Физико-Математическое Наследие

И. И. Привалов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математика
Теория интегральных уравнений
URSS

Об авторе

Иван Иванович ПРИВАЛОВ
(1891–1941)

Выдающийся советский математик, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН СССР (1939). В 1913 г. окончил Московский университет. Ученик Д. Ф. Егорова, участник математической школы Н. Н. Лузина (знаменитой «Лузитании»). Профессор Саратовского (с 1918 г.) и Московского (с 1922 г.) университетов. Также преподавал в Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского.

Основные труды И. И. Привалова были посвящены теории функций и интегральным уравнениям. В диссертации «Интеграл Коши» он обобщил единственность так называемой теоремы Лузина—Привалова, доказал свою основную лемму для интегралов типа Коши и свою теорему об особом интеграле. И. И. Привалов положил начало исследованиям по теории однолистных функций в СССР. Ему принадлежат работы по теории тригонометрических рядов, теории субгармонических функций (монография «Субгармонические функции»), а также получившие широкую известность учебники «Введение в теорию функций комплексного переменного», «Аналитическая геометрия» и предлагаемый читателю «Интегральные уравнения».

3713 ID 107672

9 785397 011792

Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине http://URSS.ru

И. И. Привалов
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
URSS

Физико-математическое наследие:
математика (теория интегральных уравнений)

И. И. Привалов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено Наркомпросом РСФСР
в качестве учебника для университетов

Издание третье

URSS
МОСКВА

ББК 22.161.6 22.311

Привалов Иван Иванович

Интегральные уравнения. Изд. 3-е. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 248 с. (Физико-математическое наследие: математика (теория интегральных уравнений).)

Настоящая книга представляет собой систематический курс теории интегральных уравнений. Она состоит из двух частей: в первой части дается изложение теории интегральных уравнений, вторая посвящена приложениям этой теории к различным проблемам математической физики. Особый интерес представляет глава IV первой части книги, в которой ряд проблем из теории интегральных уравнений с симметрическим ядром исследуется с помощью интеграла Лебега и теории множеств.

Рекомендуется математикам, инженерам, а также преподавателям, студентам и аспирантам естественных и технических вузов.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 15,5. Зак. № 2935.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-01179-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга заключает в себе две части: в первой части дается изложение теории интегральных уравнений, вторая же посвящена приложениям этой теории к различным проблемам математической физики.

Теория интегральных уравнений в законченном виде изложена в первых трех главах первой части; основные выводы этой теории находят себе приложения во второй части книги. Что касается четвертой главы первой части, содержащей анализ некоторых проблем симметрического ядра с помощью интеграла Лебега и теории меры множеств, то она имеет дополнительное значение, и остальная часть книги от нее не зависит. Вследствие этого читатель, незнакомый с основами теории меры множеств и интеграла Лебега, может при чтении книги опустить четвертую главу первой части, не теряя возможности понимания остального материала.

При составлении этой книги я пользовался следующими руководствами:

Heywood-Fréchet, L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique, Paris, 1912.

Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. II, перевод с пятого французского издания М. Г. Шестопал, под редакцией проф. В. В. Степанова, ГТТИ, 1934.

Lalesco T., Introduction à la théorie des équations intégrales, 1912.

Frank und *Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen, т. I, 1930.

Sternberg W., Potentialtheorie, 1926.

Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, перевод с английского Д. А. Райкова, под ред. проф. А. О. Гельфонда, ГТТИ, 1933.

Из последней книги мною взяты задачи для упражнений, приложенные к различным главам и снабженные мною ответами.

Наконец, труд написания этой книги был значительно облегчен благодаря запискам читанных мною в I МГУ в 1930 г. лекций, составленным моим слушателем Г. Ф. Козловским, которому я выражаю глубокую благодарность.

