant x \leqslant q$ $(q<\pi)$. Следовательно его сумма равна $\frac{1}{2}\psi'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x = x$, если $-q \leqslant x \leqslant q$. Итак, ряд Фурье функции $\varphi(x)$ сходится к значению самой функции во всех ее точках непрерывности, в точках же прерывности он сходится к средне-арифметическому предельных значений функции $\varphi(x)$ справа и слева. Обозначая через ξ любое число между $-\pi$ и $+\pi$ и заменяя в ряде Фурье для $\varphi(x)$ переменное x через $x-\xi$, мы получаем ряд

$$\varphi(x-\xi)=2\left[\frac{\sin(x-\xi)}{1}-\frac{\sin 2(x-\xi)}{2}+\frac{\sin 3(x-\xi)}{3}-\cdots\right]=$$

$$=-\frac{2}{1}\sin\xi\cos x+\frac{2}{1}\cos\xi\sin x+\frac{2}{2}\sin 2\xi\cos 2x-\frac{2}{2}\cos 2\xi\sin 2x-$$

$$-\frac{2}{3}\sin 3\xi\cos 3x+\frac{2}{3}\cos 3\xi\sin 3x-\cdots,$$

который можно записать также в виде ряда Фурье с коэфициентами

$$a_0=0,\quad a_n=2\frac{(-1)^n}{n}\sin n\xi,\quad b_n=2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos n\xi.$$

Этот ряд изображает функцию $\varphi(x-\xi)$ во всех ее точках непрерывности, в точках же прерывности этой функции $x=\xi+(2k+1)\pi$ он сходится к нулю, т. е. к значениям $\frac{\varphi(x+0)+\varphi(x-0)}{2}$.

§ 6. Сходимость рядов Фурье. Случай прерывных функций

В § 4 мы исследовали разложение в ряд Фурье всюду непрерывной периодической функции $f(x)$, имеющей ограниченную кусочно-непрерывную производную, доказав, что в этом случае ее ряд Фурье сходится равномерно к функции $f(x)$. Этого не будет в случае, когда функция

$f(x)$ имеет точки прерывности, которые мы будем предполагать точками прерывности первого рода. Чтобы исследовать вопрос о разложении в ряд Фурье в этом общем случае, мы воспользуемся результатами, полученными в прошлом параграфе относительно прерывной функции $\varphi(x)$ специального вида.

Мы уже знаем, что функция

$$\varphi(x-\xi)=2\left[\frac{\sin(x-\xi)}{1}-\frac{\sin 2(x-\xi)}{2}+\frac{\sin 3(x-\xi)}{3}-\cdots\right.$$

непрерывна кроме значений $x\equiv\xi+\pi$; в этих точках наша функция претерпевает скачок от предельного значения слева π к предельному значению справа $-\pi$. Далее известно, что ее ряд Фурье сходится к значению $\varphi(x-\xi)$ во всякой точке непрерывности этой функции, в точках же прерывности $x\equiv\xi+\pi$ его сумма есть нуль, т. е. среднеарифметическое предельных значений $-\pi$ и $+\pi$ справа и слева.

Пусть теперь $f(x)$ есть любая периодическая функция, имеющая в промежутке $-\pi<x\leqslant\pi$ точки прерывности первого рода $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ со скачками $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$; ее производную мы предполагаем ограниченной и кусочно-непрерывной функцией на $(-\pi, \pi)$. Образуем вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{\delta_1}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_1)-\frac{\delta_2}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_2)-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\delta_n}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_n).$$

Эта периодическая функция $F(x)$ всюду непрерывна (см. введение) и имеет ограниченную кусочно-непрерывную производную на $(-\pi, +\pi)$.

Вследствие теоремы § 4 функция $F(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. Мы получим очевидно ряд Фурье функции $f(x)$, если почленно сложим ряды Фурье функций

$$F(x),\ \frac{\delta_1}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_1), \ldots, \frac{\delta_n}{2\pi}\varphi(x+\pi-\xi_n).$$

Вместе с тем мы обнаружили справедливость следующего предложения: *если периодическая функция $f(x)$, допуская лишь точки прерывности первого рода [в конечном числе на $(-\pi, +\pi)$], обладает производной ограниченной и кусочно-непрерывной на $(-\pi, +\pi)$, то ее ряд Фурье повсюду сходится. Он сходится равномерно к $f(x)$ во всяком промежутке, не содержащем никакой точки прерывности функции $f(x)$ в точках же прерывности сумма ряда равна среднеарифметическому предельных значений функции $f(x)$ справа и слева.*

§ 7. Процесс средне-арифметических. Суммы Фейера

Процесс средне-арифметических основан на понятии обобщенного предела, данного Ч е з а р о. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$; эта последовательность имеет предел s в обыкновенном смысле слова, если имеем при $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|s - s_n| < \varepsilon$, каково бы ни было данное наперед ε, $\varepsilon > 0$.

Мы скажем, что эта последовательность имеет обобщенный предел σ, если последовательность чисел $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$, где

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

имеет предел σ в обыкновенном смысле.

Чтобы быть уверенным в отсутствии противоречий и в том, что обобщенный предел содержит как частный случай обыкновенный предел, мы должны показать, что если обыкновенный предел существует, то обобщенный предел существует также и ему равен. Действительно пусть $N = N(\varepsilon)$ — число такое, что при $n > N$ имеем:

$$|s - s_n| < \varepsilon. \tag{1}$$

Заметив, что

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1}}{n} + \frac{s_N + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

на основании (1) получаем:

$$\frac{s_N + s_{N+1} + \ldots + s_{n-1}}{n} = \frac{n - N}{n} s + \eta,$$

где

$$|\eta| < \frac{n-N}{n}\varepsilon < \varepsilon,$$

потому что каждый член числителя левой части отличается от s меньше, чем на ε по абсолютному значению.

Таким образом мы имеем:

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{N}{n}\right) s + \eta + \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{N-1}}{n}.$$

Это равенство имеет место для всех значений n, $n > N$; N постоянное, определяемое заданием ε.

Можно выбрать n достаточно большим так, чтобы

$$\sigma_n - s = -\frac{N}{n} s + \eta + \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1}}{n}$$

было по своему абсолютному значению меньше 2ε.

Для этого достаточно выбрать $N' \geqslant N$ таким образом, чтобы

$$\frac{N}{n}|s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{N-1}}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > N'$.

Следовательно при $n > N'$ будем иметь:

$$|\sigma_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.$$

Это доказывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

всякий раз как $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ существует.

Однако обобщенный предел может существовать в тех случаях, когда обыкновенный предел не существует. Простейший пример таков. Пусть дана последовательность чисел

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

Здесь $s_n = 1$ или -1, и s_n не имеет обыкновенного предела, в то время как s_n имеет обобщенный предел равный нулю, потому что $\sigma_n = \frac{1}{n}$ или нулю, смотря по тому, будет ли n нечетным или четным, а следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Для изучения рядов Фурье Ф е й е р приложил изложенное понятие обобщенного предела, основанного на рассмотрении средне-арифметических сумм σ_n вместо обыкновенных.

Рассматривая сумму $s_n(x)$ первых $n+1$ членов ряда Фурье, он показал, что эта сумма $s_n(x)$ имеет при $n \to \infty$ обобщенный предел равный $f(x)$ во всякой точке непрерывности функции $f(x)$ и равный $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в любой точке прерывности первого рода, какова бы ни была функция $f(x)$, ограниченная и кусочно-непрерывная на $(-\pi + \pi)$.

Мы видели (§ 2, формула 2), что сумма n первых членов ряда Фурье выражается интегралом:

$$s_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, \frac{\cos(n-1)(\alpha - x) - \cos n(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)}\, d\alpha.$$

Суммы Фейера $\sigma_n(x)$ будут:

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, \frac{1 - \cos n(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)}\, d\alpha$$

или

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left(\frac{\sin n\dfrac{\alpha - x}{2}}{\sin\dfrac{\alpha - x}{2}}\right)^2 d\alpha.$$

Полагая в этом интеграле $\alpha = x + t$, получим:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left(\frac{\sin n\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin n\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt,$$

последнее в силу периодичности подъинтегральной функции.

Наконец, заменяя $\frac{t}{2}$ на t, получим:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Разбивая в последнем интеграле промежуток интегрирования на части $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и изменяя знак у переменного в первом интеграле, получим:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

т. е.

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{2}$$

Полагая, в частности в формуле (2) $f(x) \equiv 1$, получим:

$$1 = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt, \tag{2'}$$

а по умножении обеих частей на $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, будет

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+0)+f(x-0)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{2''}$$

Вычитая из (2) равенство (2″), найдем:

$$\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x+0) + f(x-2t) - f(x-0)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ столь малым, чтобы имели место неравенства:

$$|f(x+2t) - f(x+0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x-2t) - f(x-0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

когда $0 < t \leqslant \delta$, и разобьем промежуток интегрирования в последнем интеграле на части $(0, \delta)$ и $\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$.

Мы получаем:

$$\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\delta} [f(x+2t) - f(x+0) + f(x-2t) - f(x-0)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} = I_n + K_n.$$

Так как по условию функция $f(\alpha)$ ограничена на отрезке $(-\pi + \pi)$, то каково бы ни было α, можем считать

$$|f(\alpha)| < M,$$

где M — некоторое постоянное.

Оценим теперь абсолютные величины интегралов I_n и K_n.

Имеем:

$$|K_n| < \frac{4M}{\pi n \sin^2\delta}\cdot\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} dt < \frac{4M}{\pi n \sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n\sin^2\delta},$$

так как $\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 < \frac{1}{\sin^2\delta}$ при $\delta \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$|I_n| < \frac{\varepsilon}{\pi n}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

При выводе последнего неравенства мы воспользовались неравенством:

$$|f(x+2t) - f(x+0) + f(x-2t) - f(x-0)| \leqslant |f(x+2t) - f(x+0)| + |f(x-2t) - f(x-0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

которое справедливо, когда t изменяется в промежутке $(0, \delta)$, согласно выбору δ.

Итак мы нашли:

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| \leqslant |I_n| + |K_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Выбирая $N = N(\varepsilon)$ столь большим, чтобы при $n \geqslant N$ выполнялось неравенство:

$$\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

мы найдем:

$$\left|\sigma_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{при} \quad n \geqslant N,$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Заметив, что в точке непрерывности

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x),$$

мы заключаем, обобщенная сумма ряда Фурье совпадает с $f(x)$ в точках непрерывности, в точках же прерывности первого рода она равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Таким образом мы обнаружили, что ряд Фурье функции $f(x)$, не имеющей других особенностей, кроме точек прерывности первого рода, суммируется процессом средне-арифметических во всякой точке x к значению:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Легко показать из предыдущего анализа, что средне-арифметические суммы $\sigma_n(x)$ равномерно сходятся к функции $f(x)$ во всяком промежутке $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, внутреннем к интервалу непрерывности функции $f(x)$, т. е. при условии, что $f(x)$ непрерывна в области $\alpha - \delta_1 < x < \beta + \delta_1$, где δ_1 сколь угодно малое положительное число.

Действительно выберем δ, $\delta < \frac{\delta_1}{2}$, достаточно малым так, чтобы имели место неравенства:

$$|f(x+2t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x-2t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

когда t изменяется в промежутке $(0, \delta)$, каково бы ни было x, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Тогда в силу предыдущего анализа получим:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Выбирая $N = N(\varepsilon)$ столь большим, чтобы при $n \geqslant N$ выполнялось неравенство:

$$\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

мы найдем:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

при $n \geqslant N$, каково бы ни было x, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Так как N не зависит от x, изменяющегося в промежутке (α, β), то последним неравенством обнаружена равномерная сходимость суммы $\sigma_n(x)$ к функции $f(x)$ в промежутке (α, β).

В частности, если $f(x)$ есть всюду непрерывная периодическая функция, то суммы $\sigma_n(x)$ будут стремиться равномерно к $f(x)$, каково бы ни было x.

Итак, любая всюду непрерывная периодическая функция $f(x)$ является пределом при $n \to \infty$ средне-арифметических сумм $\sigma_n(x)$ ее ряда Фурье или, что то же, $f(x)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)].$$

Общий член этого ряда $\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)$ есть тригонометрическая сумма вида

$$\alpha_0 + \alpha_1\cos x + \beta_1\sin x + \ldots + \alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx.$$

Следовательно всякая непрерывная периодическая функция может быть рассматриваема как сумма равномерно сходящегося ряда членов, из которых каждый есть ограниченная тригонометрическая сумма, или, что то же, функция $f(x)$ может, равномерно для всех x, быть апроксимирована тригонометрическими суммами.

Примечание 1°. Если функция $f(x)$ на отрезке $(-\pi, +\pi)$ удовлетворяет условию $|f(x)| \leqslant M$, то при всяком n имеем:

$$|\sigma_n(x)| \leqslant M.$$

В самом деле из формулы (2) этого параграфа вытекает:

$$|\sigma_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2M \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = M,$$

так как

$$\frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = 1. \qquad \text{[формула (2')]}$$

Примечание 2°. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке непрерывности (или точке прерывности первого рода) этой функции, то его сумма равна $f(x)$ $\left(\text{или } \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)$.

В самом деле по доказанному в этом параграфе наш ряд суммируется процессом средне-арифметических к $f(x)$, если x есть точка непрерывности для $f(x)$ $\left(\text{к } \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ в точке прерывности первого рода}\right)$; с другой стороны, обобщенный предел Фейера, равный $f(x)$ $\left(\text{или } \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ в случае прерывности первого рода}\right)$, должен совпадать с обыкновенным, если таковой существует.

Примечание 3°. Мы видели, что средне-арифметические $\sigma_n(x)$ для сумм $s_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x$ суть:

$$\sigma_n(x) = \frac{1-\cos nx}{2n(1-\cos x)},$$

откуда заключаем:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 0$$

во всякой точке x, $x \neq 0$.

Это значит, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \cos mx$ суммируется процессом средне-арифметических к значению $-\frac{1}{2}$ всюду, кроме $x \equiv 0$.

Примечание 4°. Мы видели, что остаточный член сумм Фейера определяется формулой:

$$\sigma_n(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывная с периодом 2π, удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|^\alpha,$$

где K и α — постоянные, $0 < \alpha < 1$, а x_1 и x_2 любые числа.

В этом случае остаточный член сумм Фейера удовлетворяет неравенству:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{KH}{n^\alpha}, \tag{3}$$

каковы бы ни были x и n, где H есть постоянное, зависящее только от α.

Действительно в силу условия Липшица:

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leqslant |f(x+2t) - f(x)| + \\ + |f(x-2t) - f(x)| < K(2t)^\alpha + K(2t)^\alpha = K2^{\alpha+1} t^\alpha$$

и следовательно имеем:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha+1}K}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Заметив, что при $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $\sin t > \frac{2t}{\pi}$, получим:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1}K\pi}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}} dt.$$

Полагая $nt = z$, найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}}\,dt < n^{1-\alpha}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz,$$

откуда

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{2^{\alpha-1}K\pi}{n^{\alpha}}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz.$$

Обозначая наконец $2^{\alpha-1}\pi\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz$ через H, получим требуемое неравенство.

§ 8. Равенство Парсеваля

Мы видели (§ 1), что ряд, составленный из квадратов коэфициентов Фурье, функции $f(x)$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

сходится, какова бы ни была функция $f(x)$, ограниченная и кусочно-непрерывная на $(-\pi, \pi)$. Это заключение мы вывели из неравенства:

$$j_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [(f(x)]^2\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \geqslant 0.$$

Покажем теперь, что $j_n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. **для всякой функции $f(x)$, ограниченной и кусочно-непрерывной на $(-\pi, +\pi)$, имеем:**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула (1) носит название **равенства Парсеваля**.

Для доказательства рассмотрим интеграл:

$$J_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2\,dx.$$

Чтобы произвести оценку этого интеграла, разобьем его на две части:

$$J_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{(s)} [f(x) - \sigma_n(x)]^2\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{(S)},$$

где s означает совокупность всех маленьких интервалов, заключающих точки прерывности функции $f(x)$, а S — совокупность оставшихся интервалов. Сумму длин всех интервалов s назовем через α, причем число α можно очевидно выбрать сколь угодно малым. В оставшихся интервалах S по доказанному в предыдущем параграфе суммы Фейера $\sigma_n(x)$ стремятся равномерно к $f(x)$ с возрастанием n, т. е. $|f(x) - \sigma_n(x)| < \eta$ при $n > N(\eta)$, каково бы ни было x из интервалов S. Заметив, что $|f(x) - \sigma_n(x)| < 2M$, так как если $|f(x)| < M$, то и $|\sigma_n(x)| < M$ (см. § 3, примечание 1°) и что сумма длин интервалов S меньше 2π, получаем:

$$J_n^2 < \frac{1}{2\pi}\,4M^2\alpha + \eta^2.$$

Теперь ясно, что как бы мало ни было заданное положительное число ε, мы всегда можем выбрать сперва α настолько малым, что $\frac{1}{2\pi}4M^2\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем указать такое N, что $|f(x) - \sigma_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ при $n > N$ для всех точек оставшихся интервалов S, следовательно $J_n^2 < \varepsilon$ при $n > N$. Но $j_n^2 < J_n^2$ [1], поэтому j_n^2 подавно меньше ε, т. е. j_n^2 стремится к нулю с возрастанием n.

Доказанная формула (1) легко обобщается.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, ограниченные и кусочно-непрерывные на $(-\pi, +\pi)$, a_n и b_n — коэфициенты Фурье функции $f(x)$, α_n и β_n — коэфициенты Фурье функции $\varphi(x)$.

Тогда имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\varphi(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k). \qquad (4)$$

Очевидно при $f(x) \equiv \varphi(x)$ формула (4) обращается в установленное равенство Парсеваля (1).

Для вывода формулы (4) применим равенство Парсеваля к функции $f(x) + \lambda\varphi(x)$, коэфициенты Фурье которой будут $a_k + \lambda\alpha_k$, $b_k + \lambda\beta_k$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) + \lambda\varphi(x)]^2\,dx =$$

$$= \frac{(a_0 + \lambda\alpha_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + \lambda\alpha_k)^2 + (b_k + \lambda\beta_k)^2].$$

[1] Ибо j_n^2 есть **наименьшая** квадратичная ошибка. См. § 1 (4).

Пользуясь формулой (1), упрощаем это равенство; остаются лишь члены, содержащие λ в первой степени, которые после сокращения на λ дают формулу (4).

Примечание 1°. *Предположим, что функция $f(x)$, непрерывная с периодом 2π, удовлетворяет условию Липшица:*

$$|f(x_1)-f(x_2)|<K|x_1-x_2|^{\alpha},$$

где K и α, $0<\alpha\leqslant 1$ суть постоянные, а x_1 и x_2 — любые числа. При этих условиях ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^p$$

сходится, если

$$p>\frac{1}{2\alpha+1}.$$

Если $p\geqslant 1$, то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^p$$

вытекает из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Поэтому мы можем считать

$$\frac{1}{2\alpha+1}<p<1.$$

Представим средне-арифметическую сумму $\sigma_n(x)$ в виде:

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

и рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x)-\sigma_n(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Отсюда по формуле Парсеваля (1) имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-\sigma_n(x)\}^2dx=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(a_k^2+b_k^2)+\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Пользуясь неравенством (3) § 7 (примечание 4°) при

$$0<\alpha<1,$$

получим:

$$\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)<\frac{2K^2H^2}{n^{2\alpha}}\ (n=1,2,\ldots). \tag{5}$$

Для дальнейшего отметим следующее неравенство.

Пусть α и β два положительных числа, $\alpha+\beta=1$ и A, B два числа $\geqslant 0$. Тогда имеем:

$$A^{\alpha}B^{\beta}\leqslant\alpha A+\beta B. \tag{6}$$

Действительно максимум произведения $A^{\alpha}B^{\beta}$, при $\alpha A+\beta B=$ постоянному, будет, когда $A=B$. Но при $A=B$ имеем: $A^{\alpha}B^{\beta}=A$ и $\alpha A+\beta B=A$ и следовательно (6) удовлетворяется. Отсюда (6) и подавно удовлетворяется, если $A\neq B$.

Положим в неравенстве (6):

$$A=u_n^{\frac{1}{\alpha}}:\sum_n u_n^{\frac{1}{\alpha}},\quad B=v_n^{\frac{1}{\beta}}:\sum_n v_n^{\frac{1}{\beta}}$$

и просуммируем по n полученное неравенство. Тогда будем иметь:

$$\sum_n u_nv_n\leqslant\left(\sum_n u_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\cdot\left(\sum_n v_n^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}. \tag{7}$$

Воспользуемся неравенством (7), полагая в нем:

$$u_n=(a_n^2+b_n^2)^p,\ v_n=1,\ \alpha=p.$$

Получим неравенство:

$$\sum_{n=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)^p\leqslant 2^{\nu(1-p)}\left\{\sum_{n=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)\right\}^p\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\nu(1-p)}\left\{\sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}^p,$$

где ν может получать значения 0, 1, 2,...

С помощью неравенства (5) найдем:

$$\sum_{n=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}}(a_n^2+b_n^2)^p<\frac{2^pK^{2p}H^{2p}}{2^{\nu(2\alpha p+p-1)}}$$

и следовательно суммированием по ν получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^p<2^pK^{2p}H^{2p}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu(2\alpha p+p-1)}}.$$

Так как

$$p > \frac{1}{2\alpha+1},$$

то $2\alpha p + p - 1 > 0$ и последний ряд сходится. Следовательно сходится ряд, стоящий в левой части последнего неравенства. Итак мы доказали сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p \text{ при } p > \frac{1}{2\alpha+1},$$

предполагая $0 < \alpha < 1$.

Остается отдельно рассмотреть случай $\alpha = 1$. Обозначая через β любое положительное число меньшее 1, мы видим, что из неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$ следует, при $|x_1 - x_2| \leqslant 1$, неравенство: $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|^\beta$. Обозначим через K_1 число большее, чем K, и большее, чем максимум дроби $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\beta}$, где x_1, x_2 любые числа промежутка $(-\pi, +\pi)$ такие, что $|x_1 - x_2| \geqslant 1$. Тогда имеем: $|f(x_1) - f(x_2)| < K_1 |x_1 - x_2|^\beta$ при любых x_1 и x_2.

По доказанному ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$$

сходится, если

$$p > \frac{1}{2\beta+1}.$$

Так как β может быть взято сколь угодно близким к единице, то написанный ряд будет сходящимся при любом p,

$$p > \frac{1}{3}.$$

Таким образом теорема полностью доказана.

Следствие. *В условиях доказанной теоремы при*

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся абсолютно.

В самом деле, если

$$\alpha > \frac{1}{2},$$

то

$$\frac{1}{2\alpha+1} < \frac{1}{2}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)^p$$

сходится при

$$p = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, заметив, что

$$|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ и } |b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

заключаем о сходимости рядов

$$\sum |a_n| \text{ и } \sum |b_n|.$$

Примечание. Из равенства Парсеваля, установленного в настоящем параграфе, вытекает свойство замкнутости тригонометрической системы функций

$$1 \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x \text{ и т. д.}$$

в промежутке $(-\pi, +\pi)$. Это важное свойство было установлено в § 3 и им мы пользовались в вопросе изображения непрерывной периодической функции ее рядом Фурье (см. § 4).

Чтобы получить теорему замкнутости из равенства Парсеваля, допустим, что функция $f(x)$ непрерывная на $(-\pi, +\pi)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 \quad (n = 1, 2\ldots).$$

Тогда по формуле Парсеваля получим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)dx = 0,$$

откуда $f(x) \equiv 0$, что и доказывает замкнутость тригонометрической системы.

§ 9. Метод Дирихле

Основная идея этого метода состоит в том, что сумма n первых членов ряда Фурье приводится к такому виду, который позволяет исследовать ее поведение при стремлении n к бесконечности.

Как мы видели [§ 2, формула (2)], сумма $n+1$ первых членов ряда Фурье может быть представлена в виде:

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\cos n(\alpha-x)-\cos(n+1)(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha. \quad (1)$$

Замечая, что

$$\cos n(\alpha-x)-\cos(n+1)(\alpha-x)=2\sin(2n+1)\frac{\alpha-x}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}$$

и

$$1-\cos(\alpha-x)=2\sin^2\frac{\alpha-x}{2},$$

запишем $s_n(x)$ так:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\alpha-x}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha. \quad (2)$$

Так как подъинтегральная функция имеет период 2π, то очевидно наш интеграл не изменит своего значения, если вместо промежутка $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$ мы его распространим на любой другой промежуток длины 2π. Всего удобнее будет выбрать промежуток интегрирования $x-\pi\leqslant\alpha\leqslant x+\pi$. Тогда мы получаем:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\dfrac{\alpha-x}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha-x}{2}}\,d\alpha. \quad (2')$$

Введя в (2') новое переменное интегрирование при помощи подстановки $\alpha-x=2t$, мы находим:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \quad (3)$$

Последний интеграл (3) представим в виде суммы двух интегралов, разбивая промежуток интегрирования на части $\left(-\frac{\pi}{2},\,0\right)$ и $\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

и наконец, меняя в первом интеграле знак у переменного интегрирования, найдем:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt+ \quad (4)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

В этом виде мы и будем исследовать сумму $s_n(x)$ при стремлении n к бесконечности, считая при этом x неизменным. Дальнейшие выводы основаны на некоторых вспомогательных результатах, с которыми сначала познакомимся.

§ 10. Основные леммы

Лемма 1. Если a и b числа одинаковых знаков, и ни одно из них не равно нулю, то

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=0, \quad (I)$$

где $f(x)$ — любая функция, ограниченная и кусочно-непрерывная на $(a,\ b)$.

Действительно мы знаем (§ 1, примечание 1), что

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin mx\,dx=0,$$

какова бы была функция $\varphi(x)$, ограниченная и кусочно-непрерывная на $(a,\ b)$. Полагая $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$, мы видим, что $\varphi(x)$ будет ограниченной и кусочно-непрерывной функцией в промежутке $(a,\ b)$, так как x не обращается в нуль на отрезке $(a,\ b)$. Следовательно лемма доказана.

Примечание. Это предложение остается справедливым в случае $a>0$, $b=\infty$, при условии что

$$\int_a^{\infty}|\,f(x)\,|\,dx$$

существует.

Действительно, замечая, что

$$\int_a^\infty f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\int_a^l+\int_l^\infty,$$

мы выберем l столь большим, чтобы

$$\left|\int_l^\infty f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|<\frac{1}{l}\int_l^\infty |f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

где ε, $\varepsilon>0$, данное сколь угодно малое число.

Считая l фиксированным, мы по лемме заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^l f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=0,$$

т. е.

$$\left|\int_a^l f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

начиная с достаточно большого значения m. Итак окончательно находим:

$$\left|\int_a^\infty f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|=\left|\int_a^l+\int_l^\infty\right|\leqslant\left|\int_a^l\right|+\left|\int_l^\infty\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

при всех достаточно больших значениях m.

Последнее же неравенство равносильно утверждению:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^\infty f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=0.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению второй леммы, введем определение: функция $f(x)$ называется удовлетворяющей условию Дирихле в промежутке (a, b), если она ограничена в этом промежутке, и если этот промежуток можно разбить на конечное число таких отрезков, что внутри каждого из них $f(x)$ функция непрерывная и монотонная[1].

Иными словами, функция $f(x)$ имеет в данном промежутке конечное число максимумов и минимумов или вовсе их не имеет.

[1] Т. е. или постоянно не убывает, или постоянно не возрастает при возрастании x.

Замечание. Очевидно, из определения следует, что для $f(x)$, удовлетворяющей условию Дирихле на (a, b), существуют конечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$. Кроме того во всякой точке прерывности x_0, $a<x_0<b$ существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Точек прерывности — конечное число.

Примером функции, не удовлетворяющей условию Дирихле, может служить функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $f(0)=0$, непрерывная и имеющая бесконечное число максимумов и минимумов в промежутке $(-a, a)$, каково бы ни было число a.

Лемма II. Если $b>0$, то

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0), \qquad \text{(II)}$$

где $f(x)$ функция, удовлетворяющая условию Дирихле на $(0, b)$.

Прежде всего заметим, что если формула (II) будет верна при b сколь угодно малом, то она будет верна и при b любом, потому что, в последнем случае, полагая $b=b_1+b_2$, где $b_2>0$, b_1 сколь угодно мало, имеем:

$$\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\int_0^{b_1} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx+\int_{b_1}^{b_2} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

Предел второго интеграла второй части в силу леммы I равен нулю, и вопрос приводится к рассмотрению первого, у которого верхний предел сколь угодно мал. Поэтому при выводе формулы (II) можно предполагать b произвольно малым.

Выбирая b достаточно малым, мы можем считать функцию $f(x)$ непрерывной и монотонной в промежутке $0<x\leqslant b$. Более того, мы можем считать, что $f(x)$ невозрастающая функция в пределах интеграла, потому что если формула доказана для такой функции, то она будет верна и для неубывающей функции. В самом деле, если $f(x)$ неубывающая функция, то $-f(x)$ невозрастающая, и если справедлива формула

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b [-f(x)]\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}[-f(+0)],$$

то верна и формула

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0).$$

Наконец мы можем еще предположить, что $f(x)$ сохраняет положительный знак в пределах интеграла, так как в противном случае можно сначала вместо $f(x)$ взять функцию $F(x)=f(x)+C$, где постоянное C подобрано так, чтобы $F(x)$ было положительным при $0\leqslant x\leqslant b$, и, доказав формулу

$$\lim \int_0^b F(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}F(+0)$$

для положительной функции $F(x)$, получим:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b [f(x)+C]\frac{\sin mx}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx+\lim C\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}[f(+0)+C],$$

а так как

$$\lim_{m\to\infty} C\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx=C\lim_{m\to\infty}\int_0^{bm}\frac{\sin y}{y}\,dy=C\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=C\frac{\pi}{2},$$

то

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0)$$

и формула (II) будет доказана и для данной функции $f(x)$.

Из всего сказанного вытекает, что при доказательстве формулы (II) можно считать b произвольно малым, а $f(x)$ — положительной невозрастающей непрерывной функцией в области $0<x\leqslant b$. Доказанная при этих ограничениях формула будет доказана и вообще. Покажем теперь, что при упомянутых ограничениях интеграл

$$I=\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx$$

есть число положительное, меньшее некоторого постоянного числа, каково бы ни было m.

Для этого заметим, что подынтегральная функция меняет знак, когда x переходит через значения $x=\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots$, для которых $\sin mx$ обращается в нуль. Положим, что $\frac{h\pi}{m}$ есть наибольшее из чисел этого ряда, не превосходящее b, т. е.

$$\frac{h\pi}{m}\leqslant b<\frac{(h+1)\pi}{m}.$$

Интеграл I можно разбить на сумму интегралов, взятых в пределах

$$\left(0, \frac{\pi}{m}\right), \quad \left(\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}\right), \ldots, \left(\frac{(h-1)\pi}{m}, \frac{h\pi}{m}\right) \text{ и } \left(\frac{h\pi}{m}, b\right).$$

В пределах первого интеграла $\sin mx$, а с ним и вся подынтегральная функция >0, в пределах второго <0 и т. д. Обозначая через u_k абсолютную величину интеграла

$$\int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(k+1)\pi}{m}} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx,$$

можем написать:

$$I=u_0-u_1+u_2-\cdots+(-1)^{h-1}u_{h-1}+\int_{\frac{h\pi}{m}}^{b} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx, \tag{1}$$

где $b<\frac{h+1}{m}\pi$. Легко показать, что $u_0>u_1>u_2>\ldots$; действительно, полагая $x=\frac{k\pi+y}{m}$, найдем:

$$u_k=\int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi+y}{m}\right)\frac{\sin y}{k\pi+y}\,dy,$$

откуда видно, что с возрастанием k числа u_k убывают, так как $f(x)$ невозрастающая функция. Что касается последнего интеграла формулы (1), то он по абсолютной величине менее, нежели

$$u_h=\left|\int_{\frac{h\pi}{m}}^{\frac{(h+1)\pi}{m}} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|,$$

так как $b<\frac{h+1}{m}\pi$.

Из сказанного и формулы (1) следует, что $I>0$ и $I<u_0$, где

$$u_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx<f(+0)\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}}\frac{\sin mx}{x}\,dx=f(+0)\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Обозначая через A значение интеграла $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy$, мы находим:

$$0<I<Af(+0). \tag{2}$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости формулы (II).

В самом деле, полагая: $f(x)=f(c)+\varphi(x)$, где $0<c<b$ и $\varphi(x)$ при возрастании x от 0 до c убывает от $f(+0)-f(c)$ до 0, получим:

$$I=f(c)\int\limits_0^c\frac{\sin mx}{x}\,dx+\int\limits_0^c\varphi(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx+\int\limits_c^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

Замечая, что при стремлении m к бесконечности интеграл

$$\int\limits_0^c\frac{\sin mx}{x}\,dx=\int\limits_0^{mc}\frac{\sin y}{y}\,dy$$

стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$, а $f(c)$ можно считать как угодно близким к $f(+0)$, если взять c достаточно малым, перепишем предыдущее равенство таким образом:

$$I-\frac{\pi}{2}f(+0)=f(c)\left[\int\limits_0^c\frac{\sin mx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right]+\frac{\pi}{2}[f(c)-f(+0)]+$$

$$+\int\limits_0^c\varphi(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx+\int\limits_c^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

Отсюда вытекает, что $\left|I-\frac{\pi}{2}f(+0)\right|<\varepsilon$, где ε, $\varepsilon>0$, сколь угодно малое число при всех достаточно больших значениях m.

Действительно в силу неравенства (2):

$$\int\limits_0^c\varphi(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx<A\varphi(+0)=A[f(+0)-f(c)]<\frac{\varepsilon}{4},$$

если взять c достаточно малым, кроме того можно считать $\frac{\pi}{2}|f(c)-f(+0)|$

меньшим $\frac{\varepsilon}{4}$, выбирая надлежащим образом c. Выбрав c, можем затем выбрать μ так, чтобы при $m\geqslant\mu$ имели:

$$\left|\int\limits_0^c\frac{\sin mx}{x}\,dx-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad\text{и}\quad \left|\int\limits_c^b f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad\text{(лемма I).}$$

После этого можем написать неравенство: $\left|I-\frac{\pi}{2}f(+0)\right|<\varepsilon$ при $m\geqslant\mu$, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} I=\frac{\pi}{2}f(+0).$$

Примечание. Это предложение остается верным в случае $b=\infty$, при условии, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле в некотором промежутке $(0,\ l)$ и $\int\limits_0^{\infty}|f(x)|\,dx$ существует.

В самом деле из равенства

$$\int\limits_0^{\infty}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\int\limits_0^{l}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx+\int\limits_l^{\infty}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx$$

переходом к пределу при $m\longrightarrow\infty$ получим:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{\infty}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{l}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0),$$

так как

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_l^{\infty}f(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx=0$$

по лемме I (примечание).

Из установленной формулы (II) вытекает следствие:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\frac{\sin mx}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}f(+0) \tag{II'}$$

при $b<\pi$, если $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле в промежутке $(0,\ b)$.

Действительно

$$\int\limits_0^b f(x)\frac{\sin mx}{\sin x}\,dx=\int\limits_0^b f(x)\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin mx}{x}\,dx=\int\limits_0^b F(x)\frac{\sin mx}{x}\,dx,$$

где $F(x) = f(x)\dfrac{x}{\sin x}$ есть функция, удовлетворяющая условию Дирихле в промежутке $(0, b)$, или представимая в виде суммы таких функций на этом промежутке [1]. Применяя формулу (II) и замечая, что

$$F(+0) = f(+0)\left[\frac{x}{\sin x}\right]_{x=0} = f(0+),$$

находим:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^b f(x)\frac{\sin mx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}f(+0)\ (b<\pi).$$

Формула (II) здесь применима, так как $F(x)$ есть сумма двух функций, из которых каждая удовлетворяет условию Дирихле.

§ 11. Теорема Дирихле

Возвращаясь к формуле (4) § 9 для суммы первых $n+1$ членов ряда Фурье, применим к ней выведенную в предыдущем параграфе формулу (II'); мы получим:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(x+0) + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}f(x-0) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

предполагая, что функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условию Дирихле в промежутке $(-\pi, \pi)$. Действительно в этом случае формула (II') может быть применена к обоим вышенаписанным интегралам, так как $f(x+2t)$ и $f(x-2t)$ будут удовлетворять условию Дирихле при $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

[1] Это основывается на следующем замечании. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в (α, β) монотонны и одного знака (например обе положительны), то их произведение $\varphi\psi$ также положительно. Кроме того оно представляет монотонную функцию, если φ и ψ изменяются в одном и том же направлении. Если же это не так, например, φ возрастает и ψ убывает, то положим:

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \varphi(\beta)\,\psi(x) - [\varphi(\beta) - \varphi(x)]\,\psi(x).$$

Таким образом $\varphi\psi$ есть разность двух убывающих функций. Случай разных знаков у φ и ψ приводится к предыдущему изменением знака.

Полученный результат выражает собой теорему Дирихле: *всякая функция $f(x)$, с периодом 2π, удовлетворяющая условию Дирихле в промежутке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, разлагается в соответствующий ей ряд Фурье, принимая за значение функции в каждой точке прерывности среднеарифметическое предельных ее значений справа и слева.*

§ 12. Сходимость ряда Фурье в данной точке

Представив формулу (4) § 9, выражающую сумму первых $n+1$ членов ряда Фурье, как сумму двух интегралов:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

мы видим, что последний интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$, какова бы ни была кусочно-непрерывная и ограниченная функция $f(x)$. Действительно, полагая

$$F(t) = \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{\sin t},$$

представим этот интеграл в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} F(t)\sin(2n+1)t\,dt,$$

который стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу § 1 (примечание 1°).

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt,$$

т. е. существование $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0)$ обусловлено свойствами функции $f(x)$ в промежутке $x_0-2\varepsilon\leqslant a\leqslant x_0+2\varepsilon$. Следовательно *сходимость ряда Фурье в данной точке x_0 зависит лишь от поведения функции $f(x)$ в произвольно малой окрестности этой точки*, и следовательно если две функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ совпадают в окрестности некоторой точки x_0, то их ряды Фурье одновременно либо сходятся, либо расходятся в точке x_0.

Отсюда вытекает предложение.

Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к значению $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ во всякой точке x_0, в окрестности которой $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле.

Действительно, рассматривая вспомогательную функцию $\varphi(x)$, периода 2π, совпадающую с $f(x)$ в окрестности точки x_0 и удовлетворяющую условию Дирихле во всем промежутке $(-\pi, +\pi)$, мы на основании § 11 заключаем, что ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0 к значению

$$\frac{\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)}{2}.$$

Следовательно и ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к тому же значению

$$\frac{\varphi(x_0+0)+\varphi(x_0-0)}{2}=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Отметим еще ряд критериев сходимости ряда Фурье в данной точке x_0. *Если интеграл*

$$\int_0^{\delta}\frac{|f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)|\,dt}{t},$$

при некотором δ, $\delta>0$, имеет конечное значение, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению $\Phi(x_0)$.

Действительно мы знаем, что сумма $s_n(x_0)$ первых $n+1$ членов ряда Фурье в точке x_0 представляется так:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \qquad (1)$$

Полагая в формуле (1) $f(x)\equiv 1$, получим:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\Phi(x_0)$ и вычитая его из (1), найдем:

$$s_n(x_0)-(x_0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \qquad (2)$$

Разбивая интеграл (2) на две части, соответственно двум промежуткам интегрирования $(0, \varepsilon)$ и $\left(\varepsilon, \dfrac{\pi}{2}\right)$, получим:

$$s_n(x_0)-\Phi(x_0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}[f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}. \qquad (3)$$

Второй интеграл формулы (3) стремится к нулю при $n\to\infty$, каково бы ни было ε, $\varepsilon>0$, так как, полагая

$$F(t)=\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)}{\sin t},$$

представим его в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}F(t)\sin(2n+1)t\,dt,$$

который стремится к нулю при $n\to\infty$ вследствие § 1 (примечание).

Что касается первого интеграла формулы (3), то он по абсолютной величине будет меньше, чем

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{|f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)|}{t}\,dt,$$

так как

$$\frac{t}{\sin t}<\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\varepsilon.$$

В силу условия последний интеграл при достаточно малом ε как угодно мал. Таким образом $|s_n(x)-\Phi(x_0)|$ вследствие (3) будет меньше любого наперед заданного положительного числа при всех достаточно больших значениях n.

Последнее утверждение убеждает нас в сходимости ряда Фурье в точке x_0 к значению $\Phi(x_0)$.

В частности из доказанного критерия вытекают следующие признаки:

a) Если x_0 есть точка непрерывности (или точка прерывности I рода) для функции $f(x)$ и если два интеграла

$$\int_0^\sigma \frac{|f(x_0+h)-f(x_0+0)|}{h}\,dh$$

и

$$\int_0^\sigma \frac{|f(x_0-h)-f(x_0-0)|}{h}\,dh,$$

при некотором σ, $\sigma>0$, имеют конечные значения, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$ $\left(\text{или соответственно к значению } \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right)$.

В самом деле из интегрируемости относительно t в промежутке $(0, \sigma)$ двух дробей

$$\frac{f(x_0+2t)-f(x_0+0)}{t},\quad \frac{f(x_0-2t)-f(x_0-0)}{t}$$

следует интегрируемость в том же промежутке дроби

$$\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2\Phi(x_0)}{t},$$

если примем:

$$\Phi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

b) Более частный, чем *a*), признак будет следующий: в точке x_0 непрерывности (или прерывности I рода) функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к $f(x_0)$ $\left(\text{или соответственно к } \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right)$, если для всех h положительных и достаточно малых имеем:

$$|f(x_0+h)-f(x_0+0)|<kh^\alpha,\quad |f(x_0-h)-f(x_0-0)|<kh^\alpha,$$

где $k>0$ и $\alpha>0$ суть постоянные.

c) Предложение *b*) содержит в себе такие достаточные признаки сходимости ряда Фурье в точке x_0 к значению $f(x_0)$:

1°. Отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ для всех h, как положительных, так и отрицательных, по абсолютной величине меньше постоянного числа.

2°. Существуют конечные производные (правая и левая) в точке x_0 от функции $f(x)$.

3°. Существует конечная производная функции $f(x)$ в точке x_0.

В заключение заметим, что из *b*) вытекает в частности такое предложение: если периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x_1)-f(x_2)|<k|x_1-x_2|^\alpha,$$

где $k>0$ и α, $0<\alpha\leqslant 1$ суть постоянные, а x_1 и x_2 любые числа, то она разлагается в сходящийся ряд Фурье.

§ 13. Примеры

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определяемую условиями:

$$f(x)=\begin{cases} ax\ (0\leqslant x<\pi)\\ bx\ (-\pi<x<0).\end{cases}$$

В данном случае имеем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\,dx=$$

$$=\frac{b}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^\pi=-\frac{b\pi}{2}+\frac{a\pi}{2}=\frac{a-b}{2}\pi,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi ax\cos mx\,dx=$$

$$=\frac{b}{\pi}\left(x\frac{\sin mx}{m}\right)_{-\pi}^{0}-\frac{b}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin mx}{m}dx+\frac{a}{\pi}\left(x\frac{\sin mx}{m}\right)_0^\pi-\frac{a}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin mx}{m}dx=$$

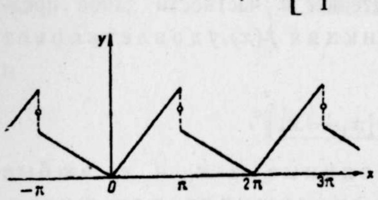
$$=\frac{b}{\pi m^2}(\cos mx)_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi m^2}(\cos mx)_0^\pi=\frac{b-a}{\pi m^2}[1-(-1)^m].$$

Аналогично получим:

$$b_m=\frac{a+b}{m}(-1)^{m+1}.$$

Следовательно окончательно находим:

$$\frac{a-b}{4}\pi+\frac{2(b-a)}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots\right]+$$
$$+(a+b)\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right]=$$
$$=\begin{cases} ax, \text{ если } 0\leqslant x<\pi \\ bx, \text{ если } -\pi<x<0 \\ \dfrac{a-b}{2}\pi \text{ при } x=\pi. \end{cases}$$



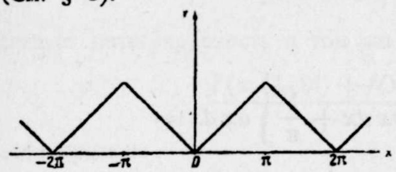
Черт. 8.

Это разложение имеет место на основании теоремы Дирихле, причем в точках прерывности $x=\pi$ сумма ряда есть средне-арифметическое предельных значений функции $f(x)$ справа и слева.

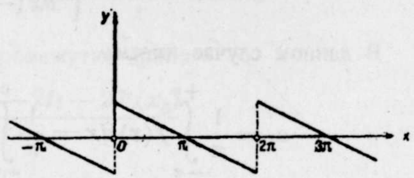
В частном случае, когда $a=b=1$, разложение примет вид:

$$2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right]=\begin{cases} x, \text{ если } -\pi<x<\pi \\ 0 \text{ при } x=\pi. \end{cases}$$

(См. § 5).



Черт. 9.



Черт. 10.

Когда $a=-b=1$, разложение дает:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots\right]=|x|,$$

если $-\pi<x\leqslant\pi$ (черт. 9).

Заменяя в предпоследнем разложении x на $\pi-x$, получим ряд:

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots=\begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2}, \text{ если } 0<x<2\pi, \\ 0 \text{ при } x=0 \end{cases}$$

черт. 10).

§ 14. Неполные тригонометрические ряды

Формулы, определяющие коэфициенты Фурье, упрощаются в тех случаях, когда данная функция $f(x)$ четная или нечетная.

Функция $f(x)$ называется четной, если она обладает свойством: $f(-x)=f(x)$, и нечетной, если обладает свойством: $f(-x)=-f(x)$; иначе говоря, четная функция имеет график, симметричный относительно оси OY, а нечетная — симметричный относительно начала координат.

Если $F(x)$ функция четная, то

$$\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\,dx=2\int_0^{\pi}F(x)\,dx,$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}F(x)\,dx+\int_0^{\pi}F(x)\,dx=$$
$$=\int_0^{\pi}F(-x)\,dx+\int_0^{\pi}F(x)\,dx=2\int_0^{\pi}F(x)\,dx,$$

в силу тождества $F(-x)=F(x)$ [1].

Если же $F(x)$ — функция нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\,dx=0,$$

так как алгебраическая величина площади, заключенной между кривой $y=F(x)$, осью OX и прямыми $x=\pm\pi$, есть нуль.

Заметим, что в частности функции $\cos kx$ четные, функции же $\sin kx$ нечетные; далее очевидно произведения двух четных или нечетных функций есть функция четная, произведение же четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Применяя эти соображения к интегралам, определяющим коэфициенты Фурье, мы получим:

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos mx\,dx,\quad b_m=0,\quad (m=0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

если $f(x)$ — четная функция и $a_m=0$,

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin mx\,dx,\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

если $f(x)$ — нечетная функция.

---

[1] Это следует также из геометрических соображений:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}F(x)\,dx$$

представляет площадь, заключенную между кривой $y=F(x)$, осью OX и двумя прямыми $x=\pm\pi$, которая равна удвоенной площади, заключенной между той же кривой осью OX и прямыми $x=0$ и $x=\pi$.

Таким образом ряд Фурье в случае четной функции будет:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \tag{I}$$

где a_m $(m=0, 1, 2, \ldots)$ определяются по формуле (1); в случае же нечетной функции он будет:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx, \tag{II}$$

где b_m определяются по формуле (2).

Пусть нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная в промежутке $(0, \pi)$, ограниченная и кусочно-непрерывная в этом промежутке. Мы можем образовать для этой функции, с одной стороны, ряд косинусов вида (I), с другой стороны, ряд синусов вида (II). Первый из этих рядов представляет ряд Фурье функции, получающейся из $f(x)$ четным продолжением в соседний промежуток $-\pi<x<0$, а затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $-\pi<x\leqslant\pi$.

Второй же ряд есть ряд Фурье функции, получающейся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний промежуток $-\pi<x<0$, а затем периодическим продолжением с периодом 2π вне промежутка $-\pi<x\leqslant\pi$.

В частности при первом продолжении имеем:

$$f(-0)=f(+0) \quad \text{и} \quad f(-\pi+0)=f(\pi-0); \tag{3}$$

при втором же

$$f(-0)=-f(+0) \quad \text{и} \quad f(-\pi+0)=-f(\pi-0). \tag{4}$$

Если данная функция в промежутке $(0, \pi)$ удовлетворяет условию Дирихле, то продолженные из нее функции первым или вторым способом удовлетворяют очевидно тому же условию в промежутке $(-\pi, \pi)$. Следовательно, на основании общей теоремы § 11, ряды Фурье (I) и (II) сходятся повсюду и их суммы равны

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

во всякой внутренней точке промежутка $(0, \pi)$, на концах же этого промежутка равны

$$\frac{f(+0)+f(-0)}{2}$$

и

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Принимая же во внимание равенства (3) и (4) на концах промежутка $(0, \pi)$, мы получим следующие значения рядов (I) и (II):

x	ряд cos	ряд sin
0	$f(+0)$	0
π	$f(\pi-0)$	0

Примеры: 1°. В § 13 мы получили два разложения функции равной x, в промежутке $(0, \pi)$ — одно по синусам и другое по косинусам (черт. 7 и 9).

2°. Разложить в ряд по синусам функцию, определяемую в промежутке $(0, \pi)$ формулой:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}\,(0<x<\pi).$$

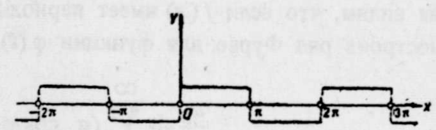
Здесь имеем:

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin mx\,dx=\frac{1}{2m}\,[1-(-1)^m].$$

Искомое разложение будет:

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & \text{если } 0<x<\pi,\\[2pt] 0 \text{ при } x=0, \pi.\end{cases}$$

В промежутке $-\pi<x<0$ сумма ряда равна $-\dfrac{\pi}{4}$, а вне промежутка $-\pi<x\leqslant\pi$ ряд изображает функцию, получающуюся периодическим продолжением (черт. 11).



Черт. 11

3°. Разложить в ряд Фурье функцию, определяемую при любом x формулой $f(x)=|\sin x|$.

Эта функция есть четная, а потому она может быть разложена в ряд косинусов. Вычисляем коэфициенты:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

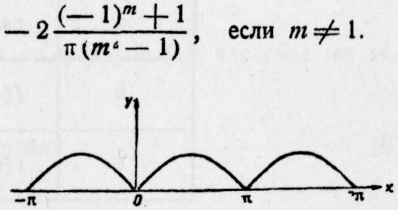
$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\cos mx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos mx\,dx=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(m+1)x - \sin(m-1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^m+1}{m+1} - \frac{(-1)^m+1}{m-1}\right] = -2\,\frac{(-1)^m+1}{\pi(m^2-1)}, \quad \text{если } m \neq 1.$$

При $m=1$ получим:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x\,dx = 0.$$



Черт. 12.

Таким образом окончательно получаем:

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right] = |\sin x|$$

при любом x (черт. 12).

§ 15. Периодические функции периода $2l$

До сих пор мы рассматривали задачу разложения в ряд Фурье периодической функции с периодом 2π. Во многих вопросах бывает нужно находить разложение в тригонометрический ряд функции $f(x)$ с периодом $2l$. Эта задача приводится к предыдущей посредством изменения масштаба для независимого переменного, т. е. введения вместо x вспомогательного переменного t по формуле: $x = \frac{lt}{\pi}$. Полагая

$$f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

мы видим, что если $f(x)$ имеет период $2l$, то $\varphi(t)$ будет иметь период 2π. Построив ряд Фурье для функции $\varphi(t)$, получим:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mt + b_m\sin mt),$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos mt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos mt\,dt,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin mt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin mt\,dt$$

или, возвращаясь к старому переменному x, будем иметь ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{l} + b_m\sin\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx, \ (m=0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx. \tag{3}$$

В частности, если $f(x)$ функция четная или нечетная, то формулы (2) и (3) упрощаются.

Для четной функции $f(x)$ имеем:

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx, \quad b_m = 0; \tag{2'}$$

для нечетной функции $f(x)$ будет:

$$a_m = 0, \quad b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx. \tag{3'}$$

Как и в § 2, ряд Фурье (1) можно записать в комплексной форме

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi x i}{l}},$$

где положено:

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-\frac{k\pi x i}{l}}\,dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Примеры: 1°. Разложить по косинусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{l}{2} < x \leqslant l. \end{cases}$$

В данном случае имеем:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx,$$

так как в промежутке $\left(\frac{l}{2},\ l\right)$ функция $f(x)$ обращается в нуль.

Выполняя подстановку $\frac{\pi x}{l}=t$, находим:

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos mt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(m+1)t+\cos(m-1)t]\,dt,$$

откуда

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+1)\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}+t\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

и

$$a_m=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(m+1)t}{m+1}+\frac{\sin(m-1)t}{m-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\quad(m>1),$$

что будет равно $-\frac{2(-1)^{\frac{m}{2}}}{\pi(m^2-1)}$, если m четное, и равно 0, если m нечетное.