И. Привалов

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Часть первая

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение 7

§ 1. Значение интегральных уравнений для приложений . . . —
§ 2. Колебание стержня. Интегральные уравнения Фредгольма . . . —
§ 3. Задача Дирихле . . . 11
§ 4. Задача Коши. Интегральные уравнения Вольтерра II рода . . . 14
§ 5. Уравнения Вольтерра как частный случай уравнений Фредгольма . 16
§ 6. Задача Абеля. Интегральные уравнения Вольтерра I рода . . . —
§ 7. Регулярное ядро . . . 20
§ 8. Случай многих переменных . . . 21
§ 9. Неравенство Шварца . . . 22
§ 10. Ортогональные функции . . . —
§ 11. Ортогонализация и нормирование . . . —
§ 12. Обобщенные коэфициенты Фурье . . . 23
§ 13. Неравенство Бесселя . . . 24

Задачи . . . 25

Глава I

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ . . . 27

§ 1. Приложение метода итераций к уравнениям Фредгольма . . . —
§ 2. Итерированные ядра . . . 29
§ 3. Резольвента . . . —
§ 4. Уравнения Вольтерра . . . 30
§ 5. Интегральные уравнения резольвенты . . . 33

Задачи . . . 34

Глава II

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА . . . 35

§ 1. Частный случай уравнения Фредгольма . . . —
§ 2. Общий случай . . . 37
§ 3. Неравенство Адамара . . . 46
§ 4. Сходимость рядов Фредгольма и переход к пределу . . . 49
§ 5. Интегральные уравнения резольвенты . . . 51
§ 6. Обоснование метода Фредгольма . . . 54
§ 7. Единственность решения . . . 55
§ 8. Первая теорема Фредгольма . . . —

Стр.

§ 9. Вычисление коэфициентов рядов Фредгольма . . . 56
§ 10. Фундаментальные числа . . . 57
§ 11. Решение однородного уравнения. Вторая теорема Фредгольма . . 59
§ 12. Вывод из первой и второй теорем Фредгольма . . . 71
§ 13. Ортогональность решений . . . —
§ 14. Третья теорема Фредгольма . . . 72
§ 15. Вид знаменателя резольвенты для уравнения Вольтерра . . . 76
§ 16. Квази-регулярные интегральные уравнения . . . 78
§ 17. Ядро вида $\dfrac{H(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$ . . . 80
§ 18. Ядро вида $\dfrac{H(M,P)}{MP^{\alpha}}$ . . . 86
§ 19. Особые интегральные уравнения . . . 87
§ 20. Особое интегральное уравнение с ядром вида $H(|x-s|)$ . . . 92

Задачи . . . 99

Глава III

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ . . . 101

§ 1. Интегральное уравнение тригонометрических функций . . . 102
§ 2. Ортогональность фундаментальных функций . . . 109
§ 3. Отсутствие мнимых фундаментальных чисел . . . 110
§ 4. Существование фундаментального числа . . . 111
§ 5. Спектр фундаментальных чисел . . . 115
§ 6. Полюсы резольвенты . . . 117
§ 7. Разложение ядра . . . 119
§ 8. Спектр итераций ядра . . . 122
§ 9. Разложение итераций ядра . . . 125
§ 10. Замкнутое ядро . . . 126
§ 11. Теорема Гильберта — Шмидта . . . 129
§ 12. Разложение первой итерации ядра . . . 133
§ 13. Разложение решения уравнения Фредгольма по фундаментальным функциям. Третья теорема Фредгольма . . . 134
§ 14. Разложение резольвенты по фундаментальным функциям . . . 136
§ 15. Классификация симметрических ядер . . . 139
§ 16. Ядро вида $K(x,s)\,p(s)$ . . . 140
§ 17. Теорема Мерсера . . . —

Задачи . . . 143

Глава IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ . . . 144

§ 1. Сходимость в среднем . . . —
§ 2. Критерий сходимости в среднем . . . 146
§ 3. Почленное интегрирование ряда, сходящегося в среднем . . . 148
§ 4. Минимальное свойство коэфициентов Фурье. Формула и неравенство Бесселя . . . 150
§ 5. Сходимость в среднем ряда Фурье. Равенство замкнутости нормированной ортогональной системы . . . 151
§ 6. Теорема Фишера — Рисса . . . 153
§ 7. Уравнение Фредгольма I рода . . . 154
§ 8. Существование фундаментального числа . . . 157
§ 9. Сходимость в среднем к ядру $K(x,s)$ соответствующего разложения по фундаментальным функциям . . . 162

Часть вторая

Стр.