Следовательно находим:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ 0, & \text{если } \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

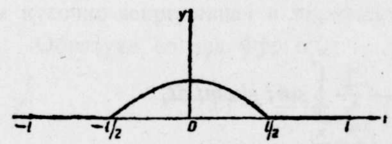
То же разложение в промежутке $-l<x<0$ будет представлять функцию, полученную из $f(x)$ четным продолжением, а вне промежутка $(-l,\ l)$ — функцию, получаемую затем периодическим продолжением с периодом $2l$ (черт. 13).

2°. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами:

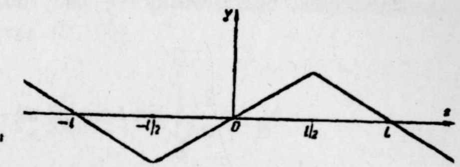
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi^2}{4l}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ \frac{\pi^2}{4l}(l-x), & \text{если } \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

Здесь

$$b_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\frac{\pi^2}{2l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{\pi^2}{2l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$



Черт. 13.



Черт. 14.

Посредством подстановки $\frac{\pi x}{l}=t$ находим:

$$b_m=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin mt\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)\sin mt\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t\cos mt}{m}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos mt\,dt+\frac{1}{2}\left[(\pi-t)\frac{\cos mt}{m}\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos mt\,dt=\frac{\sin m\frac{\pi}{2}}{m^2}.$$

Таким образом окончательно получаем:

$$\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\ldots=\begin{cases}\frac{\pi^2}{4l}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ \frac{\pi^2}{4l}(l-x), & \text{если } \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

Это разложение в промежутке $(-l,\ 0)$ изображает функцию, получаемую из $f(x)$ нечетным продолжением, а вне промежутка $(-l,\ l)$ дальнейшим периодическим продолжением с периодом $2l$ (черт. 14).

3°. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определяемую равенствами:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0\leqslant x<\frac{l}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}, & \text{если } \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

В данном случае имеем:

$$b_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin m\frac{\pi x}{l}\,dx-\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{\pi x}{l}\sin m\frac{\pi x}{l}\,dx.$$

Выполняя подстановку $\frac{\pi x}{l}=t$, получаем:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin mt\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\sin mt\,dt,$$

откуда очевидно $b_1=0$.

При $m>1$,

$$b_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(m-1)t-\cos(m+1)t]\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\cos(m-1)t-\cos(m+1)t]\,dt=$$

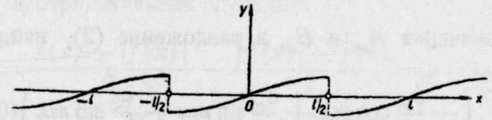
$$=-\frac{2m\sin(m+1)\frac{\pi}{2}}{\pi(m^2-1)}=-\frac{2m\cos m\frac{\pi}{2}}{\pi(m^2-1)}.$$

Таким образом искомое разложение будет:

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m\cos m\frac{\pi}{2}}{m^2-1}\sin m\frac{\pi x}{l}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}, & \text{если } 0\leqslant x<\frac{l}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}, & \text{если } \frac{l}{2}<x\leqslant l,\\ 0, & \text{если } x=\frac{l}{2}.\end{cases}$$

При $x=\frac{l}{2}$ функция $f(x)$ имеет точку прерывности с предельными значениями, равными $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; значит наше разложение при $x=\frac{}{2l}$ равно нулю.

Это разложение в промежутке $(-l, 0)$ изображает функцию, получаемую из $f(x)$ нечетным продолжением, а вне промежутка $(-l, l)$ дальнейшим периодическим продолжением с периодом $2l$ (черт. 15).



Черт. 15.

§ 16. Интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ есть функция периода 2π, неотрицательная, ограниченная и кусочно-непрерывная в промежутке $(0, 2\pi)$.

Образуем ее ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \tag{1}$$

и рассмотрим интеграл

$$F(x)=\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

который представляет функцию $F(x)$ непрерывную и неубывающую в промежутке $(0, 2\pi)$. В силу теоремы Дирихле (§ 11) эта функция $F(x)$ представима ее рядом Фурье в промежутке $0<x<2\pi$, причем этот последний сходится и при $x=0$ к значению $\frac{F(+0)+F(2\pi-0)}{2}$. Таким образом имеем:

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos mx+B_m\sin mx)\ (0<x<2\pi), \tag{2}$$

где положено:

$$A_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\,dx=-\frac{b_m}{m}, \tag{3}$$

$$B_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\cos mx}{m}\right]_{2\pi}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\,dx=-\frac{a_0}{m}+\frac{a_m}{m}, \tag{4}$$

так как

$$F(0)=0 \quad \text{и} \quad F(2\pi)=\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha=\pi a_0.$$

Подставляя значения A_m и B_m в разложение (2), найдем:

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{b_m}{m}\cos mx+\frac{a_m}{m}\sin mx-\frac{a_0}{m}\sin mx\right)(0<x<2\pi). \quad (5)$$

Полагая в разложении (5) $x=0$ и вспомнив, что сумма ряда (5) при $x=0$ есть $\frac{F(+0)+F(2\pi-0)}{2}$, получим:

$$\frac{F(+0)+F(2\pi-0)}{2}=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{b_m}{m}.$$

Так как $F(+0)=0$ и $F(2\pi-0)=\pi a_0$, то предыдущее равенство примет вид:

$$\frac{\pi a_0}{2}=\frac{A_0}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{m},$$

откуда

$$\frac{A_0}{2}=\frac{\pi a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{m}. \quad (6)$$

С другой стороны, мы знаем (§ 13), что

$$\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{a_0}{m}\sin mx=\frac{x-\pi}{2}\,a_0\ (0<x<2\pi).$$

Таким образом разложение (5) примет вид:

$$F(x)=\frac{a_0}{2}x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[a_m\sin mx-b_m(\cos mx-1)\right]\ (0<x<2\pi). \quad (5')$$

Ряд (5') получается путем почленного интегрирования ряда (1) в промежутке $(0, x)$, а $F(x)$ есть

$$\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha;$$

следовательно ряд Фурье функции $f(x)$ возможно интегрировать почленно в промежутке от 0 до x, $x<2\pi$.

Это предложение пока доказано при условии, что данная функция $f(x)$ не отрицательна. Легко освободиться от последнего ограничения. В самом деле функция $f(x)$ любого знака может быть представлена в виде разности двух неотрицательных функций:

$$f(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}-\frac{|f(x)|-f(x)}{2}=\varphi(x)-\psi(x).$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ есть разность двух рядов Фурье, соответствующих функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$; так как в силу только что доказанного можно почленно интегрировать ряды Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то значит возможно почленно интегрировать ряд Фурье функции $f(x)$.

Итак мы обнаружили возможность почленного интегрирования ряда Фурье в промежутке от 0 до x, $x<2\pi$.

Пусть теперь (x_1, x_2) есть любой промежуток, не содержащий никакой точки, конгруэнтной нулевой. В силу периодичности функции $f(x)$ достаточно предполагать:

$$0<x_1<x_2<2\pi.$$

Вычитая $F(x_1)$ из $F(x_2)$, мы увидим, что ряд Фурье функции $f(x)$ можно почленно интегрировать в промежутке (x_1, x_2), лишь бы только этот промежуток не содержал точек, конгруэнтных нулевой. Если бы в начале нашего доказательства мы сделали замену переменного $x=X-a$, то мы констатировали бы возможность почленного интегрирования ряда Фурье в промежутке (x_1, x_2), не содержащем точки, конгруэнтной с a, и так как a произвольно, то значит во всяком промежутке (x_1, x_2) длины меньше 2π.

Наконец, деля любой промежуток на части, длины которых меньше 2π, оправдаем общую теорему:

Ряд Фурье функции $f(x)$, будучи проинтегрирован почленно в каком-нибудь промежутке, дает интеграл от функции $f(x)$, распространенный на этот промежуток.

§ 17. Диференцирование рядов Фурье

Будем отправляться от ряда Фурье функции $F(x)$ периода 2π, всюду непрерывной, кроме быть может точек $x\equiv 0$, и будем предполагать ее производную $f(x)$ функцией ограниченной и кусочно-непрерывной в промежутке $(0, 2\pi)$.

В этих условиях можем написать:

$$\int_0^x f(\alpha)\,d\alpha=\int_0^x F'(\alpha)\,d\alpha=F(x)-F(+0)$$

или

$$F(x) = F(+0) + \int_0^x f(\alpha)\,d\alpha \quad (0 < x < 2\pi).$$

Образуем ряд Фурье функции $F(x)$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx), \tag{1}$$

который после почленного диференцирования примет вид:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\,mA_m \sin mx + mB_m \cos mx). \tag{2}$$

Воспользуемся следующими формулами:

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = -\frac{b_m}{m},$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\cos mx}{m}\right]_{2\pi}^{0} +$$

$$+\frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{F(+0) - F(2\pi - 0)}{\pi m} + \frac{a_m}{m}.$$

Заметив, что

$$F(2\pi - 0) = F(+0) + \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha = F(+0) + \pi a_0,$$

найдем:

$$\frac{F(+0) - F(2\pi - 0)}{\pi} = -a_0.$$

Таким образом A_m и B_m выразятся следующим образом:

$$A_m = -\frac{b_m}{m}, \tag{3}$$

$$B_m = -\frac{a_0}{m} + \frac{a_m}{m}, \tag{4}$$

где a и b коэфициенты Фурье функции $f(x)$.

В силу соотношений (3), (4) перепишем ряд (2) так:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-\,mA_m \sin mx + mB_m \cos mx) = \sum_{m=1}^{\infty} (b_m \sin mx + \tag{2'}$$

$$+ a_m \cos mx - a_0 \cos mx).$$

Полученный почленным диференцированием ряда Фурье (1) тригонометрический ряд (2') отличается от ряда Фурье функци $f(x)$ только отсутствием постоянного члена $\frac{a_0}{2}$ и присутствием членов вида $a_0 \cos mx$.

Рассматривая этот ряд (2') как разность двух рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

и

$$a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \cos mx,$$

мы знаем, что первый из этих рядов будет суммироваться процессом средне-арифметических к значению $f(x) - \frac{a_0}{2}$ во всякой точке x непрерывности функции $f(x)$; второй же ряд тем же процессом будет суммироваться к значению $-\frac{a_0}{2}$ всюду кроме $x = 0$ (см. § 7).

Следовательно полученный после диференцирования ряд (2) будет суммироваться процессом средне-арифметических к значению $f(x)$ во всякой точке непрерывности функции $f(x)$ $\Big($в точке прерывности 1 рода функции $f(x)$ к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\Big)$.

Итак, диференцируя почленно ряд Фурье функции $F(x)$ всюду непрерывной, кроме $x = 0$, имеющей производную $f(x)$, ограниченную и кусочно-непрерывную в промежутке $(0, 2\pi)$, мы получаем тригонометрический ряд, который будет суммироваться процессом средне-арифметических Фейера к производной $f(x)$ во всех ее точках непрерывности. Вообще говоря, ряд, полученный после диференцирования, не есть ряд Фурье, так как его коэфициент при $\cos mx$ равный $a_m - a_0$, если $a_0 \neq 0$, не стремится к нулю при $m \to \infty$.

Для того чтобы после почленного диференцирования ряда Фурье функции $F(x)$ получился ряд Фурье функции $f(x) = F'(x)$, необходимо и достаточно выполнение условия $a_0 = 0$; это последнее условие означает, что $F(+0) = F(2\pi - 0)$ и следовательно равносильно требованию, чтобы функция $F(x)$ периода 2π была всюду непрерывной.

Итак если мы имеем ряд Фурье периодической функции $F(x)$, всюду непрерывной и имеющей ограниченную и кусочно-непрерывную производную $f(x)$, то при почленном диференцировании такого ряда мы получим ряд Фурье функции $f(x)$, который следовательно будет суммироваться к $f(x)$ процессом средне-арифметических во всякой точке непрерывности $f(x)$[1], в частности он будет сходиться к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

в каждой точке, в окрестности которой $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле (§ 12).

В заключение отметим частный случай установленного предложения: **ряд Фурье периодической функции $F(x)$, всюду непрерывной и имеющей производную $f(x)$, удовлетворяющую условию Дирихле в промежутке $(0, 2\pi)$, при почленном диференцировании дает ряд Фурье функции $f(x)$, сходящийся в каждой точке x к значению**

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

§ 18. Порядок коэфициентов Фурье

Задача настоящего параграфа — исследовать зависимость, существующую между характером функции и порядком малости ее коэфициентов Фурье. Относительно функции $f(x)$ периода 2π мы заранее предположим, что она сама и ее последовательные производные, о которых в дальнейшем будет речь, могут допускать лишь точки прерывности 1 рода в конечном числе на промежутке $(-\pi, +\pi)$. Обозначим через

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots,\ x_{s_0}^{(0)}$$

точки прерывности функции $f(x)$, лежащие внутри промежутка $(-\pi, +\pi)$, через

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}, \ldots,\ x_{s_1}^{(1)}$$

точки прерывности ее производной $f'(x)$ внутри промежутка $(-\pi, +\pi)$ и вообще через

$$x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_{s_k}^{(k)}$$

точки прерывности производной $f^{(k)}(x)$.

[1] В точке прерывности 1 рода к значению $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

К точкам прерывности очевидно нужно присоединить один из концов промежутка $(-\pi, +\pi)$, например π, если предельные значения $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$, $f'(-\pi+0)$ и $f'(\pi-0), \ldots, f^{(k)}(-\pi+0)$ и $f^{(k)}(\pi-0)$ между собой не совпадают. Обозначим через $\delta_i^{(k)}$ скачок функции $f^{(k)}(x)$ в точке $x_i^{(k)}$, т. е. положим;

$$\delta_i^{(k)}=f^{(k)}(x_i^{(k)}+0)-f^{(k)}(x_i^{(k)}-0),$$

где

$$i=1,\ 2, \ldots, s_k;\quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Ради симметрии обозначений будем считать $x_{s_k+1}^{(k)}=\pi$, полагая при этом:

$$\delta_{s_k+1}^{(k)}=f^{(k)}(-\pi+0)-f^{(k)}(\pi-0),$$

где

$$k=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Разбив промежуток интегрирования $(-\pi, +\pi)$ на отдельные части:

$$(-\pi,\ x_1^{(0)}),\ (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}), \ldots, (x_{s_0}^{(0)},\ \pi),$$

в каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна, мы можем, написав равенство:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_1^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{x_1^{(0)}}^{x_2^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx+\cdots$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{x_{s_0}^{(0)}}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

выполнить интегрирование по частям, после чего имеем:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{x_1^{(0)}}+\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{x_1^{(0)}}^{x_2^{(0)}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_{x_{s_0}^{(0)}}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{x_{s_1}^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{x_1^{(0)}}^{x_2^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx-\cdots-\frac{1}{\pi n}\int_{x_{s_0}^{(0)}}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Выполняя указанные подстановки и соединяя все интегралы в один, получим:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{s_0+1} \delta_i^{(0)} \sin nx_i^{(0)} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx.$$

Положим:

$$B_0 = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_0+1} \delta_i^{(0)} \sin nx_i^{(0)} \quad (1)$$

и обозначим через a'_n, b'_n коэфициенты Фурье производной $f'(x)$.

Тогда формула для a_n примет вид:

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{b'_n}{n}. \quad (2)$$

Совершенно так же получим:

$$b_n = \frac{A_0}{n} + \frac{a'_n}{n}, \quad (3)$$

где положено:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_0+1} \delta_i^{(0)} \cos nx_i^{(0)}. \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) показывают, что **если периодическая функция $f(x)$ имеет точки прерывности, то ее коэфициенты Фурье при $n\to\infty$ будут бесконечно малыми вида $O\left(\frac{1}{n}\right)$**.[1]

Кроме того из тех же формул следует, что **если периодическая функция $f(x)$ всюду непрерывна, то ее коэфициенты Фурье при $n\to\infty$ будут бесконечно малыми порядка выше $\frac{1}{n}$, т. е. вида $o\left(\frac{1}{n}\right)$**.[2] Действительно в этом случае $A_0 = B_0 = 0$, и формулы (2), (3) примут вид:

$$a_n = -\frac{b'_n}{n}, \quad b_n = \frac{a'_n}{n},$$

где a'_n и b'_n как коэфициенты Фурье функции $f'(x)$, стремятся к нулю

[1] Мы полагаем: $r_n = O(\varphi(n))$, если отношение $\frac{r_n}{\varphi(n)}$ по абсолютной величине остается меньше некоторого постоянного положительного числа, каково бы ни было n.

[2] Мы полагаем: $r_n = o(\varphi(n))$, если отношение $\frac{r_n}{\varphi(n)}$ при $n\to\infty$ стремится к нулю.

при $n\to\infty$. В рассматриваемом случае ряд из коэфициентов Фурье функции $f(x)$ есть абсолютно сходящийся, так как ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b'_n|}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a'_n|}{n}$$

сходятся (см. § 1, примечание 2); следовательно данный ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Возвращаясь к формулам (2), (3), мы, пользуясь ими, представим коэфициенты Фурье a_n и b_n, которые сами суть бесконечно малые величины при $n\to\infty$, в виде сумм составляющих различных порядков малости по сравнению с $\frac{1}{n}$. С этой целью, применяя формулы (2), (3) к a'_n и b'_n, будем иметь:

$$a'_n = -\frac{B_1}{n} - \frac{b''_n}{n}, \quad b'_n = \frac{A_1}{n} + \frac{a''_n}{n}, \quad (5)$$

где положено:

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_1+1} \delta_i^{(1)} \cos nx_i^{(1)}, \quad (6)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_1+1} \delta_i^{(1)} \sin nx_i^{(1)}, \quad (7)$$

а через a''_n, b''_n обозначены коэфициенты Фурье второй производной $f''(x)$.

Внося выражения (5) для a'_n и b'_n в формулы (2), (3), представим a_n и b_n в виде:

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} - \frac{a''_n}{n^2}; \quad (8)$$

$$b_n = \frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} - \frac{b''_n}{n^2}. \quad (9)$$

Продолжая эти преобразования, окончательно получим:

$$a_n = -\frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{A_3}{n^4} - \ldots + \frac{r'_k}{n^k}, \quad (10)$$

$$b_n = \frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} - \frac{A_2}{n^3} - \frac{B_3}{n^4} + \ldots + \frac{r''_k}{n^k}, \quad (11)$$

где положено:

$$A_j = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos nx_i^{(j)}; \quad (12)$$

$$B_j = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin nx_i^{(j)} \quad (j = 0, 1, \ldots), \quad (13)$$

а через r'_k, r''_k обозначены с точностью до знака коэфициенты Фурье функции $\overset{(k)}{f}(x)$, величины бесконечно малые при $n \to \infty$.

Из формул (12), (13) мы усматриваем, что A_j и B_j зависят от скачков производной $\overset{(j)}{f}(x)$ и обращаются в нуль, если эта производная всюду непрерывна.

Таким образом, **если периодическая непрерывная функция $f(x)$ имеет всюду непрерывные производные до $(k-1)$ порядка включительно, то ее коэфициенты Фурье a_n и b_n будут при $n \to \infty$ порядка выше чем $\frac{1}{n^k}$.**

Действительно из формул (10), (11) в этом случае вытекает:

$$a_n = \frac{r'_k}{n^k}, \quad b_n = \frac{r''_k}{n^k},$$

где r'_k и r''_k стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Более того, в рассматриваемом случае можно утверждать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}[|a_n| + |b_n|]$$

сходится, потому что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r'_k|}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|r''_k|}{n}$$

суть сходящиеся (см. § 1, примечание 2).

В частности **если периодическая непрерывная функция $f(x)$ допускает всюду непрерывные производные любого поряка, то ее коэфициенты Фурье a_n и b_n удовлетворяют условию:**

$$n^k a_n \to 0, \quad n^k b_n \to 0$$

при $n \to \infty$, каково бы ни было k.[1]

Формулы (10), (11) остаются в силе для рядов Фурье в случае промежутка $(-l, +l)$. В этом случае нужно положить:

$$A_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \cos \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l}; \tag{12'}$$

$$B_j = \left(\frac{l}{\pi}\right)^j \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{s_j+1} \delta_i^{(j)} \sin \frac{n\pi x_i^{(j)}}{l}, \tag{13'}$$

[1] Любопытно отметить, что это условие является не только необходимым, но и достаточным, для того чтобы периодическая функция $f(x)$ была сама непрерывна вместе со всеми ее производными.

где $x_{s_j+1}^{(j)} = l$, $\delta_{s_j+1}^{(j)} = f^{(j)}(-l+0) - f^{(j)}(l-0)$, а r'_k и r''_k отличаются от прежних лишь множителем $\left(\frac{l}{\pi}\right)^k$, и следовательно попрежнему суть величины бесконечно-малые при $n \to \infty$.

В приложениях теории рядов Фурье весьма часто приходится разлагать функцию $f(x)$, заданную в промежутке $(0, l)$, в ряд по косинусам или синусам. В этом случае, как известно (§ 15), коэфициенты рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{14}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15}$$

определяются по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \tag{16}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Оба эти случая приводятся к предыдущему, продолжая функцию $f(x)$, в соседний промежуток $-l < x < 0$ четным или нечетным образом. В первом случае мы должны положить:

$$f(-x) = f(x), \tag{18}$$

а во втором

$$f(-x) = -f(x). \tag{19}$$

Рассмотрим, например, ряд (14). Допустим, что функция $\overset{(j)}{f}(x)$ имеет внутри промежутка $(0, l)$ точки прерывности:

$$\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_{\sigma_j}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

При четном продолжении функции $f(x)$ ее производные четного порядка продолжаются четным образом, а производные нечетного порядка — нечетным образом, что непосредственно доказывается диференцированием тождества (18) относительно x. Следовательно продолженная функция и ее производные четного порядка $(j = 0, 2, \ldots)$ будут иметь точками прерывности внутри промежутка $(-l, l)$ точки вида

$$\pm \xi_i^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma_j, \ j = 0, 2, \ldots);$$

что же касается точек 0 и l, то они не будут точками прерывности, потому что при четном продолжении:

$$f^{(j)}(-0)=f^{(j)}(+0);\quad f^{(j)}(-l+0)=f^{(j)}(l-0)\qquad (j=0,\ 1,\ldots).$$

Для производных же нечетного порядка, кроме точек

$$\pm\xi_i^{(j)}\,(j=1,\ 3,\ldots;\ i=1,\ 2,\ldots\sigma_j),$$

точками прерывности будут еще точки

$$\xi_0^{(j)}=0\quad\text{и}\quad \xi_{\sigma_j+1}^{(j)}=l$$

со скачками в них:

$$\delta_0^{(j)}=f^{(j)}(+0)-f^{(j)}(-0)=2f^{(j)}(+0);$$
$$\delta_{\sigma_j+1}^{(j)}=f^{(j)}(l+0)-f^{(j)}(l-0)=-2f^{(j)}(l-0).$$

В симметричных точках прерывности $(\pm\xi_i^{(j)})$ скачки функции $f^{(j)}(x)$, при j, равном нулю или четному числу, будут противоположных знаков; при j равном нечетному числу эти скачки будут одинаковы.

После всего сказанного мы видим, что формула (12′) в рассматриваемом случае при j нечетном дает:

$$A_j=\left(\frac{l}{\pi}\right)^j\left[\frac{1}{\pi}\left(\delta_0^{(j)}+\delta_{\sigma_j+1}\cos n\pi\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\sigma_j}\delta_i^{(j)}\cos\frac{n\pi\xi_i^{(j)}}{l}\right],\tag{20}$$

а при j четном $A_j=0$.

Что же касается формулы (13′), то, наоборот, при j четном получаем:

$$B_j=\left(\frac{l}{\pi}\right)^j\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\sigma_j+1}\delta_i^{(j)}\sin\frac{n\pi\xi_i^{(j)}}{l},\tag{21}$$

а при j нечетном $B_j=0$. Очевидно, что формула (11) в этом случае дает: $b_n=0$.

Те же формулы (20), (21) годятся для вычисления b_n по формуле (11) в случае нечетного продолжения функции $f(x)$, причем в этом случае формула (20) справедлива при j четном, а формула (21) при j нечетном.

§ 19. Улучшение сходимости рядов Фурье

В предыдущем параграфе мы видели, что присутствие в выражении коэфициентов Фурье членов вида $O\left(\frac{1}{n}\right)$, благодаря которым ряд Фурье медленно сходится, обусловливается наличием точек прерывности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ может иметь внутри промежутка $(-\pi,+\pi)$ производные сколь угодно высокого порядка, но достаточно одной точки прерывности в конце промежутка, т. е. иначе говоря, несовпадения предельных значений $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$, чтобы ряд Фурье был практически негодным для вычисления.

Кроме того в приложениях очень часто важно знать не только самую функцию, а также ее производные первого и второго порядка. Между тем очевидно, что при каждом диференцировании ряда Фурье порядок его коэфициентов понижается на единицу, как это следует из равенств:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(-a_n\cos nx-b_n\sin nx),\ldots$$

и таким образом сходимость ряда Фурье при его диференцировании ухудшается; например, если коэфициенты Фурье функции $f(x)$ суть вида $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, что будет в том случае, если эта периодическая функция всюду непрерывна, а $f'(x)$ может иметь точки прерывности, то ряд, полученный почленным диференцированием для вычисления $f'(x)$, будет иметь коэфициенты вида $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а ряд для $f''(x)$ перестанет быть рядом Фурье, так как его коэфициенты не будут даже стремиться к нулю. Отсюда возникает задача улучшения сходимости ряда Фурье, заключающаяся в следующем: выделить из суммы ряда Фурье подходящим образом подобранную функцию так, чтобы ряд, получающийся в остатке, имел коэфициенты настолько высокого порядка малости, что ухудшение сходимости при его диференцировании не мешало бы вычислять производные. Так например, если нам нужно вычислять почленным диференцированием производные до второго порядка, то коэфициенты ряда — остатка должны быть вида $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, так как тогда для второй производной получим ряд с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и ее вычисление с этим абсолютно и равномерно сходящимся рядом будет удобно.

Переходя к описанию метода улучшения сходимости рядов Фурье, мы прежде всего заметим, что можно всегда подобрать кусочно-линейную периодическую функцию $F_0(x)$, т. е. функцию с графиком, состоящим из прямолинейных отрезков, так чтобы она имела те же точки прерывности и те же скачки, что и $f(x)$.

Тогда разность $f_1(x)=f(x)-F_0(x)$ не будет иметь скачков, и ряд Фурье функции $f_1(x)$ будет следовательно обладать коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Исправив данную функцию $f(x)$ с помощью выделения из нее весьма простой и теперь известной функции $F_0(x)$, мы далее тем же методом исправляем $f'(x)$, полагая:

$$f'(x)=f_1'(x)+F_0'(x)=f_2(x)+F_1(x),$$

где $F_1(x)$ есть кусочно-линейная периодическая функция с теми же скачками, что у $f'(x)$, и таким образом ряд Фурье функции $f_2(x)$ будет иметь коэфициенты вида $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Продолжая этот процесс далее, положим:

$$f''(x)=f_2'(x)+F_1'(x)=f_3(x)+F_2(x).$$

Допустим, что процесс исправления производных функций мы остановили на $f''(x)$.

Тогда $f_2(x)$ есть функция всюду непрерывная по самому построению, и мы имеем:

$$f_2(x)=\int f_3(x)\,dx+\int[F_2(x)-F_1'(x)]\,dx+C.$$

Коэфициенты ряда Фурье функции

$$\int f_3(x)\,dx$$

будут вида $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, так как при интегрировании ряда Фурье функции $f_3(x)$ с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ мы получим ряд с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Второе слагаемое последнего равенства

$$\int[F_2(x)-F_1'(x)]\,dx+C,$$

которое получается путем интегрирования кусочно-линейной функции, есть очевидно функция, график которой состоит из кусков парабол второй степени.

Вспомнив, что $f'(x)=f_2(x)+F_1(x)$, мы представляем $f'(x)$ в виде суммы трех слагаемых: ряда Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, функции, состоящей из кусков парабол второй степени, и наконец функции $F_1(x)$, состоящей из кусков прямых.

Далее

$$f_1(x)=\int f_2(x)\,dx+\int[F_1(x)-F_0'(x)]\,dx+C$$

есть сумма трех слагаемых [если вспомним состав $f_2(x)$]:

1) ряда Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$;

2) функции, график которой состоит из кусков парабол третьей степени;

3) функции, график которой состоит из кусков парабол второй степени.

Замечая же наконец, что $f(x)=f_1(x)+F_0(x)$, мы представляем данную функцию $f(x)$ в виде суммы четырех слагаемых:

1) ряда Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$,

2) функции с графиком, состоящим из кусков парабол третьей степени;

3) функции с графиком, состоящим из кусков парабол второй степени;

4) функции $F_0(x)$, график которой состоит из прямолинейных отрезков.

Итак мы составили три простых функции, графики которых состоят соответственно из кусков прямых, парабол 2-й степени и парабол 3-й степени, такие, что вычитая их сумму из данной функции $f(x)$, мы получаем в остатке ряд Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Мы для определенности оборвали процесс исправления производных функций на $f''(x)$. Очевидно, продолжая этот процесс исправления последовательных производных, мы сможем получить в остатке ряд Фурье с коэфициентами сколь угодно высокого порядка малости. В частности может случиться, что ряд, получаемый в остатке, есть тождественный нуль, и тогда описанным процессом мы представим сумму $f(x)$ данного ряда в виде суммы простых слагаемых, из которых каждое имеет график, состоящий соответственно из кусков прямых, парабол 2-й степени, парабол 3-й степени и наконец парабол k-й степени.

В приложениях обычно функция $f(x)$ неизвестна, а дан ее ряд Фурье, коэфициенты которого имеют вид, соответствующий формулам (10), (11) из § 18.

По самому виду коэфициентов Фурье мы определяем точки прерывности и величины скачков функции $f(x)$ и ее производных, и затем указанным здесь методом улучшаем сходимость ряда Фурье, а в некоторых частных случаях находим его сумму.

Описанный в этом параграфе способ, а также приводимые ниже примеры принадлежат акад. А. Н. Крылову.

§ 20. Примеры

1°. Улучшить сходимость ряда

$$f(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

В данном случае

$$b_n=\frac{1}{n}.$$

Мы воспользуемся формулой (11) из § 18, откуда усматриваем, что $A_0=1$.

Из формулы (20) того же параграфа, при $l=\pi$, $j=0$, находим:

$$1=\frac{1}{\pi}(\delta_0^{(0)}+\delta_{\sigma_0+1}^{(0)}\cos n\pi)+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\sigma_0}\delta_i^{(0)}\cos n\xi_i^{(0)}.$$

Это равенство будет удовлетворено, при любом n, если положим:

$$\sigma_0=0,\ \delta_1^{(0)}=0,\ \delta_0^{(0)}=\pi.$$

Таким образом функция $f(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ имеет только одну точку прерывности 0 со скачком $\delta_0^{(0)}=\pi$. Так как $\delta_0^{(0)}=2f(+0)$, то $f(+0)=\frac{\pi}{2}$. Заметив, что $f(\pi)=0$, мы исправляем функцию $f(x)$ с помощью $F_0(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x\leqslant\pi)$, полагая: $f_1(x)=f(x)-F_0(x)$.

Разлагаем в ряд Фурье по синусам функцию $f_1(x)$.

Так как

$$F_0(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}+\ldots$$

(§ 13), то $f_1(x)\equiv 0$. Следовательно в данном случае

$$f(x)\equiv F_0(x).$$

Итак мы обнаружили, что сумма данного ряда при

$$0<x\leqslant\pi$$

есть

$$\frac{\pi-x}{2}.$$

2°. Улучшить сходимость ряда

$$f(x)=\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\ldots$$

Здесь $b_n=\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$; из формулы (11) § 18 мы усматриваем, что

$$B_1=-\sin\frac{n\pi}{2}.$$

По формуле (21) того же параграфа, полагая в ней $j=1$, получаем:

$$-\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{l}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\delta_1^{(1)}\sin\frac{n\pi\xi_1^{(1)}}{l}+\delta_2^{(1)}\sin\frac{n\pi\xi_2^{(1)}}{l}+\ldots\right].$$

Это равенство будет удовлетворено при всяком n, если примем:

$$-1=\frac{l}{\pi}\frac{2}{\pi}\delta_1^{(1)},\ \frac{n\pi}{2}=\frac{n\pi\xi_1^{(1)}}{l},\ \delta_2^{(1)}=\delta_3^{(1)}=\ldots=0,$$

т. е.

$$\delta_1^{(1)}=-\frac{\pi^2}{2l},\ \xi_1^{(1)}=\frac{l}{2}.$$

Итак производная $f'(x)$ в промежутке $(0, l)$ имеет одну точку прерывности $\frac{l}{2}$ со скачком $-\frac{\pi^2}{2l}$.

Составляем производную:[1]

$$f'(x)=\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

По теореме § 7 имеем:

$$\frac{1}{2}\left[f'\left(\frac{l}{2}+0\right)+f'\left(\frac{l}{2}-0\right)\right]=\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n}=0.$$

С другой стороны, мы нашли, что:

$$f'\left(\frac{l}{2}+0\right)-f'\left(\frac{l}{2}-0\right)=-\frac{\pi^2}{2l}.$$

[1] Хотя ряд для $f'(x)$ не будет равномерно сходящимся, тем не менее почленное диференцирование законно (см. § 17).

Из двух последних равенств находим:

$$f'\left(\frac{l}{2}+0\right)=-\frac{\pi^2}{4l},\quad f'\left(\frac{l}{2}-0\right)=\frac{\pi^2}{4l}.$$

Следовательно за $F_1(x)$, исправляющую $f'(x)$, можно взять функции:

$$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{4l}, & \text{если } 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ -\dfrac{\pi^2}{4l}, & \text{если } \dfrac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

Разлагая $F_1(x)$ в промежутке $(0, l)$ в ряд Фурье по косинусам, получим:

$$F_1(x)=\frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Таким образом $f_2(x)=f'(x)-F_1(x)\equiv 0$, т. е. $f'(x)=F_1(x)$, откуда

$$f(x)=\frac{\pi^2}{4l}x$$

при

$$0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2},$$

так как при $x=0$ функция $f(x)$ обращается в нуль.

Для промежутка $\left(\frac{l}{2}, l\right)$ получим:

$$f(x)=-\frac{\pi^2}{4l}x+C,$$

где C определяется из условия $f(l)=0$, которое нам даст:

$$C=\frac{\pi^2}{4}.$$

Таким образом

$$f(x)=-\frac{\pi^2}{4l}x+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4l}(l-x)$$

при $\frac{l}{2}<x\leqslant l.$

Итак мы нашли окончательно функцию $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{4l}x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{\pi^2}{4l}(l-x), & \text{если } \dfrac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

(Ср. § 15, пример 2).

3°. Улучшить сходимость ряда

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Для того чтобы представить b_n в виде формулы (11) § 18, разложим дробь $\frac{n}{n^2-1}$ по степеням $\frac{1}{n}$, доведя разложение до членов порядка $\frac{1}{n^4}$. Мы имеем:

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right]$$

и следовательно данный ряд можно написать так:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}=S_1+S_2+R,$$

где положено:

$$S_1=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad S_3=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$R=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Сначала улучшаем сходимость ряда S_1.

В этом ряде

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n},$$

следовательно по формуле (11) § 18 находим:

$$A_0=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Пользуясь формулой (20) того же параграфа, в которой положено $j=0$, получим:

$$-\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}[\delta_0^{(0)}+\delta_{\sigma_0+1}^{(0)}\cos n\pi]+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\sigma_0}\delta_i^{(0)}\cos\frac{n\pi\xi_i^{(0)}}{l}.$$

Этому равенству мы удовлетворим при всяком n, если примем:

$$\sigma_0 = 1,\ \delta_0^{(0)} = 0,\ \delta_2^{(0)} = 0,\ \delta_1^{(0)} \cos\frac{n\pi\xi_1^{(0)}}{l} = -\cos\frac{n\pi}{2},$$

откуда:

$$\delta_1^{(0)} = -1,\ \xi_1^{(0)} = \frac{l}{2}.$$

Итак функция $S_1(x)$ в промежутке $(0, l)$ имеет одну точку прерывности $\xi_1^{(0)} = \frac{l}{2}$ со скачком $\delta_1^{(0)} = -1$. Так как

$$\frac{1}{2}\left[S_1\left(\frac{l}{2}+0\right)+S_1\left(\frac{l}{2}-0\right)\right] = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 0$$

(теорема § 7) и

$$S_1\left(\frac{l}{2}+0\right)-S_1\left(\frac{l}{2}-0\right) = -1,$$

то

$$S_1\left(\frac{l}{2}+0\right) = -\frac{1}{2},\quad S_1\left(\frac{l}{2}-0\right) = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, мы имеем:

$$S_1(0) = S_1(l) = 0.$$

Таким образом за $F_0(x)$, исправляющую $S_1(x)$, следует взять функцию:

$$F_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{l}, & \text{при } 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{1}{l}(x-l), & \text{при } \dfrac{l}{2} < x \leqslant l. \end{cases}$$

Разлагая $F_0(x)$ в промежутке $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам, получим:

$$F_0(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

т. е. мы найдем, что $S_1(x) = F_0(x)$.

Переходя к улучшению сходимости ряда S_3, заметим, что S_3 представляет функцию непрерывную вместе со своей первой производной. Диференцируя S_3 дважды, получим:

$$S_3''(x) = \frac{2\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Сравнивая $S_3(x)$ с $F_0(x)$ видим, что $S_3(x)$ определяется равенством

$$S_3''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2}F_0(x)$$

или

$$S_3''(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{l^3}x & \text{для } 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2} \\ -\dfrac{\pi^2}{l^3}(x-l), & \text{для } \dfrac{l}{2} < x \leqslant l. \end{cases}$$

Интегрируя $S_3''(x)$ дважды, находим:

$$S_3(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{6l^3}x^3 + C_1x + C_2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ -\dfrac{\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + C_3(x-l) + C_4 & \text{для } \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 имеем условия $S_3(0) = 0$, $S_3(l) = 0$, $S_3(x)$ и $S_3'(x)$ непрерывны при $x = \frac{l}{2}$, т. е. $C_2 = 0$, $C_4 = 0$:

$$\left(-\frac{\pi^2}{6l^3}x^3 + C_1x + C_2\right)_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + C_3(x-l) + C_4\right)_{x=\frac{l}{2}}$$

$$\left(-\frac{\pi^2}{6l^3}x^3 + C_1x + C_2\right)'_{x=\frac{l}{2}} = \left(-\frac{\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + C_3(x-l) + C_4\right)'_{x=\frac{l}{2}}$$

откуда получим:

$$C_1 = \frac{\pi^2}{24l},\quad C_3 = \frac{\pi^2}{24l}.$$

Следовательно функция $S_3(x)$ такова:

$$S_3(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{6l^3}x^3 + \dfrac{\pi^2}{24l}x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ -\dfrac{\pi^2}{6l^3}(x-l)^3 + \dfrac{\pi^2}{24l}(x-l) & \text{для } \dfrac{l}{2} < x \leqslant l. \end{cases}$$

Итак окончательно мы нашли:

$$f(x) = S_1(x) + S_3(x) + R(x),$$

где $S_1(x)$ и $S_3(x)$ суть найденные выше функции, а $R(x)$ представляется рядом Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$.

В настоящем примере мы улучшили сходимость данного ряда, получив в остатке ряд Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$. Более того, мы можем просуммировать данный ряд, поступая таким образом. Заметим, что

$$S_3(x)+R(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

и следовательно:

$$f(x)=S_1(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin\frac{n\pi x}{l}\ [1]$$

Так как $S_1(x)$ кусочно-линейная функция, то двукратным диференцированием последней формулы получим:

$$f''(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi x}{l}=-\frac{\pi^2}{l^2}f(x).$$

Из составленного диференциального уравнения можно определить $f(x)$ путем его интегрирования:

$$f(x)=A\cos\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{\pi x}{l},$$

где A и B — постоянные, которые могут иметь разные значения для различных промежутков, потому что $f(x)$ при изменении x от 0 до l имеет точку прерывности. Значения A и B должны быть определены по значениям функции для начала и конца каждого промежутка непрерывности. Мы видели, что $f(x)$ в промежутке $(0, l)$ имеет одну точку прерывности при $x=\frac{l}{2}$. В промежутке $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ мы получим такие граничные условия:

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{l}{2}-0\right)=\frac{1}{2}.$$

Последнее условие получается из равенств:

$$f\left(\frac{l}{2}+0\right)-f\left(\frac{l}{2}-0\right)=-1,$$

[так как скачок функции $f(x)$ при $x=\frac{l}{2}$ совпадает со скачком функции $S_1(x)$]

$$f\left(\frac{l}{2}+0\right)+f\left(\frac{l}{2}-0\right)=0$$

[1] Эту формулу мы получили бы путем выделения лишь $S_1(x)$, написав остаток в виде ряда Фурье с коэфициентами вида $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

(это следует по теореме § 7), откуда

$$f\left(\frac{l}{2}-0\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{l}{2}+0\right)=-\frac{1}{2}.$$

Подставляя $x=0$ и $x=\frac{l}{2}$ в формулу для $f(x)$, получим: $0=A$, $\frac{1}{2}=B$, и следовательно будет:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\quad\text{при}\quad 0\leqslant x<\frac{l}{2}.$$

Во втором промежутке непрерывности функции $f(x)$ от $\frac{l}{2}$ до l имеем граничные условия:

$$f\left(\frac{l}{2}+0\right)=\frac{1}{2},\ f(l)=0.$$

Подставляя $x=\frac{l}{2}$ и $x=l$ в формулу для $f(x)$, получим:

$$-\frac{l}{2}=B,\ 0=-A,$$

и следовательно будет:

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\quad\text{при}\quad\frac{l}{2}<x\leqslant l.$$

Итак функция $f(x)$ определена в промежутке $(0, l)$, а значит, она определена и повсюду, поскольку она является нечетной функцией периода $2l$ (ср. § 15, пример 3°).

§ 21. Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$, определенная для всех значений x, удовлетворяет условию Дирихле на всяком конечном промежутке и сверх того абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е. интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

имеет конечное значение.

Как известно, в силу теоремы Дирихле (§ 11), во всякой точке x, внутренней к промежутку $(-l, l)$, мы имеем:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где положено:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,\quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt.$$

Внося выражения a_n, b_n в написанную выше формулу, получим:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{l}\,dt. \tag{1}$$

Это равенство (1) имеет место при всяком l.

Спросим себя, как оно преобразуется в пределе при $l\to\infty$.

Когда $l\to\infty$, то первое слагаемое правой части очевидно стремится к нулю, потому что

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \frac{I}{2l}.$$

Что касается остающегося ряда, то вводя новое переменное α, которое принимает равностоящие значения

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l},\quad \alpha_2 = 2\frac{\pi}{l},\ \ldots,\ \alpha_n = n\frac{\pi}{l},\ \ldots,$$

получая каждый раз приращение $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$, мы его перепишем так:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{(\alpha)}\Delta\alpha\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt.$$

При больших значениях l интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt,$$

и вследствие этого можно предполагать, что когда $l\to\infty$, вся сумма будет стремиться к пределу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt.$$

Таким образом равенство (1) в пределе при $l\to\infty$ примет вид:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt. \tag{I}$$

Эта формула, которую мы получили из ряда Фурье путем перехода к пределу при $l\to\infty$, носит название формулы Фурье. Приведенный вывод формулы (I) не является строгим, справедливость этой формулы должна быть обоснована, что мы и сделаем. Приступая к строгому доказательству теоремы, выражаемой формулой Фурье, мы сперва точно формулируем это предложение: **если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дирихле во всяком конечном промежутке, будучи абсолютно интегрируемой в промежутке $(-\infty, \infty)$, то имеет место формула (I).**

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

Для вывода формулы (I) нам достаточно показать, что

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{l} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Обозначая через $I(l, x)$ интеграл, стоящий в левой части под знаком предела, мы можем переставить в нем порядок интегрирования по t и α и записать его в виде:

$$I(l, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_{0}^{l}\cos\alpha(x-t)\,d\alpha. \tag{2}$$

Возможность такой перестановки порядка интегрирования вытекает из того обстоятельства, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt$$

сходится равномерно относительно α, каково бы ни было α.

В самом деле интегралы

$$\int_{l}^{l'} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt,\quad \int_{-l'}^{-l} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt\quad (l<l') \tag{3}$$

по абсолютной величине не превосходят

$$\int_{l}^{l'}|f(t)|\,dt.$$

Вследствие абсолютной интегрируемости функции $f(x)$, при данном сколь угодно малом ε, $\varepsilon > 0$, можно найти такое число l_0, не зависящее от α, что при всяком значении l, $l > l_0$, имеет место неравенство:

$$\int_l^{l'} |f(t)|\, dt < \varepsilon \quad (l' > l),$$

и следовательно интегралы (3) будут тоже меньше, чем ε по абсолютному значению. Как известно, в таком случае интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x-t)\, dt$$

можно интегрировать по параметру α под знаком интеграла, что и дает нам формулу (2).

Вычисляя внутренний интеграл формулы (2) непосредственно, мы получим:

$$I(l,\ x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t}\, dt, \tag{2'}$$

и наша задача приводится к тому, чтобы установить предельное равенство:

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t}\, dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{4}$$

Разбивая промежуток интегрирования $(-\infty,\ \infty)$ на две части $(-\infty,\ x)$ и $(x,\ \infty)$, мы представим $I(l,\ x)$ так:

$$I(l,\ x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin l(x-t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} + \frac{1}{\pi} \int_{x}^{\infty}.$$

Вводя вместо $x-t$ переменное z в первом интеграле правой части и $-z$ во втором, получим:

$$I(l,\ x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-z) \frac{\sin lz}{z}\, dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+z) \frac{\sin lz}{z}\, dz. \tag{5}$$

Применяя к этим интегралам лемму II (§ 10, примечание), мы заключаем:

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-z) \frac{\sin lz}{z}\, dz = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f(x-0) = \frac{1}{2} f(x-0).$$

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+z) \frac{\sin lz}{z}\, dz = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f(x+0) = \frac{1}{2} f(x+0)$$

и значит из формулы (5) следует:

$$\lim_{l \to \infty} I(l,\ x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

что и нужно было доказать.

§ 22. Частные случаи интеграла Фурье

Формула Фурье (I) может быть упрощена, если функция $f(x)$ четная или нечетная. Действительно, заменяя $\cos \alpha (x-t)$ через $\cos \alpha x \cos \alpha t + \sin \alpha x \sin \alpha t$, представим формулу (I) в виде:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \cos \alpha x\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t \sin \alpha x\, dt.$$

Предположим, что $f(x)$ функция четная. В этом случае $f(t) \cos \alpha$ как функция переменного t есть четная, а функция $f(t) \sin \alpha t$ — нечетная, и следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt = 0.$$

Таким образом находим:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha x\, d\alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt. \tag{II}$$

Предположим теперь, что $f(x)$ функция нечетная.

В этом случае $f(t) \cos \alpha t$ как функция переменного t есть нечетная, а функция $f(t) \sin \alpha t$ четная, и следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{III}$$

Допустим теперь, что функция $f(x)$ определена только в промежутке $(0, \infty)$, абсолютно интегрируема на этом промежутке и удовлетворяет условию Дирихле во всяком промежутке $(0, l)$, каково бы ни было l. Мы можем продолжить эту функцию в соседний промежуток $(-\infty, 0)$ четным или нечетным образом и получим таким образом соответственно две формулы (II) и (III). При $x>0$ эти формулы дают изображение одной и той же функции $f(x)$ с помощью двух разных аналитических аппаратов. В частности, если $f(x)$ функция непрерывная в промежутке $(0, \infty)$, то формулы (II) и (III) при $x>0$ примут вид:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt, \tag{II'}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{III'}$$

Интересно отметить, что первая из этих формул верна и при $x=0$, так как при четном продолжении функции $f(x)$ сохраняется ее непрерывность при $x=0$, этого не будет при нечетном продолжении функции $f(x)$, если $f(0)\neq 0$ и вторая формула (III') неверна при $x=0$, так как в правой части при $x=0$ мы получим 0, в левой же $f(0)$.

§ 23. Приложение формул Фурье к интегральным уравнениям первого рода

Интегральным уравнением первого рода называется уравнение типа:

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y)\,dy=f(x),$$

где ядро $k(x, y)$ и функция $f(x)$ д ны, а искомой является функция $\varphi(y)$. Решение такого уравнения не всегда возможно: $f(x)$ не может быть вполне произвольной функцией, когда ядро $k(x, y)$ дано. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть простейший случай, когда ядро есть полином относительно x; в этих условиях вторая часть $f(x)$ необходимо должна быть тоже полиномом. Общие теоремы были даны

Пикаром. Мы изучим здесь как приложение формул Фурье следующее уравнение:

$$\int_0^\infty \cos xy\,\varphi(y)\,dy=f(x). \tag{1}$$

В этом случае ядро уравнения $k(x, y)=\cos xy$. Предполагая $x>0$, помножим обе части (1) на $\cos\alpha x$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞. Тогда мы получим:

$$\int_0^\infty \cos\alpha x\,dx\int_0^\infty \varphi(y)\cos xy\,dy=\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx.$$

Прилагая формулу (II') к первой части этого равенства, найдем:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx,$$

откуда имеем решение $\varphi(y)$, заменяя α на y:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xy\,f(x)\,dx=\varphi(y). \tag{2}$$

Коши установил эти формулы (1) и (2) в несколько ином более симметричном виде, заменяя f на $f\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Тогда решение $\varphi(y)$ уравнения:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xy\,\varphi(y)\,dy \tag{1'}$$

дается посредством формулы:

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xy\,f(y)\,dy. \tag{2'}$$

Совершенно так же можно решить уравнение

$$\int_0^\infty \sin xy\,\varphi(y)\,dy=f(x).$$

Умножая обе части на $\sin\alpha x$ и интегрируя по x от 0 до ∞, получим:

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\,dx\int_0^\infty \sin xy\,\varphi(y)\,dy=\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx.$$

Формула (III′) дает:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx,$$

откуда находим решение уравнения (3):

$$\varphi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin xy\,dx. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) можно написать в симметричном виде, если заменим f через $f\sqrt{\frac{\pi}{2}}$:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xy\,\varphi(x)\,dy \tag{3′}$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xy\,f(y)\,dy. \tag{4′}$$

Рассмотрим несколько примеров:

1°. Положим $\varphi(y)=e^{-y}$. Тогда имеем

$$\int_0^\infty e^{-y}\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}. \tag{1″}$$

Обращение формулы (1) нам дает:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx=e^{-y}. \tag{2″}$$

2°. Так же легко проверяемая формула

$$\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy=\frac{x}{1+x^2} \tag{3″}$$

приводит к уравнению:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx=e^{-y}; \tag{4″}$$

формулы (2″) и (4″) могут впрочем быть установлены из элементарных соображений.

3°. Положим:

$$\varphi(y)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<y<1\\ 0 & \text{при } y>1.\end{cases}$$

Тогда имеем:

$$\int_0^\infty \cos xy\,\varphi(y)\,dy=\int_0^1 \cos xy\,dy=\frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда заключаем на основании (2):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cos xy\,dx=\begin{cases}1 & \text{при } 0<y<1\\ 0 & \text{при } y>1.\end{cases}$$

При $y=1$ получим очевидно средне-арифметическое предельных значений функции $\varphi(y)$, т. е. $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$; таким образом имеем:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Примечание. Формула Фурье (I) может быть записана в виде:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\alpha(x-t)i}\,dt.$$

Действительно эта формула вытекает из (I), если заметим, что

$$e^{\alpha(x-t)i}=\cos\alpha(x-t)+i\sin\alpha(x-t),$$

причем $\cos\alpha(x-t)$ четная функция от α, а $\sin\alpha(x-t)$ нечетная. Таким образом получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{\alpha(x-t)i}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[\cos\alpha(x-t)+i\sin\alpha(x-t)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(x-t)\,dt.$$

§ 24. Интеграл Пуассона

Пусть $f(\theta)$ функция периода 2π, ограниченная и кусочно-непрерывная в промежутке $(-\pi, \pi)$; обозначим через a_n и b_n ее коэфициенты Фурье и рассмотрим ряд

$$\frac{a_0}{2} + r(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + \cdots + r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) + \cdots \tag{1}$$

При каждом значении r, $0 \leqslant r < 1$, и всяком θ этот ряд абсолютно сходится. Действительно, так как $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, когда $n \to \infty$ (§ 1), то существует положительное число H такое, что при всяком n имеем: $|a_n| < H$, $|b_n| < H$. Поэтому, каково бы ни было θ, абсолютные величины членов ряда (1) будут меньше соответствующих членов ряда

$$2H(1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots).$$

Таким образом мы показали абсолютную сходимость ряда (1). Кроме того мы видим отсюда, что ряд (1) сходится равномерно относительно любого θ и r, $0 \leqslant r \leqslant r_1 < 1$. Поэтому ряд (1) изображает функцию $f(\theta, r)$, непрерывную осносительно совокупности двух переменных θ и r, $0 \leqslant r < 1$:

$$f(\theta, r) = \frac{a_0}{2} + r(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + \cdots + r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) + \cdots \tag{2}$$

Заметим теперь, что при $r = 1$ ряд (1) обращается в ряд Фурье функции $f(\theta)$; поэтому в тех точках θ, в которых ряд Фурье функции $f(\theta)$ сходится, сходится также и ряд (1) при $r = 1$, и его сумма, в силу теоремы Абеля, совпадает с $\lim\limits_{r\to 1} f(\theta, r)$.