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава I

ОБЩИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 165

§ 1. Постановка задачи 171
§ 2. Формула Грина 173
§ 3. Функция Грина . . . . —
§ 4. Фундаментальная теорема Гильберта 176
§ 5. Эквивалентность краевой задачи однородному линейному интегральному уравнению 179
§ 6. Краевая задача с симметрической функцией Грина 180
§ 7. Общие теоремы для краевой задачи с симметрической функцией Грина 182
§ 8. Случай отрицательных фундаментальных чисел 186
§ 9. Замечание относительно случая, когда $r(x)$ в интервале (a, b) обращается в нуль 189
§ 10. Неоднородная краевая задача 191
§ 11. Особый случай краевой задачи 193

Глава II

РАЗЛИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . 202

§ 1. Колебание струны . . . . —
§ 2. Распространение теплоты в брусе 207
§ 3. Некоторые вспомогательные результаты вариационного исчисления 212
§ 4. Минимум интеграла Дирихле 215
§ 5. Исследование второй вариации 221

Глава III

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА 223

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения теории потенциала . . . —
§ 2. Логарифмические потенциалы простого и двойного слоя 230
§ 3. Разрывность нормальной производной потенциала простого слоя . 231
§ 4. Нормальная производная потенциала двойного слоя 234
§ 5. Внутренняя задача Дирихле 238
§ 6. Внешняя задача Дирихле 240
§ 7. Вторая граничная задача теории потенциала 243
§ 8. Третья граничная задача теории потенциала 246

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Значение интегральных уравнений для приложений. Интегральные уравнения применяются в тех вопросах математического естествознания, где задача, выраженная в диференциальных уравнениях, содержит граничные условия.

При решении краевых задач математического естествознания при помощи диференциальных уравнений приходится расчленять задачу на следующие две: на отыскание решения диференциального уравнения и на подчинение этого решения заданным граничным условиям.

При одном и том же диференциальном уравнении метод решения задачи существенным образом зависит от вида граничных условий. Если же задачу тем или другим способом удается свести к интегральному уравнению, то это последнее будет эквивалентно всей диференциальной системе, т. е. уравнению и граничным условиям задачи в совокупности; вследствие этого нет надобности расчленять задачу указанным выше образом. Большому разнообразию возможных видов диференциальных уравнений и граничных условий противостоит весьма небольшое число типов интегральных уравнений. К одному и тому же типу интегральных уравнений сводятся весьма разнообразные диференциальные уравнения как обыкновенные, так и в частных производных, чем в значительной степени стирается принципиальное различие обоих видов диференциальных уравнений.

В силу этих особенностей интегральные уравнения являются весьма сильным средством аналитического исследования общих свойств решений широких классов задач математического естествознания.

§ 2. Колебание стержня. Интегральные уравнения Фредгольма. 1. Чтобы пояснить сказанное выше, рассмотрим в качестве примера прямолинейный упругий стержень, свободно опертый в двух точках $x=a$ и $x=b$ и подверженный действию сил, перпендикулярных его оси.

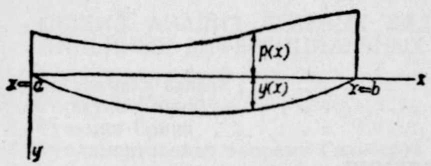
Если через $p(x)$ обозначить нагрузку на единицу длины в сечении x, а через y — прогиб оси в том же сечении, то, как известно из теории сопротивления материалов, $y(x)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{p}{EI} \quad \text{для} \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

$$y=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \text{при} \quad x=a \quad \text{и} \quad x=b, \tag{2}$$

где E — модуль упругости Юнга, а I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно его оси (черт. 1).

Эти уравнения получены из того соображения, что вторая производная от y равна изгибающему моменту M, разделенному на EI, а вторая производная от M равна p. На концах балки, очевидно, выполняются условия $y=0$ и $M=0$.



Черт. 1.