В точках θ, в которых ряд Фурье функции $f(\theta)$ сходится и имеет суммой $f(\theta)$, получаем;

$$f(\theta) = f(\theta, 1) = \lim_{r\to 1} f(\theta, r).$$

Сумма ряда (2) при $r < 1$ может быть изображена в виде интегральной формулы. Заменяя в (2) коэфициенты a_n и b_n по формулам Фурье, представим $f(\theta, r)$ таким образом:

$$f(\theta, r) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha + r\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos(\alpha - \theta)\,d\alpha + \cdots + r^n\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - \theta)\,d\alpha + \cdots\right\}$$

Так как ряд

$$\frac{1}{2}f(\alpha) + rf(\alpha)\cos(\alpha - \theta) + \cdots + r^n f(\alpha)\cos n(\alpha - \theta) + \cdots$$

имеет члены по абсолютной величине меньшие, чем соответствующие члены ряда

$$|f(\alpha)|\left\{\frac{1}{2} + r + r^2 + \cdots\right\},$$

то его можно почленно интегрировать по α в промежутке $(-\pi, \pi)$. Это нам даст:

$$f(\theta, r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\left\{\frac{1}{2} + r\cos(\alpha - \theta) + \cdots + r^n\cos n(\alpha - \theta) + \cdots\right\}d\alpha$$

Выражение, стоящее в скобках под знаком интеграла, есть действительная часть ряда

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - z}$$

при $z = re^{i(\alpha - \theta)}$. Заметив, что

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - re^{i(\alpha-\theta)}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - r\cos(\alpha - \theta) - ir\sin(\alpha - \theta)} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1 - r\cos(\alpha - \theta) + ir\sin(\alpha - \theta)}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2} =$$

$$= \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2)} + i\,\frac{r\sin(\alpha - \theta)}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2},$$

получим:

$$f(\theta, r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2}\,d\alpha. \tag{3}$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (3), носит название интеграла Пуассона.

Рассмотрим в плоскости (x, y) круг C с центром в начале координат радиуса единицы. Отнесем точки круга, включая окружность, к системе полярных координат (r, θ), помещая полюс в начале координат $(0, 0)$ и принимая за полярную ось положительное направление оси абсцисс. Пусть теперь на окружности круга C задана функция $f(\theta)$, ограниченная и имеющая лишь конечное число точек прерывности. Тогда интеграл Пуассона (3) определяет внутри круга C функцию $f(\theta, r) = F(x, y)$, непрерывную в каждой внутренней точке круга C. Из разложения (2) следует, что $f(\theta, r) = F(x, y)$ есть действительная часть степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n,$$

где $z = re^{i\theta}$. Этот степенной ряд сходится внутри круга C, так как модули его коэфициентов ограничены

$$(|a_n - ib_n| < 2H).$$

Сумма степенного ряда есть функция z, аналитическая внутри круга C, а ее действительная часть представляет функцию гармоническую внутри C, т. е. непрерывную вместе с ее частными производными и удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

§ 25. Поведение интеграла Пуассона при $r \to 1$

Будем изучать поведение функции $f(\theta, r)$ при стремлении точки $M(\theta, r)$, находящейся внутри C, к определенной точке P окружности круга C.

Прежде всего рассмотрим случай, когда точка M стремится к точке P вдоль радиуса OP, т. е. изучим поведение функции $f(\theta, r)$ при θ постоянном и $r \to 1$. С этой целью установим следующее предложение, являющееся обобщением известной теоремы Абеля о степенных рядах: *если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется процессом средне-арифметических Чезаро и имеет обобщенную сумму S, то ряд $\sum_{n=0} a_n x^n$ сходится при $0 \leqslant x < 1$ и имеем:*

$$\lim_{x \to 1} \sum_0^{\infty} a_n x^n = S. \tag{1}$$

Действительно, полагая

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \quad \sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} + s_n}{n+1},$$

получим:

$$\sum_0^m a_n x^n = s_0 + \sum_1^m (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_0^m s_n x^n - \sum_0^{m-1} s_n x^{n+1} =$$

$$= \sum_0^{m-1} s_n (x^n - x^{n+1}) + s_m x^m$$

или

$$\sum_0^m a_n x^n = (1-x) \sum_0^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

Применяя еще раз эту формулу, найдем:

$$\sum_0^{m-1} s_n x^n = (1-x) \sum_0^{m-2} (n+1) \sigma_n x^n + m\sigma_{m-1} x^{m-1}.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S,$$

то ряд

$$\sum_0^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n$$

сходится при $0 \leqslant x < 1$ и $m\sigma_{m-1} x^{m-1} \to 0$, когда $m \to \infty$. Поэтому сходится также ряд

$$\sum_0^{\infty} s_n x^n, \quad 0 \leqslant x < 1,$$

и его общий член $s_n x^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. В силу первого тождества сходится также ряд

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n$$

и имеем:

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = (1-x)^2 \sum_0^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n.$$

Пусть m целое положительное число такое, что при $n \geqslant m$ имеем: $|\sigma_n - S| < \varepsilon$, где ε, $\varepsilon > 0$, сколь угодно мало. Тогда для всякого x, $0 \leqslant x < 1$, получаем:

$$\left| (1-x)^2 \sum_m^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n - (1-x)^2 S \sum_m^{\infty} (n+1) x^n \right| <$$

$$< (1-x)^2 \varepsilon \sum_0^{\infty} (n+1) x^n = (1-x)^2 \varepsilon \left[\sum_0^{\infty} x^n \right]' = \varepsilon.$$

Заметив, что

$$\lim_{x \to 1} \left\{ (1-x)^2 \sum_0^{m-1} (n+1) \sigma_n x^n \right\} = 0$$

и

$$\lim_{x \to 1} \left\{ (1-x)^2 S \sum_m^{\infty} (n+1) x^n \right\} = S \lim_{x \to 1} \left[(1-x)^2 \sum_0^{\infty} (n+1) x^n \right] = S,$$

получаем требуемое равенство (1).

Приложим доказанную теорему к степенному ряду (2) предыдущего параграфа; тогда можем сделать такой вывод: для каждого значения θ, для которого ряд Фурье функции $f(\theta)$ суммируется процессом средне-арифметических Фейера, функция $f(\theta, r)$ стремится при $r \to 1$ к той же самой обобщенной сумме. В частности (см. § 3) в точках непрерывности функции $f(\theta)$ интеграл Пуассона $f(\theta, r)$ стремится к $f(\theta)$, когда $r \to 1$, в точках же прерывности первого рода он стремится к $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$.

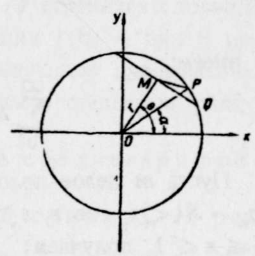
§ 26. Поведение интеграла Пуассона в точках непрерывности окружности круга C

Предполагая, что в точке $P_0(\theta_0, 1)$ функция $f(\theta)$ непрерывна относительно θ, докажем, что, когда точка $M(\theta, r)$ стремится к точке P_0 произвольным способом (оставаясь все время внутри C), интеграл Пуассона $f(\theta, r)$ стремится к значению $f(\theta_0)$.

Прежде всего дадим геометрическое истолкование фактора Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2} \text{ (черт. 16).}$$

Обозначим через M точку (θ, r) внутри C, через P точку $(\alpha, 1)$ на окружности круга C, через Q одну из точек, в которых перпендикуляр к OM, проведенный через точку M, встречает окружность. Легко из чертежа заключаем:



Черт. 16.

$$MQ^2 = 1 - r^2; \quad MP^2 = 1 - 2r\cos(\alpha-\theta) + r^2,$$

так что будет:

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2} = \left(\frac{MQ}{MP}\right)^2.$$

Обращаясь к доказательству теоремы настоящего параграфа, положим $f(\theta) \equiv 1$ в разложении (2) § 24. Тогда получим: $f(\theta, r) = 1$.

Следовательно можем написать:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{MQ}{MP}\right)^2 d\alpha. \quad (1)$$

Умножив обе части (1) на $f(\theta_0)$ и вычитая из $f(\theta, r)$, получим:

$$f(\theta, r) - f(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\alpha) - f(\theta_0)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\, d\alpha. \quad (2)$$

Разложим интеграл (2) на две части, распространив одну на дугу $(\theta_0 - \sigma, \theta_0 + \sigma)$ и другую на оставшуюся дугу, выбирая за σ положительное число, определенное в зависимости от ε, $\varepsilon > 0$ (выбрано произвольно) так, чтобы для каждого α, принадлежащего промежутку $(\theta_0 - \sigma, \theta_0 + \sigma)$, имелось неравенство: $|f(\alpha) - f(\theta_0)| < \varepsilon$.

Первая часть интеграла (2), таким образом разложенного, по абсолютной величине будет меньше, чем

$$\varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\sigma}^{\theta_0+\sigma}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\, d\alpha <$$

$$< \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\, d\alpha = \varepsilon.$$

При оценке второй части интеграла (2) предположим, что расстояние точки M от точки P_0 будет меньше достаточно малого δ, $\delta > 0$, выбранного так, чтобы $MP > \frac{\sigma}{2}$ и $MQ < \sigma^2$. Тогда эта вторая часть интеграла по абсолютной величине будет меньше, чем

$$\frac{2\sigma^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[|f(\alpha)| + |f(\theta_0)|]\, d\alpha$$

и подавно меньше чем

$$\frac{2\varepsilon^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[|f(\alpha)| + |f(\theta_0)|]\, d\alpha,$$

если примем, что возможно, $\delta < \varepsilon$.

Таким образом окончательно будем иметь:

$$|f(\theta, r) - f(\theta_0)| < \varepsilon\left[1 + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[|f(\alpha)| + |f(\theta_0)|]\, d\alpha\right]$$

для всех точек M, отстоящих от точки P_0 на расстоянии меньшем δ.

Так как множитель при ε во второй части последнего неравенства есть постоянное число, то из этого неравенства следует справедливость доказываемой теоремы.

В частности, если $f(\theta)$ есть функция непрерывная вдоль всей окружности круга C, то интеграл Пуассона $f(\theta, r)$ стремится к значению $f(\theta_0)$, для всякой точки P_0 $(\theta_0, 1)$ окружности, когда точка $M(\theta, r)$ стремится к точке P_0, следуя по любому пути, лежащему внутри C.

Таким образом какова бы ни была непрерывная функция $f(\theta)$, заданная на окружности круга C, интеграл Пуассона $f(\theta, r) = F(x, y)$ изображает функцию, гармоническую внутри C, непрерывную в круге C, включая окружность, и принимающую на окружности заданные значения $f(\theta)$.

Иными словами, интеграл Пуассона дает решение известной задачи Дирихле в случае круга.

§ 27. Двойные ряды Фурье

В приложениях весьма часто приходится пользоваться рядами Фурье от двух и большего числа независимых переменных. Рассмотрим например функцию $f(x, y)$, периодическую, периода $2l$ относительно x и периода $2l'$ относительно y. Рассматривая $f(x, y)$ как функцию от x, мы получим (§ 15):

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m(y) e^{\frac{\pi m x i}{l}}, \tag{1}$$

где

$$C_m(y) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\xi, y) e^{-\frac{\pi m \xi i}{l}} d\xi.$$

Разложим $C_m(y)$ в свою очередь в ряд Фурье:

$$C_m(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} e^{\frac{\pi n y i}{l'}},$$

где

$$\left.\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{2l'} \int_{-l'}^{l'} C_m(\eta) e^{-\frac{\pi n \eta i}{l'}} d\eta = \\ &= \frac{1}{4ll'} \int_{-l}^{l} \int_{-l'}^{l'} f(\xi, \eta) e^{-\pi\left(\frac{m\xi}{l} + \frac{n\eta}{l'}\right) i} d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставив выражение для $C_m(y)$ в формулу (1), получим:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{mn} e^{\frac{\pi n y i}{l'}} \right) e^{\frac{\pi m x i}{l}},$$

откуда, раскрыв скобки, найдем формулу:

$$f(x, y) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} C_{mn} e^{\pi\left(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{l'}\right) i}, \tag{3}$$

которая обобщает ряд Фурье на случай двух переменных.

При исследовании ряда Фурье достаточно предполагать $l = l' = \pi$, потому что общий случай (3) приводится к этому частному случаю путем линейных преобразований над x и над y.

Итак, предполагая периоды функции $f(x, y)$ равными 2π, мы представим ее ряд Фурье в виде:

$$\sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} C_{mn} e^{(mx+ny)i}, \tag{4}$$

где положено:

$$C_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \eta) e^{-(m\xi+n\eta)i} d\xi\, d\eta. \tag{5}$$

Собирая попарно сопряженные члены ряда (4), мы представим его в действительной форме:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} [a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + \\ + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny], \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где положено:

$$\lambda_{mn} = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4}, \text{ если } m = n = 0 \\ &\frac{1}{2}, \text{ если } m = 0,\ n > 0, \text{ или } m > 0,\ n = 0 \\ &1, \text{ если } m > 0,\ n > 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \cos m\xi \cos m\eta\, d\xi\, d\eta \\ b_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \sin m\xi \cos n\eta\, d\xi\, d\eta \\ c_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \cos m\xi \sin n\eta\, d\xi\, d\eta \\ d_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \sin m\xi \sin n\eta\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(Q обозначает фундаментальный квадрат плоскости xy, определяемый неравенствами: $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$).

Обозначим через $S_{\mu,\nu}(x, y)$ частичную сумму двойного ряда (6), т. е. положим:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{mn} [a_{mn} \cos mx \cos ny + \tag{9}$$
$$+ b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny].$$

Мы скажем, что в точке (x, y) двойной ряд (6) сходится и имеет суммой $f(x, y)$, если для всякого ε, $\varepsilon > 0$, можно определить целое положительное число N такое, что имеет место неравенство:

$$|f(x, y) - S_{\mu,\nu}(x, y)| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были целые числа μ и ν большие, чем N.

Частичную сумму $S_{\mu,\nu}(x, y)$ можно выразить посредством интеграла, аналогично тому, как мы это делали для частичной суммы ряда Фурье функции одного переменного.

В самом деле, вследствие (7) и (8) имеем:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{mn} \iint_Q f(\xi, \eta) \cos m(x-\xi) \cos n(y-\eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\mu} \cos m(x-\xi)\right] \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\nu} \cos n(y-\eta)\right] d\xi d\eta,$$

откуда после суммирования скобок найдем:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_Q f(\xi, \eta) \frac{\sin \frac{2\mu+1}{2}(x-\xi) \cdot \sin \frac{2\nu+1}{2}(y-\eta)}{\sin \frac{x-\xi}{2} \sin \frac{y-\eta}{2}}\, d\xi\, d\eta \tag{10}$$

Так как подынтегральная функция формулы (10) имеет период 2π относительно ξ и период 2π относительно η, то мы можем $S_{\mu,\nu}(x, y)$ представить так:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(\xi, \eta) \frac{\sin \frac{2\mu+1}{2}(x-\xi) \sin \frac{2\nu+1}{2}(y-\eta)}{\sin \frac{x-\xi}{2} \sin \frac{y-\eta}{2}}\, d\xi d\eta.$$

Откуда, полагая $x - \xi = -2u$, $y - \eta = -2v$, получим:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u, y+2v) \frac{\sin(2\mu+1)u \cdot \sin(2\nu+1)v}{\sin u \sin v}\, du dv.$$

Положим ради краткости:

$$\Phi(u, v) = f(x+2u, y+2v) + f(x-2u, y+2v) +$$
$$+ f(x-2u, y-2v) + f(x+2u, y-2v).$$

Тогда $S_{\mu,\nu}(x, y)$ можно представить так:

$$S_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(u, v) \frac{\sin(2\mu+1)u \cdot \sin(2\nu+1)v}{\sin u \sin v}\, du\, dv. \tag{12}$$

С помощью этой формулы мы приводим изучение сходимости двойного ряда Фурье (6) к исследованию предела интеграла (12), когда μ и ν стремятся к бесконечности одновременно, но независимо друг от друга.

§ 28. Исследование сходимости двойного ряда Фурье

Чтобы исследовать поведение $S_{\mu,\nu}(x_0, y_0)$, при стремлении μ и ν к бесконечности, разобьем интеграл (12) на части следующим образом:

$$S_{\mu,\nu}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \Phi(u, v) \frac{\sin(2\mu+1)u \cdot \sin 2\nu+1)v}{\sin u \sin v}\, du\, dv + \tag{1}$$
$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}},$$

где $\delta > 0$ и меньше $\frac{\pi}{2}$.

Предположим для простоты письма $x_0 = y_0 = 0$, так что

$$\Phi(u, v) = f(2u, 2v) + f(-2u, 2v) + f(-2u, -2v) +$$
$$+ f(2u, -2v). \tag{2}$$

Будем считать, что периодическая функция $f(x, y)$ внутри фундаментального квадрата $Q(-\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < K[|x_1 - x_2|^{\alpha} + |y_1 - y_2|^{\beta}], \tag{3}$$

где K, α, β — три положительные постоянные, а (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — любая пара точек внутри Q.

При этом условии мы покажем, что два последних интеграла правой части формулы (1) стремятся к нулю, когда $\mu \longrightarrow \infty$ и $\nu \longrightarrow \infty$.

Соответственно четырем слагаемым функции $\Phi(u, v)$, определяемой равенством (2), разобьем интеграл

$$\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\delta}$$

на четыре части, и часть, относящуюся к $f(2u, 2v)$, представим в виде:

$$\int_0^{\delta'} \frac{\sin kv}{\sin v}\,dv \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(2u, 0)\frac{\sin hu}{\sin u}\,du +$$

$$+\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin hu}{\sin u}\,du\int_0^{\delta'}[f(2u, 2v)-f(2u, 0)]\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv + \qquad (4)$$

$$+\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_{\delta'}^{\delta} f(2u, 2v)\frac{\sin hu \sin kv\,du\,dv}{\sin u\sin v}$$

где δ' — положительное число, меньшее, чем δ, а h и k обозначают соответственно $2\mu+1$, $2\nu+1$.

Первый член формулы (4) стремится к нулю, когда

$$h \longrightarrow \infty \text{ и } k \longrightarrow \infty,$$

потому что при $k > 1$ имеем:

$$0 < \int_0^{\delta'}\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{k}}\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv < k\int_0^{\frac{\pi}{k}}\frac{v}{\sin v}\,dv < \frac{\pi^2}{2}.\text{[1]} \qquad (5)$$

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(2u, 0)\frac{\sin hu}{\sin u}\,du \longrightarrow 0 \qquad (\S\ 1,\ \text{примечание}).$$

Третий член формулы (4) также стремится к нулю, когда

$$h \longrightarrow \infty \text{ и } k \longrightarrow \infty.$$

[1] Это неравенство доказывается с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в § 10, стр. 61.

Действительно, полагая

$$\int_{\delta'}^{\delta} f(2u, 2v)\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv = \varphi_k(u),$$

мы по § 1 (примечание) видим, что $\varphi_k(u) \longrightarrow 0$, когда $k \longrightarrow \infty$. Так как, с другой стороны, $\frac{\varphi_k(u)}{\sin u}\sin hu$ остается ограниченным по абсолютной величине, каковы бы ни были k и h в промежутке $\delta \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi_k(u)}{\sin u}\sin hu\,du \longrightarrow 0.$$

Что касается второго члена формулы (4), то заметим, что вследствие сделанной гипотезы (3) он по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{2}{\sin\delta}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\delta'}\left|\frac{f(2u, 2v)-f(2u, 0)}{2v}\right|\left|\frac{v}{\sin v}\right|du\,dv <$$

$$< \frac{\pi}{\sin\delta}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\delta'} K(2v)^{\beta-1}\,du\,dv < \frac{K\pi^2\delta'}{2^{2-\beta}\sin\delta};$$

последнее же выражение может быть сделано как угодно малым при достаточно малом δ'.

Итак при произвольно малом ε, $\varepsilon > 0$, можно найти достаточно малое δ', так чтобы все выражение (4) по абсолютной величине было меньше ε для всех h и k, достаточно больших. Это доказывает, что выражение (4), равное интегралу

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\delta} f(2u, 2v)\frac{\sin hu\sin kv}{\sin u\sin v}\,du\,dv,$$

стремится к нулю, когда $h \longrightarrow \infty$ и $k \longrightarrow \infty$

Аналогичным способом исследуются три другие части интеграла

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\delta}\Phi(u, v)\frac{\sin hu\sin kv}{\sin u\sin v}\,du\,dv;$$

таким образом доказано, что последний интеграл стремится к нулю, когда $h \to$ и $k \to \infty$.

Аналогичным анализом мы покажем, что последний интеграл правой части формулы (1) также стремится к нулю, когда $h \to \infty$ и $k \to \infty$.

Возвращаясь к формуле (1), мы видим, что исследование поведения $S_{\mu,\nu}(x_0, y_0)$ при $\mu \to \infty$ и $\nu \to \infty$ привелось к изучению поведения лишь первого интеграла правой части (1).

Итак нам остается рассмотреть выражение

$$S^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \Phi(u, v)\frac{\sin hu \sin kv}{\sin u \sin v}\,du\,dv \tag{6}$$

при стремлении $h \to \infty$ и $k \to \infty$, помня, что пределы $S_{\mu,\nu}$ и $S^{(1)}_{\mu,\nu}$ совпадают.

При исследовании предела выражения (6) мы будем предполагать для функции $f(x, y)$ выполненным еще одно условие, кроме условия Липшица (3).

Мы предположим, что для точки (x_0, y_0), лежащей внутри Q, можно определить окрестность и три положительных числа K', α', β' так, чтобы в этой окрестности имело место неравенство:

$$|f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)| < K'|x - x_0|^{\alpha'}|y - y_0|^{\beta'}. \tag{7}$$

Обращаясь теперь к выражению (6), рассмотрим его часть, относящуюся к $f(2u, 2v)$, т. е.

$$\overline{S}^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta f(2u, 2v)\frac{\sin hu \sin kv}{\sin u \sin v}\,du\,dv,$$

что можно представить так:

$$\overline{S}^{(1)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}f(0, 0)\int_0^\delta \frac{\sin hu}{\sin u}\,du\int_0^\delta \frac{\sin kv}{\sin v}\,dv + \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta [f(2u, 2v) - f(0, 0)]\frac{\sin hu \sin kv}{\sin u \sin v}\,du\,dv. \tag{8}$$

Первый член второй части формулы (8) стремится к $\frac{1}{4}f(0, 0)$, когда $\mu \to \infty$ и $\nu \to \infty$, потому что

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin hu}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(см. § 10).} \tag{9}$$

Исследуем последний член (8). Получаем:

$$\int_0^\delta\int_0^\delta [f(2u, 2v) - f(0, 0)]\frac{\sin hu \sin kv}{\sin u \sin v}\,du\,dv =$$

$$= \int_0^\delta\int_0^\delta [f(2u, 2v) - f(2u, 0) - f(0, 2v) + f(0, 0)]\frac{\sin hu \sin kv}{\sin u \sin v}\,du\,dv +$$

$$+ \int_0^\delta f(2u, 0)\frac{\sin hu}{\sin u}\,du\int_0^\delta \frac{\sin kv}{\sin v}\,dv +$$

$$+ \int_0^\delta f(0, 2v)\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv\int_0^\delta \frac{\sin hu}{\sin u}\,du -$$

$$- 2f(0, 0)\int_0^\delta \frac{\sin hu}{\sin u}\,du\int_0^\delta \frac{\sin kv}{\sin v}\,dv. \tag{10}$$

Принимая во внимание (9) и условие (3), мы убедимся, что три последних члена правой части формулы (10) в своей совокупности стремятся к нулю, когда $\mu \to \infty$ и $\nu \to \infty$ [1].

Что же касается первого члена второй части формулы (10), то он по абсолютной величине менее, чем

$$4\int_0^\delta\int_0^\delta \left|\frac{f(2u, 2v) - f(2u, 0) - f(0, 2v) + (0, 0)}{2u \cdot 2v}\right| \frac{uv}{\sin u \sin v}\,du\,dv <$$

$$< \pi^2 \int_0^\delta\int_0^\delta \left|\frac{f(2u, 2v) - f(2u, 0) - f(0, 2v) + f(0, 0)}{2u \cdot 2v}\right|\,du\,dv.$$

---

[1] Мы здесь пользуемся равенствами:

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta f(2u, 0)\frac{\sin hu}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{2}f(0, 0),$$

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta f(0, 2v)\frac{\sin kv}{\sin v}\,dv = \frac{\pi}{2}f(0, 0),$$

которые вытекают из § 12, так как $f(2u, 0)$ и $f(0, 2v)$ удовлетворяют условию Липшица.

Применяя условие (7), мы убедимся, что последний интеграл в свою очередь меньше, чем

$$\pi^2\int_0^\delta\int_0^\delta K'(2u)^{\alpha'-1}(2v)^{\beta'-1}\,du\,dv=\frac{K'\pi^2}{4\alpha'\beta'}(2\delta)^{\alpha'+\beta'},$$

что может быть сделано как угодно малым, выбирая δ достаточно малым.

Итак при произвольно малом ε, $\varepsilon>0$, возможно определить δ так, чтобы для всех μ, ν, достаточно больших, выполнялось неравенство:

$$\left|S^{(1)}_{\mu,\nu}-\frac{1}{4}f(0,\ 0)\right|<\varepsilon.$$

Рассмотрев тем же способом три другие части выражения $S^{(1)}_{\mu,\nu}$, мы убедимся, что в соответствии с ε возможно определить δ так, чтобы для всех μ и ν, достаточно больших, разность между $S^{(1)}_{\mu,\nu}$ и $f(0,0)$ по абсолютной величине была меньше 4ε. Следовательно в силу предыдущего разность между $S_{\mu,\nu}(0,\ 0)$ и $f(0,\ 0)$ по абсолютной величине будет меньше любого наперед заданного положительного числа для всех μ и ν, достаточно больших. Это доказывает, что

$$\lim_{\substack{\mu\\ \nu}\Big\}\to\infty} S_{\mu,\nu}(0,\ 0)=f(0,\ 0),$$

т. е. что ряд Фурье сходится в точке $(0,\ 0)$ к значению $f(0,\ 0)$.