Вместо этой общей задачи рассмотрим сначала ее частный случай, когда вся нагрузка стержня состоит из отдельной силы величины 1, приложенной в точке $x=s$. Эту нагрузку будем рассматривать как предельный случай нагрузки, при которой $p(x)=0$ для $x<s-\varepsilon$ и $x>s+\varepsilon$ и $\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} p(x)\,dx=1$, как бы мало ни было ε.

Вследствие уравнения (1) функция y будет третьей степени в каждой из обеих частей стержня $a\leqslant x<s$ и $s<x\leqslant b$.

Восемь постоянных этих двух функций определяются из граничных условий (2) (всего для $x=a$ и $x=b$ — четыре условия), из требования непрерывности $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ в точке $x=s$ и, наконец, из предположения, что $\frac{d^3y}{dx^3}$ при $x=s$ имеет скачок величины $\frac{1}{EI}$, соответственно сконцентрированной в этой точке силе, равной единице. В самом деле, путем интегрирования обеих частей уравнения (1) в пределах от $x=s-\varepsilon$ до $x=s+\varepsilon$ получим

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=s+\varepsilon}-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=s-\varepsilon}=\frac{1}{EI}\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} p(x)\,dx=\frac{1}{EI}.$$

В пределе при $\varepsilon=0$ будем иметь

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{s+0}-\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{s-0}=\frac{1}{EI}.$$

Произведя вычисления и обозначая прогиб $y(x)$ в точке x через $G(x, s)$, получим

$$G(x, s)=\frac{(x-a)(s-b)}{6(b-a)EI}(x^2+s^2-2ax-2bs+2ab)$$

для $x\leqslant s$,

$$G(x, s)=\frac{(s-a)(x-b)}{6(b-a)EI}(x^2+s^2-2as-2bx+2ab)$$

для $x>s$.

Легко проверить, что функция $G(x, s)$ удовлетворяет всем перечисленным выше восьми условиям для постоянных. Эта функция $G(x, s)$, дающая прогиб в точке x, отвечающий силе 1, сконцентрированной в точке s, называется *функцией Грина* проблемы, выраженной уравнениями (1) и (2).

Если нагрузка состоит из n отдельных сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$, сосредоточенных в точках $s_1, s_2, \ldots, s_n$, то прогиб $y(x)$ в точке x получается через наложение n элементарных прогибов $G(x, s_i)P_i$, т. е.

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} G(x, s_i)P_i.$$

Обращаясь теперь к общему случаю произвольной нагрузки $p(s)$, мы получим прогиб y в точке x посредством сложения прогибов, определяемых силами $p(s)\,ds$, т. е.

$$y(x)=\int\limits_a^b G(x, s)\,p(s)\,ds. \tag{3}$$

Формула (3) эквивалентна диференциальному уравнению (1) с граничными условиями (2).

2. Согласно этой формуле вычисление прогиба y сведено к квадратуре. Если бы мы, наоборот, искали функцию нагрузки, соответствующую данной форме прогиба $y(x)$, то в уравнении (3) неизвестной была бы функция p, а известной — функция y. В этом случае наше уравнение (3) было бы *интегральным уравнением*.

Согласно терминологии, введенной Гильбертом, уравнение вида

$$f(x)=\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{I}$$

называют *интегральным уравнением Фредгольма* I *рода*, считая φ за неизвестную функцию, а f — за известную. Функция двух переменных $K(x, s)$ дана и носит название *ядра* интегрального уравнения. Таким образом уравнение (3) будет интегральным уравнением Фредгольма I рода, где неизвестной функцией является p, а данной y. Мы видим, что к интегральному уравнению Фредгольма I рода мы пришли из искусственной постановки задачи: определить нагрузку p, зная форму прогиба y; сама же прямая задача определения прогиба y по данной функции нагрузки p решается по формуле (3) квадратурой.

Вообще уравнения Фредгольма I рода, встречающиеся в приложениях, имеют частный вид, и их рассмотрение в общей форме представляет лишь математический интерес.

3. Если, как мы это видели, определение формы прогиба оси стержня при задании функции нагрузки в случае равновесия стержня приводит нас к выполнению лишь квадратуры (3), то задача о колебании стержня, как сейчас будет показано, приводится к интегральному уравнению нового типа.