Заметим, что если точка $(x_0,\ y_0)$ находится на контуре квадрата Q и является, вообще говоря, точкой прерывности функции $f(x,\ y)$, то предыдущий анализ приведет нас к равенству: [1]

$$\lim_{\substack{\mu\\ \nu}\Big\}\to\infty} S_{\mu,\nu}(x_0,\ y_0)=\frac{1}{4}\left[f(x_0+0,\ y_0+0)+f(x_0-0,\ y_0+0)+\right.$$
$$\left.+f(x_0-0,\ y_0-0)+f(x_0+0,\ y_0-0)\right],$$

которое в точке непрерывности $(x_0,\ y_0)$ обращается в доказанное равенство:

$$\lim_{\substack{\mu\\ \nu}\Big\}\to\infty} S_{\mu,\nu}(x_0,\ y_0)=f(x_0,\ y_0).$$

Полученный результат мы выскажем в виде следующей теоремы: *если функция $f(x,\ y)$, заданная во всей плоскости $(x,\ y)$,*

[1] По определению имеем:

$$\lim_{\substack{h\\ k}\Big\}\to 0} f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0+0,\ y_0+0);$$
$$\lim f(x_0-h,\ y_0+k)=f(x_0-0,\ y_0+0)\ \text{и т. д.}$$

периода 2π относительно x и y, удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x_1,\ y_1)-f(x_2,\ y_2)|<K[\,|x_1-x_2|^\alpha+|y_1-y_2|^\beta], \tag{3}$$

где K, α, β суть положительные постоянные, а $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ любая пара точек внутри фундаментального квадрата Q, то ее двойной ряд Фурье сходится к значению $f(x_0,\ y_0)$ во всякой точке $(x_0,\ y_0)$, лежащей внутри Q, для которой возможно определить окрестность и три положительных числа K', α', β' так чтобы в этой окрестности выполнялось неравенство:

$$|f(x,\ y)-f(x,\ y_0)-f(x_0,\ y)+f(x_0,\ y_0)|<$$
$$<K'\,|x-x_0|^{\alpha'}\,|y-y_0|^{\beta'}. \tag{7}$$

Если точка (x_0, y_0) находится на контуре квадрата Q, [1] *то ряд Фурье сходится к значению*

$$\frac{1}{4}\left[f(x_0+0,\ y_0+0)+f(x_0-0,\ y_0+0)+f(x_0-0,\ y_0-0)+\right.$$
$$\left.+f(x_0+0,\ y_0-0)\right].$$

Пример. Разложить в двойной ряд Фурье периодическую функцию $f(x,\ y)$, определенную внутри фундаментального квадрата $Q\,(0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi)$ формулой:

$$f(x,\ y)=xy.$$

Применяя формулы (8) предыдущего параграфа, получим:

$$a_{mn}=\begin{cases}4\pi^2, & \text{если } m=n=0\\ 0 & \text{во всех других случаях,}\end{cases}$$

$$b_{mn}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{m}, & \text{если } m>0,\ n=0\\ 0 & \text{во всех других случаях,}\end{cases}$$

$$c_{mn}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{n}, & \text{если } m=0,\ n>0\\ 0 & \text{во всех других случаях,}\end{cases}$$

$$d_{mn}=\begin{cases}\dfrac{4}{mn}, & \text{если } m>0,\ n>0\\ 0 & \text{во всех других случаях.}\end{cases}$$

Таким образом двойной ряд Фурье функции $f(x,\ y)$ будет:

$$\sum_{m,\ n=0}^{\infty}\lambda_{mn}(a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny),$$

[1] В этом случае в условии (7) x_0, y_0 должны быть заменены через $x_0\pm 0$, $y_0\pm 0$, смотря по положению точки $(x,\ y)$ относительно $(x_0,\ y_0)$.

где λ_{mn} определяются из формул (7) предыдущего параграфа, а a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn} имеют написанные выше значения. Подставляя в этот ряд вместо коэфициентов их числовые значения и группируя члены ряда, получим:

$$\pi^2 - 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n} + 4\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{\sin mx \sin ny}{mn} = xy$$

при $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

Согласно доказанной в этом параграфе теореме, полученный ряд будет сходиться и на контуре фундаментального квадрата Q, состоящем из точек прерывности функции $f(x, y)$. Сумма нашего ряда в точке (x_0, y_0), лежащей на контуре квадрата Q, будет равна:

$$\frac{1}{4}\left[f(x_0+0,\ y_0+0) + f(x_0-0,\ y_0+0) + f(x_0-0,\ y_0-0) + \right.$$
$$\left. + f(x_0+0,\ y_0-0)\right].$$

Для суммы данного ряда мы получим:

при

$$0 < x < 2\pi,\ y = 0 \qquad \text{сумма} = \pi x$$

при

$$0 < y < 2\pi,\ x = 0 \qquad \text{сумма} = \pi y$$

при

$$x = y = 0 \qquad \text{сумма} = \pi^2.$$

Тот же результат мы получим, разлагая отдельно в простые ряды Фурье оба множителя функции xy. Действительно имеем:

$$x = \pi - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}\ (0 < x < 2\pi),$$

(согласно § 13),

$$y = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n}\ (0 < y < 2\pi),$$

откуда получаем:

$$xy = \pi^2 - 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n} +$$
$$+ 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n},$$

внутри прямоугольника Q.

§ 29. Метод приближенного вычисления коэфициентов Фурье

Если функция $f(x)$ задана аналитически, то формулы Фурье дают нам коэфициенты тригонометрического разложения функции. Но во многих практических задачах функция $f(x)$ задается графически, и тогда возникает вопрос о методах приближенного вычисления ее коэфициентов Фурье. Все эти методы основаны на применении к выражениям a_k и b_k формул приближенного вычисления интегралов. Мы воспользуемся простейшей из этих формул, так называемой формулой прямоугольников.

Разделим промежуток $(0, 2\pi)$ на n равных частей и обозначим абсциссы точек деления через:

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = 2\pi,$$

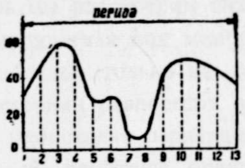
а значения функции $f(x)$ в этих точках через:

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{n-1},\ y_n.$$

По формуле прямоугольников получим:

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i,\quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i.$$

Помещаем ось абсцисс под графиком функции $f(x)$, по возможности ближе к нему, чтобы избежать отрицательных ординат и не иметь дела с очень большими ординатами. Период графика делим например на двенадцать равных частей (черт. 17).



Черт. 17.

Составляем таблицу на разграфленном листке бумаги, как это показано на черт. 18. В первом столбце выписываем номера абсцисс 1, 2, ..., 12; во втором столбце помещаем соответствующие им ординаты, снимаемые непосредственно с графика функции, причем полезно выбрать масштаб столь малым, чтобы эти ординаты измерялись целыми числами. В третьем столбце помещаем произведения этих ординат на $\cos 30° = 0{,}87$, в четвертом — произведения

1	30	—	—
2	45	39	22
3	58	50	29
4	55	—	—
5	28	24	14
6	29	25	14
7	8	—	—
8	7	6	3
9	42	37	21
10	50	—	—
11	49	42	24
12	44	38	22

Черт. 18.

ординат на $\cos 60^\circ = 0{,}50$. В строках 1, 4, 7 и 10 оставлены пустые поля, соответствующие произведению ординат на косинусы дуг, кратных нулю или $\frac{\pi}{2}$. Пятый столбец оставляем пустым, заштриховав правое верхнее его поле.

Теперь ясно, что для определения свободного члена $\frac{a_0}{2}$ нужно взять сумму всех ординат и разделить ее на двенадцать.

Для определения же остальных коэфициентов a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots 6)$ изготовляют шаблоны из прозрачной восковой бумаги для каждого коэфициента в отдельности следующим образом.

Размеры шаблонов и клеток на них должны в точности совпадать с таковыми же таблицы черт. 18. Те же клетки шаблона, которые соответствуют положительным слагаемым коэфициента, обводим одним, например красным, цветом, а клетки, соответствующие отрицательным слагаемым этого коэфициента, другим, например синим, цветом.

Каждый шаблон накладывается на таблицу (черт. 18) и вычисляется сначала сумма $\Sigma_{(+)}$ чисел, занимающих клетки с красным цветом; затем вычисляется сумма $\Sigma_{(-)}$ чисел, занимающих клетки с синим цветом.

Проделав это для всех шаблонов, составляем разность соответствующих сумм $\Sigma_{(+)} - \Sigma_{(-)}$ и делим каждую из них на 6; получаемые частные и дадут приближенные значения коэфициентов a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots, a_6$, b_6. Мы предполагали $n = 12$; при более точных вычислениях берут n большим числом, кратным 4. [1]

---

[1] Более подробно см. об этом в „Курсе высшей математики" Тамаркина и Смирнова, том II, стр. 310—316, Гиз, 1926.

ЧАСТЬ II

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ 1. Поперечные колебания мембраны

Во введении к настоящему сочинению мы рассмотрели приложение рядов Фурье к задаче поперечных колебаний струны, приводящейся в случае отсутствия внешних сил к интегрированию диференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях: $u = 0$ для $x = \left\{\begin{smallmatrix}0\\ l\end{smallmatrix}\right.$ и любого $t\}$ и начальных условиях: $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ для $t = 0$ и любого x, $0 \leqslant x \leqslant l$.

Теперь мы рассмотрим аналогичную задачу о поперечных колебаниях мембраны, понимая под мембраной тонкую пластинку, которая подобно струне работает только на растяжение, но не на изгиб. Предположим, что в состоянии равновесия мембрана лежит в плоскости xy и движения ее точек происходят перпендикулярно плоскости xy; тогда смещение u точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y, t, которая, в случае отсутствия внешних сил, удовлетворяет диференциальному уравнению, аналогичному уравнению (1) струны, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

где $c^2 = \frac{T_0}{\rho}$, обозначая через ρ поверхностную плотность мембраны, а через T_0 ее постоянное натяжение.

К диференциальному уравнению (2) мы присоединим граничные и начальные условия. На границе мы предполагаем мембрану закрепленной, т. е. вдоль граничной кривой выполняется условие:

$$u = 0 \text{ для всех значений } t. \tag{3}$$

В начале движения ($t=0$) мы считаем данными положение мембраны и скорость всех ее точек, т. е. имеем:

$$u=f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}=g(x, y) \text{ для } t=0. \tag{4}$$

Подобно задаче о колебаниях струны, мы сперва заметим, что вследствие однородности линейного диференциального уравнения (2) и граничного условия (3) всякий ряд

$$u=\sum c_n u_n,$$

образованный из частных решений u_n с постоянными коэфициентами c_n, также удовлетворяет диференциальному уравнению и граничному условию.

Таким образом, опуская пока начальные условия, мы найдем сперва частные периодические решения

$$u(x, y, t)=U(x, y)\cos \nu t \text{ (или } \sin \nu t), \tag{5}$$

из которых затем образуем ряд, в котором определим коэфициенты так, чтобы выполнялись начальные условия (4).

Подставляя в диференциальное уравнение (2) выражение вида (5), по сокращении на $\cos \nu t$ (или $\sin \nu t$), находим:

$$-\nu^2 U(x, y)=c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right).$$

Откуда, полагая $\frac{\nu^2}{c^2}=\lambda^2$, получим уравнение для U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\lambda^2 U=0. \tag{6}$$

Это уравнение определяет функцию U, выражающую амплитуду при гармоническом колебании различных точек мембраны. Как и в случае струны, оказывается, что мембрана может выполнять периодические колебания только с вполне определенными частотами ν, т. е. что диференциальное уравнение (6) имеет решения, исчезающие на границе, только при вполне определенных значениях λ^2, называемых собственными значениями данной граничной проблемы. Следовательно нужно определить собственные значения и соответствующие им решения $U(x, y)$, так называемые собственные функции.

Мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая — прямоугольной мембраны.

Итак рассмотрим случай свободных колебаний прямоугольной мембраны, контур которой есть прямоугольник со сторонами $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, в плоскости (x, y). Ищем частное решение диференциального уравнения (6), полагая:

$$U=p(x)\cdot q(y), \tag{7}$$

что нам дает

$$p''(x)\,q(y)+p(x)\,q''(y)+\lambda^2 p(x)\,q(y)=0$$

или

$$\frac{p''(x)}{p(x)}=-\frac{q''(y)+\lambda^2 q(y)}{q(y)}=-k^2,$$

где k^2 — пока произвольное постоянное.

Следовательно мы имеем два уравнения:

$$p''(x)+k^2 p(x)=0, \quad q''(y)+l^2 q(y)=0, \tag{8}$$

где положено:

$$l^2=\lambda^2-k^2 \text{ или } k^2+l^2=\lambda^2. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения (8), получаем общий вид функций $p(x)$ и $q(y)$:

$$p(x)=C_1\cos kx+C_2\sin kx, \quad q(y)=C_3\cos ly+C_4\sin ly.$$

Так как по условию на контуре прямоугольника u, а следовательно и U, обращается в нуль, то должны иметь:

$$p(0)=0, \ p(a)=0, \ q(0)=0, \ q(b)=0.$$

Из последних условий ясно, что $C_1=C_3=0$, и отбрасывая постоянные множители C_2 и C_4, не равные нулю, получим

$$p(x)=\sin kx, \quad q(y)=\sin ly, \tag{10}$$

причем

$$\sin ka=0, \ \sin lb=0$$

или

$$k=\frac{m\pi}{a}, \quad l=\frac{n\pi}{b}, \tag{11}$$

где m и n — положительные целые числа.

Из соотношения (9) получается для λ выражение:

$$\lambda=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}. \tag{12}$$

Умножив λ на c, мы получим всевозможные частоты $\nu_{m,n}$, с которыми может колебаться прямоугольная мембрана, если подставим для m и n все положительные целые числа. Этим частотам принадлежат периоды колебаний:

$$T_{m,n}=\frac{2\pi}{\nu_{m,n}}=\frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}. \tag{13}$$

Самый глубокий тон мембраны получается при $m=n=1$.

Общее колебание мембраны составляется из найденных частных решений в виде двойного ряда:

$$u=\sum_{\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=1}^{\infty}[A_{m,n}\cos\nu_{m,n}t+B_{m,n}\sin\nu_{m,n}t]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (14)$$

где $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ суть постоянные, определяемые из начальных условий (4) нашей задачи.

Полагая $t=0$ в формуле (14), а также в ее частной производной относительно t, найдем в силу (4):

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)&=\sum_{\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\\ g(x,y)&=\sum_{\left.\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}=1}^{\infty}B_{m,n}\nu_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Равенства (15) суть разложения функций f и g в двойные ряды Фурье, и следовательно коэфициенты $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ определяются по формулам (см. § 27):

$$\left.\begin{aligned} A_{m,n}&=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy\\ B_{m,n}&=\frac{4}{ab\nu_{m,n}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Формулы (16) получаются из равенств:

$$A_{m,n}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$B_{m,n}=\frac{1}{ab}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}G(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy,$$

где $F(x,y)$ и $G(x,y$ получаются соответственно из $f(x,y)$ и $g(x,y)$ нечетным продолжением относительно x и y.

§ 2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу о движении тепла в прямом цилиндрическом стержне, изолированном от внешнего пространства. Обозначим через $u(x,t)$ температуру в сечении x стержня в момент t и выведем уравнение, которому должна удовлетворять эта функция.

Для вывода этого уравнения мы подсчитаем двумя различными способами количество тепла dq, получаемое за бесконечно малый промежуток времени dt бесконечно малым элементом стержня между сечениями x и $x+dx$. Пусть за промежуток времени dt температура рассматриваемого элемента стержня изменилась на du; тогда количество тепла dq, затраченного на это, выразится таким образом:

$$dq=c\,dm\,du=c\,dm\frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

где c обозначает теплоемкость вещества стержня, dm — массу элемента. Так как $dm=\rho\,dv=\rho S\,dx$, — где ρ — плотность, а S — площадь поперечного сечения стержня, то количество тепла dq, получаемое элементом стержня, представим в виде:

$$dq=c\rho S\frac{\partial u}{dt}dt\,dx. \qquad (1)$$

С другой стороны, то же количество тепла dq можно оценить иначе, вводя понятие о потоке тепла. С этой целью рассмотрим два сечения стержня x и $x+h$ и обозначим разность температур в этих сечениях через Δu. На опыте показано, что при постоянной разности температур на сечениях количество тепла q, получаемое за время dt частью стержня, заключенной между этими сечениями, пропорционально Δu, площади сечения S, промежутку времени dt и обратно пропорционально толщине h. Вследствие этого мы можем написать: $q=-k\frac{\Delta u}{h}S\,dt$, где k есть коэфициент пропорциональности, так называемый коэфициент внутренней теплопроводности, знак же (—) указывает на то, что направление движения тепла обратно направлению, в котором увеличивается температура. Переходя к пределу $h\to 0$, мы получим количество тепла, протекающее через данное сечение x за время dt, которое следовательно будет равно:

$$-k\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\cdot S\,dt=-k\frac{\partial u}{\partial x}S\,dt.$$

Относя это количество тепла к единице площади и е инице времени, мы получим величину $-k\frac{\partial u}{\partial x}$, которая носит название потока тепла через сечение x.

Заметив это, мы видим, что количество тепла dq, поглощаемое за время dt нашим элементом стержня, будет равно разности количества тепла, вошедшего в него через сечение x и вышедшего через сечение $x+dx$, так как по условию обмен тепла через боковую поверхность отсутствует. Таким образом мы находим:

$$dq = kS\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - kS\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x = kS\,dt\,d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = Sk\,dt\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx. \quad (2)$$

Приравнивая выражения dq из формул (1) и (2), по сокращении на $S\,dt\,dx$, получим:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или, полагая для сокращения $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, окончательно будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Проблема теплопроводности заключается в интегрировании диференциального уравнения (3) при начальном условии, дающем распределение температуры в момент $t=0$, и граничных условиях в том случае, когда стержень ограничен с одной или обеих сторон.

Предполагая стержень неограниченным, мы должны будем найти решение диференциального уравнения (3) при следующем начальном условии: в момент $t=0$ функция u должна равняться заданной функции $f(x)$. Попытаемся найти частное решение уравнения (3), которое возможно представить в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от t:

$$u = X(x)\cdot T(t). \quad (4)$$

Подставляя u, определяемое формулой (4), в диференциальное уравнение (3), мы получим:

$$X\frac{dT}{dt} = a^2 T\,\frac{d^2X}{dx^2}$$

или

$$\frac{1}{T}\,\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{X}\cdot\frac{d^2X}{dx^2}.$$

В полученном равенстве налево стоит функция одного t, направо же функция одного x. Поэтому это равенство может быть выполнено для

всех значений переменных x и t, друг от друга независимых, только тогда, когда обе части нашего равенства будут равны одному и тому же постоянному α. Отсюда следует, что $\frac{dT}{dt} = \alpha T$ или $T = Ae^{\alpha t}$. Так как T должно оставаться ограниченным при всяком t, $t>0$, то постоянное α имеет отрицательный знак, и мы можем положить: $\alpha = -a^2\lambda^2$. Тогда для X получим диференциальное уравнение: $\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 X$. Это уравнение имеет два частных решения: $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$. Из формулы (4) находим тогда два частных решения диференциального уравнения (3):

$$u = Ae^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x \quad \text{и} \quad u = Be^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x;$$

где λ есть произвольное действительное число, которое мы можем считать положительным, A и B суть произвольные постоянные, которые мы вправе предполагать произвольными функциями от λ.

В силу однородности линейного диференциального уравнения (3) при суммировании частных его решений мы получаем снова решение того же уравнения; поэтому посредством интегрирования относительно λ мы найдем решение уравнения (3):

$$u = \int_0^\infty (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)\,e^{-\lambda^2 a^2 t}\,d\lambda, \quad (5)$$

которое зависит от двух произвольных функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Посмотрим, нельзя ли A и B выбрать так, чтобы выполнилось начальное условие:

$$u = f(x) \text{ при } t = 0.$$

Для этого заметим, что согласно интегральной формуле Фурье (см. § 21) непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Дирихле во всяком конечном промежутке [1], может быть представлена в следующей форме:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda(x-\alpha)\,d\alpha \quad (6)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\alpha\lambda\,d\alpha + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin\alpha\lambda\,d\alpha\right]d\lambda. \quad (6')$$

---

[1] $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\alpha)|\,d\alpha$ существует, так как мы можем предполагать, что вне достаточно большого промежутка $(-l, +l)$ функция $f(\alpha)$ равна нулю.

Так как согласно начальному условию из формулы (5) для $t=0$ следует:

$$f(x)=\int_0^\infty (A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,d\lambda, \tag{7}$$

то путем сравнения формул (6′) и (7) получим:

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\alpha\lambda\,d\alpha,\quad B=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\sin\alpha\lambda\,d\alpha.$$

Подставляя найденные выражения для A и B в формулу (5), окончательно будем иметь:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos\lambda(x-\alpha)\,d\alpha, \tag{8}$$

причем действительно при $t=0$ согласно (8) u будет равно $f(x)$. Решение задачи теплопроводности, даваемое формулой (8), можно преобразовать к другому более простому виду. Для этого переставим порядок интегрирования в формуле (8), тогда получим:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,d\alpha\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda. \tag{8′}$$

Внутренний интеграл можно вычислить. В самом деле, имеем:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi=\frac{K(\beta)}{a\sqrt{t}};$$

полагая:

$$\lambda a\sqrt{t}=\xi,\quad \frac{x-\alpha}{a\sqrt{t}}=\beta.$$

Далее легко получаем:

$$K'(\beta)=-\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi\sin\beta\xi\,d\xi,$$

откуда интегрированием по частям найдем:

$$K'(\beta)=\frac{1}{2}\left(e^{-\xi^2}\sin\beta\xi\right)_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi=-\frac{\beta}{2}K(\beta),$$

т. е.

$$K(\beta)=\mathrm{const}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Постоянное определим, полагая $\beta=0$ и замечая, что

$$K(0)=\int_0^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом получим:

$$K(\beta)=\int_0^\infty e^{-\xi^2}\cos\beta\xi\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, будем иметь:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}.$$

Внося это выражение интеграла в формулу (8′), окончательно найдем

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}\,d\alpha. \tag{9}$$

Полученной формуле (9) можно придать весьма простую физическую интерпретацию. Рассмотрим частное решение

$$u(x,\ t)=\frac{\gamma}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}} \tag{10}$$

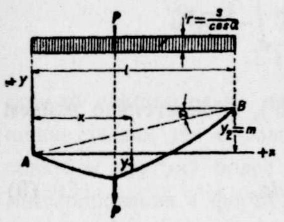
нашего диференциального уравнения (3), где γ обозначает постоянное. Формула (10) при $t=0$ дает $u=0$ при всех x, кроме $x=\alpha$. Это решение соответствует следовательно тому начальному условию, что во всем стержне температура равна нулю, за исключением малой окрестности сечения $x=\alpha$. Рассмотрим физический смысл этого решения. Выделим бесконечно малый элемент стержня $(\xi,\ \xi+d\xi)$ и пусть функция $f(x)$ имеет постоянное значение $f(\xi)$ внутри промежутка $(\xi,\ \xi+d\xi)$ и равна нулю вне его. Физически это значит, что мы в начальный момент сообщили этому элементу количество тепла, которое вызвало повышение температуры на $f(\xi)$. В последующие моменты распределение температуры в стержне дается формулой (9), которая в рассматриваемом случае примет вид:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_\xi^{\xi+d\xi} f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}\,d\alpha=\frac{f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\,d\xi.$$

Следовательно функция (10) дает при $\gamma = f(\alpha)\,d\alpha$ распределение температуры, которое вызывается мгновенным источником тепла, помещенным в начальный момент $t=0$ в сечении $x=a$ стержня и повышающим температуру на $f(\alpha)$. Общее же действие от начальных температур $f(\alpha)$ во всех сечениях стержня суммируется из отдельных элементов (10), что и дает нам полученное выше решение (9).

§ 3. Расчет гибких нитей

Рассмотрим задачу об определении натянутости гибкой нити, считая заданными положение точек привеса и длину нити между ними. Мы ограничимся случаем, когда длина S тяжелой гибкой нити мало отличается от длины прямолинейного отрезка AB, соединяющего точки привеса. В этом случае отдельные элементы нити будут образовывать малые углы с направлением прямой AB, что обусловливает почти равномерное распределение собственного веса нити по прямолинейному отрезку AB. Предположим, что кроме собственного веса канат несет еще и сосредоточенный груз P. Обозначим через s вес одного погонного метра каната и заменим собственный вес каната нагрузкой, распределенной равномерно на участке оси абсцисс длины l (черт. 19).



Черт. 19.

Это дает нам грузовую площадь с ординатой r, где $r = \frac{s}{\cos\alpha}$, причем α — угол оси абсцисс с прямою AB. Действительно собственный вес каната, равный

$$AB\cdot s = \frac{l}{\cos\alpha}\cdot s = l\,\frac{s}{\cos\alpha} = lr,$$

совпадает с площадью прямоугольника, у которого основание есть l, а высота r.

Точно так же заменим сосредоточенный груз P нагрузкой, распределенной равномерно на весьма малом участке длины b [1], что позволяет выразить этот груз P в виде площади прямоугольника с основанием b и высотой $q = \frac{P}{b}$. Таким образом общая нагрузка представится в виде площади (черт. 20), ордината которой $p(x)$ на большей части пролета есть r, а на участке длины b эта ордината равна $r+q$.

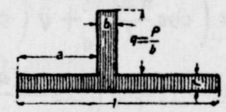
[1] Такое допущение всегда можно считать достаточно близким к действительности, при соответствующем выборе b.

Более точно функция $p(x)$ определяется так (черт. 20):

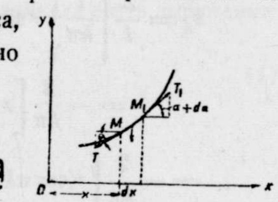
$$p(x) = r \text{ для } 0 \leqslant x < a \text{ и } a+b < x \leqslant l$$
$$p(x) = r+q, \text{ если } a < x < a+b.$$

Займемся теперь выводом уравнения веревочной кривой.

Направим ось Ox горизонтально, а Oy вертикально вверх и рассмотрим какой-нибудь элемент кривой MM_1 (черт. 21). На него действуют силы натяжения T и T_1, приложенные к концам M и M_1 и направленные по касательным к кривой в этих точках, и сила веса, направленная вертикально вниз, равная согласно нашим допущениям $p(x)\,dx$. Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил как на горизонтальную, так и на вертикальную ось была бы равна нулю. Первое требование дает, что горизонтальные слагающие натяжений равны по величине и противоположны по знаку. Обозначим через H общую величину горизонтальной составляющей. Тогда, как легко видеть из чертежа, вертикальная составляющая натяжения T равна $-H\operatorname{tg}\alpha = -Hy'$, а вертикальная составляющая от T_1 равна $H\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) = H(y'+dy')$, следовательно второе требование дает:



Черт. 20.



Черт. 21.

$$H(y'+dy') - Hy' - p(x)\,dx = 0,$$

откуда

$$H\,dy' = p(x)\,dx,$$

или

$$\frac{d}{dx}(y') = \frac{p(x)}{H}.$$

Таким образом приходим к диференциальному уравнению веревочной кривой:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p(x)}{H}. \tag{1}$$

Разложим данную функцию $p(x)$, определенную в промежутке $(0, l)$ в ряд синусов:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \text{ [1]} \tag{2}$$

[1] В точках прерывности a и $a+b$ функции $p(x)$ эта последняя равна $r+\frac{q}{2}$.

где положено:

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l p(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx \quad (k=1,\ 2, \ldots).$$

Вычисляя коэфициенты Фурье b_k, найдем:

$$b_k = \frac{2}{l}\left[\frac{l}{k\pi}\int_0^l r\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\frac{\pi k}{l}\,dx + \frac{l}{\pi k}\int_a^{a+b} q\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\frac{\pi k}{l}\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[r\left(\cos\frac{\pi kx}{l}\right)_0^l + q\left(\cos\frac{\pi kx}{l}\right)_a^{a+b}\right] =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[r(\cos\pi k - 1) + q\left(\cos\frac{\pi k(a+b)}{l} - \cos\frac{\pi ka}{l}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2} + q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right].$$

Таким образом разложение (2) примет вид:

$$p(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\Big[\, r\sin^2\frac{\pi k}{2} + q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\sin\frac{\pi kx}{l}. \quad (2')$$

Внося разложение (2') и в диференциальное уравнение (1), интегрируя два раза, получим:

$$y = -\frac{4l^2}{\pi^3 H}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2}+q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right]\sin\frac{\pi kx}{l} +$$

$$+ C_1x + C_2.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий задачи: при $x=0$ $y=0$, при $x=l$ имеем: $y=m$ (черт. 19).

Следовательно получим: $C_2=0$, $C_1=\frac{m}{l}$.

Окончательная формула для y будет такая:

$$y=\frac{m}{l}x - \frac{4l^2}{\pi^3H}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2}+q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right]\sin\frac{\pi kx}{l}. \quad (3)$$

Формула (3) замечательна в том отношении, что она имеет место для всего протяжения веревочной кривой, несмотря на то, что в нашем случае функция нагрузки $p(x)$ имеет две точки прерывности.

Так как наша задача заключается в определении горизонтального натяжения H при данной длине S каната, то обратимся теперь к выражению длины S веревочной кривой:

$$S=\int_0^l\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Вследствие пологости кривой можно вместо радикала взять выражение:

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad (4)$$

Диференцируя формулу (3), найдем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{l}-\frac{4l}{\pi^2H}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2}+q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right]\cos\frac{\pi kx}{l}.$$

Для практических целей в этом выражении достаточно ограничиться лишь тремя первыми членами суммы.

Ограничиваясь в сумме тремя первыми членами и интегрируя выражение (4) в промежутке $(0,\ l)$, получим:

$$S=l+\frac{m^2}{2l}+\frac{4l^3}{\pi^4H^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^4}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2}+q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right]^2. \quad (5)$$

При выводе формулы (5) мы воспользовались равенствами:

$$\int_0^l\cos^2\frac{\pi kx}{l}\,dx=\frac{l}{2}$$

и

$$\int_0^l\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=0 \text{ при } m\neq n.$$

Из формулы (5) можем определить горизонтальное натяжение H каната:

$$H^2=\frac{4l^3}{\pi^4\left[S-l-\frac{m^2}{2l}\right]}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^4}\left[r\sin^2\frac{\pi k}{2}+q\sin\frac{\pi k(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi kb}{2l}\right]^2. \quad (6)$$

Сумма, входящая в формулу (6), мало отличается от своего первого члена ($k=1$), а потому при приближенном определении максимума горизонтального натяжения H достаточно принять в расчет только один первый член, т. е.

$$r+q\sin\frac{\pi(2a+b)}{2l}\sin\frac{\pi b}{2l}.$$

Так как при перемещении груза вдоль пролета изменяется только a, то максимум величины H получится очевидно, если $\sin\frac{\pi(2a+b)}{2l}$ обратится в единицу, т. е. при $a=\frac{1}{2}(l-b)$ [1].

§ 4. Изгиб пластинки

Под жесткой пластинкой или плитой понимается такой ограниченный снизу и сверху плоскостями элемент конструкции, в котором нагрузка вызывает поперечные силы и изгибающие моменты, а также и крутящие моменты.

Плоскость, лежащая посредине толщины пластинки между обеими ограничивающими ее плоскостями, называется серединной плоскостью. Две прямые Ox и Oy в этой плоскости, вместе с перпендикулярной к ней прямой Ou, образуют пространственную систему координат x, y, u. Если через a обозначена толщина пластинки, то момент инерции поперечного сечения будет $I=\frac{1\cdot d^3}{12}$. При расчетах всегда рассматривают сечение плиты, ширина которого равна единице, а поэтому как момент инерции, так и все возникающие при деформации моменты и поперечные силы вычисляются для полосы, ширина которой равна единице. Если обозначить через u прогиб серединной плоскости пластинки в направлении, к ней перпендикулярном, через m — модуль поперечного сжатия Пуассона, через ε — модуль упругости и через $p(x, y)$ — функцию нагрузки, то, как доказывается в теории упругости, u должно удовлетворять следующему диференциальному уравнению [2]:

$$D\,\Delta\Delta u=p(x,\ y)$$

[1] Материал для этого параграфа заимствован мною из статьи проф. С. А. Заборовского (Южный инженер, февраль 1915).

[2] Δu обозначает диференциальный параметр Лапласа, т. е.

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

или в раскрытой форме

$$D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=p(x,\ y), \tag{1}$$

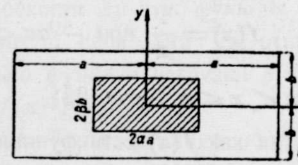
где положено:

$$D=\frac{m^2\varepsilon I}{m^2-1}.$$

Проблема изгиба пластинки заключается в следующем: даны определенные условия на контуре; требуется найти такую функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяла бы как диференциальному уравнению (1), так и условиям на контуре.

Мы ограничимся рассмотрением задачи бесконечно простирающегося во всех направлениях безбалочного покрытия, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой. Пусть дана прямоугольная плита со сторонами $2a$ и $2b$, подпертая в середине прямоугольной капителью колонны со сторонами $2\alpha a$ и $2\beta b$, параллельными сторонам $2a$ и $2b$.

Эта прямоугольная плита нагружена равномерно распределенной нагрузкой p (отнесенной к единице площади), которая уравновешивается реакцией колонны, равной $-\frac{p}{\alpha\beta}$; последнюю мы также считаем равномерно распределенной. Реакция колонны получается, если полную нагрузку плиты, равную $p\cdot 2a\cdot 2b$, разделить на площадь капители колонны $2\alpha a\cdot 2\beta b$, а знак минус показывает направление силы. Этот кусок плиты связан с другими такими же кусками таким образом, что касательные плоскости к изогнутой поверхности (черт. 22) вдоль сечений $x=\pm a$ параллельны оси Ox, вдоль сечений $y=\pm b$ параллельны оси Oy, а поперечная сила вдоль этих сечений обращается в нуль.



Черт. 22.

Граничные условия, только что формулированные, математически выражаются так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad\text{и}\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=0 \text{ для } x=\pm a\,[1] \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad\text{и}\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \text{ для } y=\pm b\,[1]. \tag{3}$$

[1] Поперечная сила в сечении $x=\text{const}$ определяется по формуле

$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

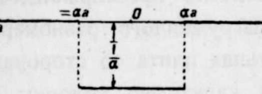
аналогично в сечении $y=\text{const}$ поперечная сила

$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

К этим граничным условиям мы присоединим еще условие в начале координат:

$$u=0 \text{ для } x=y=0. \tag{4}$$

Итак наша задача состоит в интегрировании диференциального уравнения (1) при условиях (2), (3) и (4). Функция нагрузки $p(x, y)$ в нашем случае определяется так: внутри малого прямоугольника со сторонами $2\alpha a$ и $2\beta b$ она равна $p\left(1-\frac{1}{\alpha\beta}\right)$, в точках большого прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, внешних к этому малому прямоугольнику, $p(x, y)$ равна p (черт. 22), в остальных же точках плоскости xy значение функции $p(x, y)$ получается периодическим продолжением с периодами $2a$ относительно x и $2b$ относительно y.



Черт. 23.

Мы начнем решение поставленной задачи с разложения функции $p(x, y)$ в ряд Фурье.

С этой целью мы разложим сначала в ряд Фурье функцию $f(x)$ одного переменного x периода $2a$, определенную так:

$$f(x)=\frac{1}{a} \text{ при } -\alpha a<x<\alpha a,\quad f(x)=0 \text{ при } a\leqslant x<-\alpha a$$

и $\alpha a<x\leqslant a$ (черт. 23).

Так как $f(x)$ есть функция четная, то ее ряд Фурье содержит только косинусы (§ 15):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{a}, \tag{5}$$

где

$$a_m=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx \quad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

В нашем случае будет:

$$a_0=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,dx=\frac{2}{a}\int_0^{\alpha a}\frac{1}{a}\,dx=-2;$$

$$a_m=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx=\frac{2}{a}\int_0^{\alpha a}\frac{1}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx=\frac{2\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}.$$

Подставляя коэфициенты Фурье a_m в разложение (5), получим:

$$f(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}\cos\frac{m\pi x}{a}. \tag{5'}$$

Аналогично получим разложение в ряд Фурье функции $g(y)$ переменного y, периода $2b$, определенной так: $g(y)=\frac{1}{\beta}$ при $-\beta b<y<\beta b$, $g(y)=0$ при $-b\leqslant y<-\beta b$ и $\beta b<y\leqslant b$.

Ее разложение будет:

$$g(y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}\cos\frac{n\pi y}{b}. \tag{6}$$

Произведение $f(x)\cdot g(y)$ очевидно представляет функцию двух переменных, которая внутри прямоугольника

$$-\alpha a<x<\alpha a,\quad -\beta b<y<\beta b$$

имеет значение $\frac{1}{\alpha\beta}$, в точках, внешних к этому прямоугольнику и принадлежащих фундаментальному прямоугольнику со сторонами $2a$ и $2b$, она равна нулю, в остальных же точках плоскости xy эта функция получается путем периодического продолжения с периодами $2a$ относительно x и $2b$ относительно y. Следовательно функция нагрузки $p(x, y)$ выразится таким образом: $p(x, y)=p[1-f(x)\cdot g(y)]$.

Отсюда мы получаем разложение в ряд Фурье функции нагрузки $p(x, y)$:

$$\begin{aligned} p(x, y)&=p[1-f(x)\cdot g(y)]=\\ &=p[1-1-\textstyle\sum(x)-\sum(y)-\sum(x)\sum(y)]=\\ &=-p[\textstyle\sum(x)+\sum(y)+\sum(x)\cdot\sum(y)], \end{aligned} \tag{7}$$

где через $\sum(x)$ и $\sum(y)$ обозначены тригонометрические ряды, входящие в формулы (5') и (6) для $f(x)$ и $g(y)$.

Подробно разложение $p(x, y)$ запишется так:

$$\begin{aligned} p(x, y)=&-2p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}\cos\frac{m\pi x}{a}-\\ &-2p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}\cos\frac{n\pi y}{b}-\\ &-4p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}\cos\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \tag{7'}$$

Разложение (7) функции нагрузки $p(x, y)$ можно получить вторым способом, разлагая прямо $p(x, y)$ в двойной ряд Фурье. Действительно согласно § 27 имеем:

$$p(x, y) = \sum_{\substack{m \\ n}\Big\} = 0}^{\infty} \lambda_{mn} \Big[a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} + c_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ d_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \Big],$$

где положено:

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ если } m = n = 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ если } m = 0,\ n > 0, \text{ или } m > 0,\ n = 0 \\ 1, \text{ если } m > 0,\ n > 0 \end{cases}$$

$$a_{mn} = \frac{1}{ab} \iint\limits_{Q} p(x, y) \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{ab} \iint\limits_{Q} p(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$c_{mn} = \frac{1}{ab} \iint\limits_{Q} p(x, y) \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{ab} \iint\limits_{Q} p(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy,$$

причем через Q обозначен фундаментальный прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$.

Легко видеть, что в данном случае $b_{mn} = 0$, $c_{mn} = 0$, $d_{mn} = 0$, что же касается a_{mn}, то путем вычисления получим:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0, \text{ если } m = n = 0 \\ -4p \frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}, \text{ если } m = 0,\ n > 0 \\ -4p \frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha}, \text{ если } m > 0,\ n = 0 \\ -4p \frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha} \cdot \frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta}, \text{ если } m > 0,\ n > 0. \end{cases}$$

Внося эти значения коэфициентов Фурье в вышенаписанный ряд для $p(x, y)$, получим окончательно:

$$p(x, y) = -2p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha} \cos\frac{m\pi x}{a} - 2p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta} \cos\frac{n\pi y}{b} -$$

$$- 4p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi\alpha}{m\pi\alpha} \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\beta}{n\pi\beta} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

что совпадает с формулой (7').

Итак мы видим, что отдельные члены двойного ряда Фурье, в который разлагается функция нагрузки $p(x, y)$, будут вида:

$$a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

где m и n могут принимать всевозможные целые положительные значения, включая нулевые.

Если принять

$$p(x, y) = a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b},$$

то функция

$$u_{mn} = a_{mn} \frac{1}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

будет удовлетворять диференциальному уравнению (1) и граничным условиям (2), (3). Следовательно функция

$$u = \sum_{\substack{m \\ n}\Big\} = 0}^{\infty} u_{mn} = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{\substack{m \\ n}\Big\} = 0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

будет служить решением данного диференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) и (3). Остается выполнить условие (4) в начале координат, что достигается путем прибавления к формуле (8) надлежащего постоянного.

Мы рассмотрели решение задачи об изгибе пластинки при определенных граничных условиях. Метод рядов Фурье с успехом может быть приложен к интегрированию диференциального уравнения (1) изгиба пластинки при различных граничных условиях, рассматриваемых в теории упругости.

§ 5. Поперечные колебания стержня

Задача о поперечных колебаниях струны была рассмотрена нами во введении. Тонкий стержень отличается от струны тем, что он работает не только на растяжение, но и на изгиб. Предположим, что в состоянии равновесия ось стержня направлена по оси OX и движения ее точек происходят перпендикулярно к этой оси; тогда смещение u точки x оси стержня будет функцией от x и t, которая удовлетворяет следующему диференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,\ t). \tag{1}$$

Действительно, если M есть изгибающий момент, а $F(x,\ t)$ — нагрузка, отнесенная к единице длины, то, как известно из сопротивления материалов, условие равновесия стержня в момент t будет:

$$EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=M, \tag{2}$$

где E — модуль упругости Юнга, а I — момент инерции поперечного сечения.

Заметив, что $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=F$, мы, диференцируя уравнение (2) два раза относительно x, получим условие равновесия стержня в виде:

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=F(x,\ t). \tag{3}$$

Чтобы получить уравнение движения, согласно принципу Даламбера, мы должны включить в состав внешней силы еще силу инерции в сечении x, рассчитав и ее на единицу длины. Так как ускорение этого сечения мы можем считать постоянным во всех точках сечения и равным $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, то сила инерции, рассчитанная на единицу длины, будет: $-\rho\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где ρ есть объемная плотность вещества стержня, σ — площадь поперечного сечения. Следовательно мы получим уравнение движения из уравнения (3), если заменим в последнем F через $F-\rho\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, что нам даст уравнение (1), где положено:

$$a^2=\frac{EI}{\rho\sigma},\quad f(x,\ t)=\frac{1}{\rho\sigma}F(x,\ t).$$

Наша задача будет иметь вполне определенное решение, если мы зададим начальные условия:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{4}$$

и граничные условия, которые должны выполняться на концах $x=0$, $x=b$ стержня и вид которых зависит от способа закрепления соответствующего конца. В зависимости от вида этих граничных условий мы получим различные решения диференциального уравнения (1). В дальнейшем мы разберем решение нашей задачи при граничных условиях двоякого типа:

a) концы подперты, т. е. могут свободно вращаться вокруг точек закрепления; тогда изгибающий момент должен равняться нулю, т. е. имеются условия: $u=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ при $x=0$ и $x=l$, каково бы ни было t;

b) концы закреплены наглухо так, что в них стержень имеет горизонтальное направление; в этом случае имеются условия: $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x=0$ и $x=l$ каково бы ни было t.

В обоих случаях задаются на каждом конце стержня по два условия, в отличие от струны, когда на каждом конце мы имели по одному условию.

Рассмотрим лишь случай свободных колебаний стержня, т. е. положим в уравнении (1) $f(x,\ t)=0$, что нам даст:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \tag{1'}$$

Задача заключается в том, чтобы найти решение $u(x,\ t)$ уравнения (1'), удовлетворяющее начальным условиям (4) и граничным условиям вида (*a*) или (*b*).

Как и в случае струны, ищем сначала частное решение диференциального уравнения (1') в виде:

$$u=T(t)\cdot X(x). \tag{5}$$

Подставив в уравнение (1'), получим:

$$T''X+a^2TX^{(IV)}=0$$

или

$$\frac{T''}{a^2T}=-\frac{X^{(IV)}}{X}=-k^4,$$

где k^4 — постоянное, пока произвольное.

Таким образом мы находим:

$$T'' + a^2k^4T = 0, \quad (6) \qquad X^{(IV)} - k^4X = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (6) есть:

$$T(t) = A\sin(ak^2t + \alpha), \tag{8}$$

где A и α — произвольные постоянные.

Что касается общего решения уравнения (7), то оно будет:

$$X(x) = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx} + C_3\cos kx + C_4\sin kx,$$

так как характеристическое уравнение $r^4 - k^4$ имеет корни: $k, -k, ik, -ik$.

Если выразить e^{kx} и c^{-kx} через $\operatorname{ch} kx$ и $\operatorname{sh} kx$ и изменить значения произвольных постоянных C_1, C_2, то общее решение можно представить в виде:

$$X(x) = C_1\operatorname{ch} kx + C_2\operatorname{sh} kx + C_3\cos kx + C_4\sin kx. \tag{9}$$

Теперь мы рассмотрим отдельно два случая граничных условий (a) или (b).

a) В случае граничных условий (a) должны иметь:

$$X(o) = C_1 + C_3 = 0, \quad X''(o) = k^2(C_1 - C_3) = 0,$$
$$X(l) = C_1\operatorname{ch} kl + C_2\operatorname{sh} kl + C_3\cos kl + C_4\sin kl = 0,$$
$$X''(l) = k^2(C_1\operatorname{ch} kl + C_2\operatorname{sh} kl - C_3\cos kl - C_4\sin kl) = 0.$$

Эти условия очевидно при $k \neq 0$ приводятся к следующим:

$$C_1 = C_3 = 0.$$
$$C_2\operatorname{sh} kl + C_4\sin kl = 0, \quad C_2\operatorname{sh} kl - C_4\sin kl = 0. \tag{10}$$

Последняя система двух линейных однородных уравнений имеет не нулевое решение в том случае, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} kl, & \sin kl \\ \operatorname{sh} kl, & -\sin kl \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \sin kl = 0. \tag{11}$$

При выполнении этого условия, уравнения (10) приводятся к одному $C_2\operatorname{sh} kl = 0$ и дают $C_2 = 0$.

Таким образом окончательно находим: $X(x) = C_4\sin kx$.

Из уравнения (11) вытекает: $k_n = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$,

и следовательно мы получаем систему частных решений уравнения (1'), удовлетворяющих граничным условиям типа (a). Эти решения будут:

$$u_n(x, t) = C_n\sin(\omega_nt + \alpha_n)\sin k_nx, \tag{12}$$

где положено:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = \frac{an^2\pi^2}{l^2},$$

C_n и α_n суть произвольные постоянные.

Введем вместо неизвестных C_n и α_n новые неизвестные a_n и b_n, положив:

$$C_n\sin(\omega_nt + \alpha_n) = a_n\cos\omega_nt + b_n\sin\omega_nt,$$

где

$$a_n = C_n\sin\alpha_n, \quad b_n = C_n\cos\alpha_n.$$

Тогда решения (12) запишутся так:

$$u_n(x, t) = \left(a_n\cos\frac{an^2\pi^2}{l^2}t + b_n\sin\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Данное диференциальное уравнение (1'), будучи линейным и однородным, имеет решение:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an^2\pi^2}{l^2}t + b_n\sin\frac{an^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{I}$$

в котором постоянные a_n и b_n нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия (4).

Это нам даст:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{13}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2\pi^2}{l^2}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{14}$$

Следовательно если разложить данные функции $\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье по синусам в промежутке $(0, l)$, то эти разложения должны совпасть с рядами правой части равенств (13) и (14).

Следовательно формула (1) дает окончательное решение нашей задачи, если постоянные a_n и b_n мы определим, согласно (13) и (14), по формулам Фурье:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, \quad b_n = \frac{2l}{an^2\pi^2}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi. \tag{15}$$

b) Разобрав задачу свободных колебаний стержня при граничных условиях вида (a), перейдем теперь к исследованию той же задачи при граничных условиях типа (b). В этом случае из условий (b) найдем:

$$X(o) = C_1 + C_3 = 0, \quad X'(o) = k(C_2 + C_4) = 0,$$
$$X(l) = C_1\operatorname{ch} kl + C_2\operatorname{sh} kl + C_3\cos kl + C_4\sin kl = 0,$$
$$X'(l) = k(C_1\operatorname{sh} kl + C_2\operatorname{ch} kl - C_3\sin kl + C_4\cos kl) = 0.$$

Эта система упрощается и приводится к виду:

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2,$$
$$C_1(\operatorname{ch} kl - \cos kl) + C_2(\operatorname{sh} kl - \sin kl) = 0,$$
$$C_1(\operatorname{sh} kl + \sin kl) + C_2(\operatorname{ch} kl - \cos kl) = 0. \tag{16}$$

Условие необходимое и достаточное для того, чтобы последняя система имела не нулевое решение, заключается в равенстве нулю ее определителя. Таким образом получим:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} kl - \cos kl, & \operatorname{sh} kl - \sin kl \\ \operatorname{sh} kl + \sin kl, & \operatorname{ch} kl - \cos kl \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\operatorname{ch} kl - \cos kl)^2 - (\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl) = 0,$$

что по раскрытии скобок приводится к уравнению

$$\operatorname{ch} kl \cos kl = 1. \tag{17}$$

Полагая для краткости $kl = \lambda$, мы получим уравнение для определения λ:

$$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 1 \text{ или } \cos \lambda = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda},$$

которое имеет бесконечное множество действительных корней:

$$0, \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \ldots, \pm\lambda_n \ldots$$

в чем мы убеждаемся, например, начертив графики функций $\cos \lambda$ и $\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda}$.

Положительным корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ соответствуют значения параметра k: $k_1, k_2, \ldots, k_n = \frac{\lambda_n}{l}$.

Так как при этих значениях параметра k, условие (17) выполняется, то одно из уравнений (16) есть следствие другого, и мы можем положить:

$$C_1 = C(\operatorname{sh} kl - \sin kl), \quad C_2 = -C_1(\operatorname{ch} kl - \cos kl).$$

Внося значения C_1, C_2, $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$ в формулу (9), получим при $C = 1$, что очевидно не уменьшает общности, искомое решение $X_n(x)$ в виде:

$$X_n(x) = (\operatorname{sh} k_n l - \sin k_n l)(\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x) - \\ - (\operatorname{ch} k_n l - \cos k_n l)(\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x). \tag{18}$$

Отрицательные корни $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots$ мы откидываем, так как им соответствуют те же функции $X_n(x)$ (18) лишь с обратным знаком; точно так же нулевой корень дает неинтересное решение 0.

Итак мы построили систему частных решений диференциального уравнения (1'), удовлетворяющих граничным условиям вида (*b*):

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{an^2\pi^2}{l^2} t + b_n \sin \frac{an^2\pi^2}{l^2} t\right) X_n(x). \tag{19}$$

Вследствие линейного и однородного характера диференциального уравнения (1'), его решением будет:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{an^2\pi^2}{l^2} t + b_n \sin \frac{an^2\pi^2}{l^2} t\right) X_n(x). \tag{II}$$

Остается определить неизвестные коэфициенты a_n и b_n, так чтобы функция $u(x, t)$ удовлетворяла начальным условиям (4). Это нам дает:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2\pi^2}{l^2} b_n X_n(x). \tag{20}$$

Таким образом задача определения неизвестных коэфициентов a_n и b_n формулы (II) приводится к разложению данных функций $\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды по системе функций $X_n(x)$. Эти ряды аналогичны рядам Фурье, вследствие ортогональности системы функций (18).

Чтобы доказать ортогональность системы функций $X_1(x)$, $X_2(x)$, ..., $X_n(x)$, ... в промежутке $(0, l)$, мы заметим, что по самому своему определению функции $X_n(x)$ удовлетворяют уравнению (7) при $k = k_n$, т. е. $X_n^{(IV)} = k_n^4 X_n$.

Следовательно мы имеем: $X_n^{(IV)}(x) = k_n^4 X_n(x)$; $X_m^{(IV)}(x) = k_m^4 X_m(x)$.

Умножая первое из этих уравнений на $X_m(x)$, второе на $X_n(x)$, вычитая почленно и интегрируя относительно x от 0 до l, получим:

$$(k_n^4 - k_m^4) \int_0^l X_n(x) X_m(x)\, dx = \int_0^l [X_n^{(IV)}(x) X_m(x) - X_m^{(IV)}(x) X_n(x)]\, dx$$

и для доказательства свойства ортогональности

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\, dx = 0 \; (m \neq n)$$

нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства есть нуль, так как множитель $k_n^4 - k_m^4$ не равен нулю при $m \neq n$.

Применяя дважды формулу интеграции по частям к выражениям

$$X_n^{(IV)} X_m\, dx \text{ и } X_m^{(IV)} X_n\, dx$$

получим:

$$\int_0^l \left[X_n^{(IV)}(x) X_m(x) - X_m^{(IV)}(x) X_n(x)\right] dx =$$

$$= \Big[X_n'''(x) X_m(x) - X_m'''(x) X_n(x)\Big]_0^l - \Big[X_n''(x) X_m'(x) - X_m''(x) X_n'(x)\Big]_0^l.$$

В силу граничных условий (*b*) правая часть последнего равенства обращается в нуль, что и доказывает свойство ортогональности

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

При $m=n$ последний интеграл будет:

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = I_n,$$

где I_n — вполне определенное постоянное, которое мы можем вычислить.

Предположим теперь, что нам нужно разложить заданную в промежутке $(0, l)$ функцию $f(x)$ в ряд вида:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

Не касаясь вопроса о сходимости и возможности такого разложения, мы покажем лишь, как можно определить коэфициенты разложения, допуская, что такое разложение возможно и что его можно почленно интегрировать.

Умножая обе части разложения на $X_m(x)$, интегрируя относительно x от 0 до l и принимая во внимание свойство ортогональности функций $X_n(x)$, мы находим:

$$\int_0^l f(x)\,X_m(x) = A_m \int_0^l X_m^2(x)\,dx = A_m I_m,$$

откуда

$$A_m = \frac{1}{I_m}\int_0^l f(x)\,X_m(x)\,dx.$$

Мы видим таким образом, что коэфициенты разложения определяются по формулам, аналогичным формулам Фурье.

Возвращаясь к равенствам (20), мы усматриваем, что коэфициенты a_n и b_n должны быть вычислены по формулам:

$$a_n = \frac{1}{I_n}\int_0^l \varphi(x)\,X_n(x)\,dx, \quad b_n = \frac{l^2}{an^2\pi^2 I_n}\int_0^l \psi(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Итак формула (11) даст решение нашей задачи, при условии, что a_n и b_n в ней заменяются последними выражениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Краткий очерк теории почти периодических функций

Ряды Фурье являются прекрасным аналитическим аппаратом для изображения периодических функций. Так мы знаем (§ 15), что функции $f(x)$, периода $p=\frac{2\pi}{k}$, соответствует тригонометрический ряд Фурье вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nkx + b_n \sin nkx),$$

коэфициенты которого определяются по формулам:

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos nkx\,dx,\ b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin nkx\,dx\ (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Как было указано в § 15 первой части, этот ряд Фурье можно также записать в комплексной форме:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inxk}, \tag{1}$$

полагая:

$$c_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-inkx}\,dx\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

Из § 1 и 8 первой части известно, что средняя квадратичная погрешность j_N приближенного выражения функции $f(x)$ посредством тригонометрической суммы Фурье:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inkx} \tag{3}$$

стремится к нулю, когда $N \to \infty$, т. е.

$$j_N^2 = \frac{1}{p}\int_0^p \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inkx}\right|^2 dx \to 0, \text{ при } N\to\infty. \tag{4}$$

Это заключение равносильно равенству Парсеваля (§ 8), которое следовательно выражает, что функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности апроксимирована в среднем посредством сумм Фурье (3).

Таким образом периодическая функция может быть разложена в ряд из гармонических колебаний, т. е. колебаний вида $c_n e^{inkx}$.

Естественно возникает проблема исследовать те функции, которые могут быть разложены в ряды из периодических колебаний вида $c_n e^{i\lambda_n x}$, где показатели λ_n — совершенно произвольные действительные числа. Эта проблема привела Гаральда Бора к построению теории особого класса функций действительного переменного, содержащего в себе как частный случай класс непрерывных периодических функций. Бор опубликовал предварительные результаты в конце 1923 г. и дал стройное изложение своей теории в ряде мемуаров, появившихся в журнале „Acta Mathematica", начиная с 1924 г.

Пусть $f(x)$ непрерывная функция, определенная для всех значений действительного переменного $x(-\infty < x < +\infty)$. Ради общности и удобства дальнейших формулировок мы будем предполагать $f(x)$ комплексной функцией, $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ обозначают непрерывные действительные функции действительного переменного x. Очевидно, что для непрерывной функции $f(x)$ периода p существуют действительные числа периода $\tau_n = np$, удовлетворяющие условию:

$$f(x+\tau_n) - f(x) = 0 \text{ при всяком } x.$$

При этом все числа τ_n суть кратные p, т. е. числа τ_n образуют арифметическую прогрессию. Обобщая это определение, мы назовем вместе с Бором непрерывную функцию $f(x)$ почти периодической, если для любого положительного числа ε можно найти „почти периоды" $\tau = \tau(\varepsilon)$, удовлетворяющие условию:

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ при всяком } x,$$

причем эти числа τ расположены не реже некоторой арифметической прогрессии. Последнее требование более точно можно выразить так: существует длина $l = l(\varepsilon)$ такая, что внутри всякого интервала этой длины найдется по крайней мере один „почти период".

Другими словами для каждого положительного постоянного ε должно существовать бесконечное множество „почти периодов" $\tau = \tau(\varepsilon)$, и множество этих „почти периодов" τ не должно нигде образовывать произвольно больших пустот.

Заметим, что это последнее требование, т. е. требование существования чисел $l(\varepsilon)$, является весьма существенным для всей теории.

Ясно, что непрерывные чисто периодические функции содержатся в классе почти периодических функций: действительно, если $f(x)$ имеет период p, то для каждого ε все периоды $np\,(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ могут быть рассматриваемы как „почти периоды" и следовательно здесь возможно выбрать длину $l = l(\varepsilon)$ даже независящей от ε, например положить $l = 2p$. Из определения почти периодических функций можно вывести ряд их свойств, так как из него следует, что течение функции для любых значений x воспроизводит с точностью до ε ее течение в некотором интервале длины l, например в интервале $0 < x < l$. Отсюда мы немедленно убеждаемся, что $f(x)$ ограничена для всех значений x: в самом деле, если внутри промежутка $(0, l)$ непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| < g$ и $\varepsilon < 1$, то для всякого x имеем:

$$|f(x)| < g + \varepsilon < g + 1.$$

Далее легко показать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$, т. е. для всякого ε, $\varepsilon > 0$, существует положительное число h такое, что неравенство

$$|f(x+\delta) - f(x)| < \varepsilon \text{ при } |\delta| < h$$

имеет место для всех значений переменного x.

Отметим два очевидных следствия, вытекающих из последнего предложения:

1) всякое достаточно малое по своему абсолютному значению число δ, $|\delta| < h$, является „почти периодом" относительно данного ε;

2) если τ есть „почти период" относительно ε, то $\tau + \delta$ тоже „почти период", относящийся к 2ε.

Таким образом „почти периоды" функции $f(x)$ изображаются на оси абсцисс не точками, а интервалами и притом не слишком редко расположенными; арифметический подсчет показывает, что эти интервалы для двух разных почти периодических функций после конечного числа повторений перекрываются; тогда любая общая точка этих перекрывающихся интервалов представляет общий „почти период" для обеих функций; отсюда же легко показать, что наши две функции, имея общие „почти периоды", дадут в сумме новую почти периодическую функцию.

Пользуясь этой схемой рассуждений, мы доказываем весьма важное свойство почти периодических функций, а именно их инвариантность при сложении. Значение этого предложения становится особенно ценным, если заметить, что сумма двух чисто периодических функций, вообще говоря, не является чисто периодической функцией;

более точно две периодические функции при сложении дают периодическую же функцию только в том случае, когда периоды слагаемых функций находятся в соизмеримом отношении.

Так как чисто периодическая функция представляет специальный случай почти периодической функции, то из упомянутого выше предложения инвариантности при сложении вытекает следствие:

сумма конечного числа непрерывных чисто периодических функций, например каждая сумма вида:

$$\sum_{n=1}^{N} C_n e^{i\lambda_n x},$$

где λ_n — произвольные действительные числа, есть почти периодическая функция. Простейшим примером почти периодической функции, не являющейся чисто периодической, может служить функция

$$f(x) = A\cos\alpha x + B\sin\beta x,$$

где A, B, α, β суть действительные числа, причем отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ — иррационально.

Далее легко доказать, что квадрат почти периодической функции есть функция тоже почти периодическая. В самом деле, если $|f(x)| \leqslant M$, то мы можем написать:

$$|f^2(x+\tau) - f^2(x)| = |f(x+\tau) + f(x)|\,|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

где τ есть „почти период" функций $f(x)$ относительно $\frac{\varepsilon}{2M}$. Полученное неравенство показывает, что это же число τ является „почти периодом" функции $f^2(x)$ относительно ε.

Пользуясь свойством инвариантности почти периодических функций при сложении и возведении в квадрат, немедленно установим их инвариантность при умножении, если отметим тождество:

$$f\cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

Наконец легко видеть, что если $f(x)$ есть почти периодическая функция, причем $|f(x)| > \alpha > 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ есть также почти периодическая функция.

В самом деле из неравенства:

$$\left|\frac{1}{f(x+\tau)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{f(x)\cdot f(x+\tau)}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2}|f(x+\tau) - f(x)|$$

следует, что число τ есть „почти период" функции $\frac{1}{f(x)}$ относительно ε, если оно будет „почти периодом" функции $f(x)$ относительно $\alpha^2\varepsilon$.

Из указанных выше предложений вытекает общее заключение: каждая рациональная операция над почти периодическими функциями дает всегда функцию почти периодическую, если только не приходится делить на функции, которые могут принимать значения, произвольно близкие к нулю. Далее легко обнаружить, что предельная функция $F(x)$ последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, равномерно сходящейся в интервале $-\infty < x < +\infty$, есть почти периодическая функция, если отдельные функции $f_n(x)$ суть почти периодические.

Действительно вследствие непрерывности функций $f_n(x)$ предельная функция $F(x)$ также непрерывна. Пусть дано ε, $\varepsilon > 0$. Мы выберем число $N = N(\varepsilon)$ столь большим, чтобы для всех x существовало неравенство:

$$|F(x) - f_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда при любом τ имеет место неравенство:

$$|F(x+\tau) - F(x)| \leqslant |f_N(x+\tau) - f_N(x)| + \frac{2\varepsilon}{3}\quad(-\infty < x < +\infty),$$

из которого вытекает, что каждый „почти период" τ функции $f_N(x)$, принадлежащий числу $\frac{\varepsilon}{3}$, будет „почти периодом" функции $F(x)$ относительно ε. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\lambda_n x},$$

где показатели λ_n — произвольные действительные числа, предполагая его равномерно сходящимся при $-\infty < x < \infty$.

Сумма этого ряда $F(x)$ является предельной функцией для частичных сумм

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{i\lambda_n x},$$

которые по условию к ней равномерно сходятся. С другой стороны, каждая $f_N(x)$, будучи суммой периодических функций, есть функция почти периодическая. Следовательно в силу только что разобранной теоремы сумма $F(x)$ есть функция почти периодическая.

Прежде чем получить разложение почти периодической функции на чисто периодические колебания, мы должны рассмотреть одно общее свойство почти периодической функции, заключающееся в существовании ее среднего значения. Это свойство можно выразить в виде следующего предложения: **для каждой почти периодической функции $f(x)$ существует среднее значение:**

$$M[f(x)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx,$$

т. е. **выражение**

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

стремится к определенному конечному пределу, когда $T\to\infty$.

В случае чисто периодической функции $f(x)$ периода p это предложение становится очевидным, а среднее значение совпадает в этом случае с

$$\frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx.$$

Действительно, полагая $T = np + t$, где $0 \leqslant t \leqslant p$, имеем:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^{np} f(x)\,dx + \frac{1}{T}\int_{np}^T f(x)\,dx.$$

Заметив, что

$$\int_0^{np} f(x)\,dx = n\int_0^p f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{np}^T f(x)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx,$$

перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{n}{T}\int_0^p f(x)\,dx + \frac{1}{T}\int_0^t f(x)\,dx,$$

откуда переходом к пределу при $T\to\infty$ (а значит и $n\to\infty$) получим:

$$\lim \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx,$$

так как

$$\frac{1}{T}\int_0^t f(x)\,dx \to 0, \quad \text{а} \quad \frac{n}{T} = \frac{n}{np+t} \to \frac{1}{p}.$$

Что же касается доказательства этой теоремы о существовании среднего значения для почти периодической функции, то оно опирается на тот факт, что с точностью до ε все значения почти периодической функции повторяют ее значения в интервале $0 < x < l$.

Теорема о среднем значении почти периодических функций может быть доказана в следующей более общей форме: **выражение**

$$\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

стремится равномерно относительно α к значению $M\{f(x)\}$, когда $T\to\infty$. Отсюда при $\alpha = -T$ в частности следует:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(x)\,dx = M\{f(x)\},$$

что в соединении с равенством

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = M\{f(x)\}$$

дает нам другое определение среднего значения:

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^T f(x)\,dx.$$

Переходя теперь к определению ряда Фурье для почти периодической функции $f(x)$, берем выражение:

$$f(x)\,e^{-i\lambda x}, \tag{5}$$

которое изображает при всяком действительном значении λ почти периодическую функцию, будучи произведением почти периодической функции $f(x)$ на чисто периодическую функцию $e^{-i\lambda x}$.

Рассмотрим среднее значение этого произведения (5), существующее в силу сказанного выше для всякого λ. Оно представляет некоторую функцию $c(\lambda)$:

$$c(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{6}$$

Изучим эту функцию $c(\lambda)$ сначала для частного случая, предполагая $f(x)$ функцией периодической.

Полагая $T = np$, где p — период функции $f(x)$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} c(\lambda) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{np}\int_0^{np} f(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{np}\int_0^{p} f(x)\, e^{-i\lambda x}\left[1 + e^{-i\lambda p} + e^{-2i\lambda p} + \ldots + e^{-i(n-1)\lambda p}\right]dx. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Равенство (7) мы получили, разбив интеграл $\int_0^{np}$ на n слагаемых, соответственно промежуткам интегрирования $(0, p), (p, 2p), \ldots [(n-1)p, np]$, и преобразуя затем все интегралы к пределам 0 и p, пользуясь при этом периодичностью функции $f(x)$.

Считая $p = \frac{2\pi}{k}$, мы видим, что при $\lambda = mk\ (m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$ все слагаемые выражения (7), заключенные в скобки, обращаются в единицу, и следовательно получаем:

$$c(mk) = c_m = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\, e^{-imkx}\,dx. \quad (8)$$

Сравнивая выражение (8) с формулой (2), мы убеждаемся, что при значениях λ, кратных k, функция $c(\lambda)$ принимает значения комплексных коэфициентов Фурье функции $f(x)$. С другой стороны, при $\lambda \neq mk$, мы имеем:

$$1 + e^{-i\lambda p} + e^{-2i\lambda p} + \ldots + e^{-i(n-1)\lambda p} = \frac{1 - e^{-in\lambda p}}{1 - e^{-i\lambda p}},$$

откуда следует в силу (7), что $c(\lambda)$ при таких значениях λ равна нулю.

Обращаясь к общему случаю почти периодической функции, естественно ожидать, что и в этом случае функция $c(\lambda)$ также будет не равна нулю лишь при исключительных значениях λ.

Центральным моментом всей теории почти периодических функций является предложение о том, что, *какова бы ни была почти периодическая функция $f(x)$, всегда существует по крайней мере одно значение λ, при котором функция $c(\lambda)$ не равна нулю*. Приняв это предложение, легко доказать, что $c(\lambda)$ не равна нулю лишь при исключительных значениях λ. Действительно, если взять конечное число произвольных значений λ_m с соответствующими им числами $c(\lambda_m)$ и вычислить выражение:

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{m=1}^{n} c(\lambda_m)\, e^{i\lambda_m x}\right|^2\right\}, \quad (9)$$

то после вычислений получим:

$$M\left\{|f(x)|^2\right\} - \sum_{m=1}^{n} |c(\lambda_m)|^2. \quad (9')$$

Эти вычисления выполняются таким образом [1]:

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{m=1}^{n} c(\lambda_m)\, e^{i\lambda_m x}\right|^2\right\} =$$

$$= M\left\{\left(f(x) - \sum_{m=1}^{n} c(\lambda_m)\, e^{i\lambda_m x}\right)\left(\bar{f}(x) - \sum_{m=1}^{n} \bar{c}(\lambda_m)\, e^{-i\lambda_m x}\right)\right\} =$$

$$= M\{f(x)\cdot\bar{f}(x)\} - \sum_{m=1}^{n} \bar{c}(\lambda_m)\, M[f(x)\, e^{-i\lambda_m x}] - \sum_{m=1}^{n} c(\lambda_m)\, M[\bar{f}(x)\, e^{i\lambda_m x}] +$$

$$+ \sum_{\left.\begin{smallmatrix} m_1 \\ m_2 \end{smallmatrix}\right\} = 1}^{n} c(\lambda_{m_1})\,\bar{c}(\lambda_{m_2})\, M[e^{i(\lambda_{m_1} - \lambda_{m_2})x}],$$

откуда, замечая что

$$M\{e^{i(\lambda_{m_1} - \lambda_{m_2})x}\} = \begin{cases} 0 \text{ для } m_1 \neq m_2 \\ 1 \text{ для } m_1 = m_2, \end{cases}$$

получим:

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{m=1}^{n} c(\lambda_m)\, e^{i\lambda_m x}\right|^2\right\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{m=1}^{n} |c(\lambda_m)|^2. \quad (10)$$

Равенство (10) доказывает совпадение выражений (9) и (9'). Из этой формулы (10) вытекает неравенство:

$$\sum_{m=1}^{n} |c(\lambda_m)|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}, \quad (11)$$

так как левая часть формулы (10) является не отрицательным числом представляя среднее значение действительной не отрицательной функции.

Из последнего же неравенства (11), в котором $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть произвольные между собой различные действительные числа, следует далее, что для каждого ε, $\varepsilon > 0$, может существовать не более как конечное число значений λ, для которых $|c(\lambda)| > \varepsilon$. Давая ε последовательные значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ обнаружим, что все значения λ, для которых

[1] Черточкой наверху мы обозначаем величину, сопряженную с данной.

функция $c(\lambda)$ не равна нулю, могут быть перенумерованы с помощью натурального ряда чисел.

Обозначим выделенные исключительные значения λ через $l_1, l_2, \ldots l_n, \ldots$, перенумеровав их произвольным образом, и назовем эти значения **показателями Фурье** функции $f(x)$. Обозначим далее соответствующие им средние значения $c(l_1), c(l_2), \ldots$ через $C_1, C_2, \ldots$ и назовем эти значения коэфициентами Фурье функции $f(x)$.

Ряд, образованный посредством только что определенных чисел l_m и C_m вида:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{il_m x}, \tag{12}$$

будем называть **рядом Фурье, соответствующим функции** $f(x)$, что символически запишем так:

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{il_m x}.$$

Из неравенства (11), которое в предположении, что λ_m суть показатели Фурье функции $f(x)$, перепишется так:

$$\sum_{m=1}^{n} |C_m|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\} \tag{11}$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m|^2.$$

Оказывается, что неравенство (11') в пределе при $n \to \infty$ обращается в равенство:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m|^2 = M\{|f(x)|^2\}, \tag{13}$$

которое выражает собой обобщение на почти периодические функции равенства Парсеваля, известного из теории тригонометрических рядов Фурье (часть I, § 8).

Первое доказательство равенства Парсеваля (13) для почти периодических функций дано автором теории Бором при помощи весьма тонких и сложных аналитических выкладок. Большое упрощение внесено Вейлем при помощи обобщения теории интегральных уравнений.

Из формулы (10), в силу равенства Парсеваля (13), следует:

$$M\left\{\left|f(x) - \sum_{m=1}^{n} C_m e^{il_m x}\right|^2\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т. е., что **почти периодическая функция с любой сте**-

пенью точности может быть апроксимирована в среднем посредством сумм вида:

$$\sum_{m=1}^{n} C_m e^{il_m x}.$$

Таким образом мы приходим к результатам, о которых речь была в начале этого обзора в применении их к рядам Фурье чисто периодических функций.

Возникает вопрос: **не будут ли показатели Фурье l_m почти периодической функции связаны какими-либо условиями?** На этот вопрос можно ответить отрицательно, доказав следующее предложение.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{n} c_n e^{i\lambda_n x}$, где действительные показатели λ_n все между собой различны и коэфициенты c_n не равны нулю, сходится равномерно в интервале $-\infty < x < +\infty$ (или он состоит из конечного числа членов) и таким образом по ранее доказанному, его сумма $f(x)$ есть почти периодическая функция. Тогда ряд Фурье $\sum_{n=1}^{n} C_n e^{il_n x}$ этой функции $f(x)$ тождественен с данным рядом.

Для доказательства этого предложения нужно обнаружить, что

$$c(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} c_n & \text{для } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{для } \lambda \neq \lambda_n. \end{cases}$$

Справедливость же последнего равенства следует из предположения, что данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$, если он содержит бесконечно много членов, равномерно сходится к $f(x)$ во всем интервале $-\infty < x < +\infty$.

Действительно при этом условии можно почленно выполнить процесс

$$\lim \frac{1}{T}\int_0^T \text{ для ряда } \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$$

и так как от присоединения фактора $e^{-i\lambda_n x}$ не нарушается равномерная сходимость, то имеем для каждого постоянного λ:

$$c(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}\,dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i(\lambda_n-\lambda)x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_n-\lambda)x}\,dx = \begin{cases} c_n & \text{для } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{для } \lambda \neq \lambda_n. \end{cases}$$

Из только что доказанной теоремы вытекает следствие: показатели Фурье l_n почти периодической функции не связаны никакими условиями в том смысле, что каждая произвольно данная (конечная или бесконечная) последовательность действительных между собой различных чисел λ_n может быть рассматриваема как последовательность показателей Фурье некоторой почти периодической функции. Таким образом например последовательность показателей Фурье может иметь предельные точки на конечном расстоянии или даже быть повсюду плотной во всем интервале $-\infty < x < +\infty$.

В самом деле, выбирая для произвольно заданных показателей λ_n коэфициенты $c_n \neq 0$ так, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходился, мы видим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$ будет равномерно сходящимся к $f(x)$.

Следовательно по только что доказанной теореме этот ряд будет рядом Фурье функции $f(x)$.

Возникает вопрос о сходимости образованных обобщенных рядов Фурье.

Известно, что тригонометрический ряд Фурье даже в случае непрерывности периодической функции может не сходиться всюду, тем более это будет так для расширенного класса почти периодических функций. Однако некоторые положительные результаты получены и в этом направлении.

Так показано, что ряд Фурье почти периодической функции сходится абсолютно и равномерно, если все его коэфициенты C_n положительны.

Далее имеет место следующая весьма глубокая теорема: если все показатели Фурье l_n представляют систему линейно независимых чисел (т. е. не существует соотношений вида $m_1 l_{n_1} + m_2 l_{n_2} + \cdots + m_k l_{nk} = 0$ с целыми m_l), то ряд Фурье сходится абсолютно, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|$ (а следовательно наш ряд сходится и равномерно).

На этом мы закончим краткий обзор теории почти периодических функций.

Другие книги нашего издательства:

URSS

Теория вероятностей

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. **Элементарное введение в теорию вероятностей.**
Гнеденко Б. В. **Математика и контроль качества продукции.**
Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. **Введение в теорию массового обслуживания.**
Хинчин А. Я. **Работы по математической теории массового обслуживания.**
Хинчин А. Я. **Асимптотические законы теории вероятностей.**
Хинчин А. Я. **Математические основания квантовой статистики.**
Феллер В. **Введение в теорию вероятностей и ее приложения.** В 2 т.
Боровков А. А. **Теория вероятностей.**
Боровков А. А. **Эргодичность и устойчивость случайных процессов.**
Сенатов В. В. **Центральная предельная теорема.**
Дворяткина С. Н., Ляхов Л. Н. **Лекции по классической теории вероятностей.**
Пытьев Ю. П. **Возможность. Элементы теории и применения.**
Григорян А. А. **Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей.**
Кац М. **Вероятность и смежные вопросы в физике.**
Яглом А. М., Яглом И. М. **Вероятность и информация.**
Тактаров Н. Г. **Теория вероятностей и математическая статистика.**

Математическая логика

Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. **Математическая логика.**
Драгалин А. Г. **Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ.**
Карпенко А. С. **Логики Лукасевича и простые числа.**
Карпенко А. С. **Фатализм и случайность будущего: Логический анализ.**
Бахтияров К. И. **Логика с точки зрения информатики.**
Перминов В. Я. **Развитие представлений о надежности математического доказательства.**
Петров Ю. А. **Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости.**
Финн В. К. (ред.) **Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах.**
Финн В. К. (ред.) **Многозначные логики и их применения.** В 2 т.
Аншаков О. М. (ред.) **ДСМ-метод автоматического порождения гипотез.**
Бежанишвили М. Н. **Логика модальностей знания и мнения.**

Серия «Физико-математическое наследие: математика (основания математики и логика)»

Клини С. **Математическая логика.**
Клини С. **Введение в метаматематику.**
Чёрч А. **Введение в математическую логику.**
Гудстейн Р. Л. **Математическая логика.**
Мендельсон Э. **Введение в математическую логику.**
Бурбаки Н. **Теория множеств.**
Хаусдорф Ф. **Теория множеств.**
Френкель А. А., Бар-Хиллел И. **Основания теории множеств.**
Лебег А. **Об измерении величин.**
Лакатос И. **Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы.**
Гильберт Д., Аккерман В. **Основы теоретической логики.**
Пойа Д. **Математика и правдоподобные рассуждения.**
Гейтинг А. **Интуиционизм.**

Другие книги нашего издательства:

URSS

Учебники и задачники по математике

Краснов М. Л. и др. **Вся высшая математика.** Т. 1–7.
Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. **Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.**
Тактаров Н. Г. **Справочник по высшей математике для студентов вузов.**
Боярчук А. К. и др. **Справочное пособие по высшей математике (Антидемидович).** Т. 1–5.
Босс В. **Лекции по математике.** Т. 1–15:
Т. 1: **Анализ;** Т. 2: **Дифференциальные уравнения;** Т. 3: **Линейная алгебра;**
Т. 4: **Вероятность, информация, статистика;** Т. 5: **Функциональный анализ;**
Т. 6: **От Диофанта до Тьюринга;** Т. 7: **Оптимизация;** Т. 8: **Теория групп;** Т. 9: **ТФКП;**
Т. 10. **Перебор и эффективные алгоритмы;** Т. 11. **Уравнения математической физики;**
Т. 12. **Контрпримеры и парадоксы;** Т. 13. **Топология;**
Т. 14. **Теория чисел;** Т. 15. **Нелинейные операторы и неподвижные точки;**
Т. 16. **Теория множеств: От Кантора до Коэна.**
Алексеев В. М. (ред.) **Избранные задачи по математике из журнала "АММ".**
Жуков А. В. и др. **Элегантная математика. Задачи и решения.**
Медведев Г. Н. **Задачи вступительных экзаменов по математике на физфаке МГУ.**
Александров И. И. **Сборник геометрических задач на построение (с решениями).**
Попов Г. Н. **Сборник исторических задач по элементарной математике.**
Золотаревская Д. И. **Теория вероятностей. Задачи с решениями.**
Золотаревская Д. И. **Сборник задач по линейной алгебре.**
Мостеллер Ф. **Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.**
Антоневич А. Б. и др. **Задачи и упражнения по функциональному анализу.**
Городецкий В. В. и др. **Методы решения задач по функциональному анализу.**
Грищенко А. Е. и др. **Теория функций комплексного переменного: Решение задач.**
Яглом А. М., Яглом И. М. **Неэлементарные задачи в элементарном изложении.**
Супрун В. П. **Математика для старшеклассников.** Кн. 1, 2.
Базылев Д. Ф. **Олимпиадные задачи по математике.**
Куланин Е. Д., Федин С. Н. **Геометрия треугольника в задачах.**
Эвнин А. Ю. **Задачник по дискретной математике.**
Киселев А. П. **Задачи и упражнения к «Элементам алгебры».**
Киселев А. П. **Систематический курс арифметики.**