Рассмотрим тяжелый упругий стержень, не имеющий внешней нагрузки, и обозначим через $\mu(x)$ его массу в точке x, рассчитанную на единицу длины. Предположим, что он совершает гармоническое колебание с амплитудой $u(x)$ и частотой χ, так что $y=u\sin\chi t$. По принципу Даламбера мы получим уравнение движения стержня, если в уравнении равновесия (1) заменим функцию нагрузки $p(x)$ через силу инерции:

$$p(x) = -\mu(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} =$$
$$= -\mu(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u\sin\chi t) = \chi^2\mu(x)\,u(x)\sin\chi t,$$

и, следовательно, уравнение (1) по сокращении на $\sin\chi t$ перейдет в уравнение

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \chi^2\frac{\mu(x)}{EI}u, \qquad (1')$$

граничные же условия останутся в виде (2). Этой диференциальной системе [уравнение (1′) с граничными условиями (2)] соответствует интегральное уравнение

$$u(x) = \chi^2\int_a^b G(x, s)\,\mu(s)\,u(s)\,ds, \qquad (4)$$

которое получается, если в формуле (3) заменим p и y их значениями, а затем сократим на $\sin\chi t$.

Уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \qquad (\mathrm{II})$$

следуя Гильберту, будем называть *однородным интегральным уравнением Фредгольма* II *рода* с данным ядром $K(x, s)$, неизвестной функцией $\varphi(x)$ и произвольным параметром λ. Очевидно, уравнение (4) нашей задачи есть однородное интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром $G(x, s)\,\mu(s)$, где функция $G(x, s)$ была точно вычислена, причем неизвестная функция φ обозначена через u, а параметр λ — через χ^2. Те значения χ, для которых уравнение (4) имеет решения, дают частоты свободных колебаний стержня, соответствующие им решения $u(x)$ определяют формы колебаний.

4. Переходя к теории вынужденных колебаний стержня, мы должны допустить, что p содержит придаточное слагаемое вида $v(x)\sin\chi t$ (где v — амплитуда, а χ — частота возмущающей силы). Желая определить гармоническое колебание стержня той же частоты, что и возмущающая сила, полагаем в формуле (3)

$$y(x) = u(x)\sin\chi t, \quad p(x) = \chi^2\mu(x)\,u(x)\sin\chi t + v(x)\sin\chi t.$$

Тогда по сокращении на $\sin\chi t$ получим

$$u(x) = \chi^2\int_a^b G(x, s)\,\mu(s)\,u(s)\,ds + f(x), \qquad (5)$$

где $f(x) = \int_a^b G(x, s)\,v(s)\,ds$ есть данная функция от x.

Уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x), \qquad (\mathrm{III})$$

следуя Гильберту, будем называть *неоднородным интегральным уравнением Фредгольма* II *рода*, где данными являются ядро $K(x, s)$ и функция $f(x)$, функция же $\varphi(x)$ есть искомая, а λ — произвольный параметр.

Очевидно, уравнение (5) вынужденных колебаний стержня есть неоднородное интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром $G(x, s)\,\mu(s)$, причем неизвестная функция обозначена через $u(x)$, а параметр λ — через χ^2.

Все задачи упругих колебаний и вообще все проблемы, сводящиеся к диференциальным уравнениям с граничными условиями, приводятся к уравнениям вида (II) и (III), причем распространение теории на случай двух или многих независимых переменных не представляет никаких принципиальных затруднений.

§ 3. Задача Дирихле. 1. Рассмотрим задачу другого характера, решение которой приводится к интегральному уравнению вида (III), а именно одну из проблем теории потенциала.

В качестве примера мы ограничимся рассмотрением так называемой проблемы Дирихле в двух измерениях. Задача заключается в том, чтобы найти такое решение диференциального уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (6)$$

которое непрерывно в данной односвязной области, включая ее границу S, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков внутри области, а на границе S принимает наперед заданные значения $f(s)$. Здесь через s мы обозначили длину дуги граничной кривой, отсчитываемую от некоторой ее начальной точки; относительно самой граничной кривой ради простоты предположим, что она в каждой точке имеет определенную касательную и кривизну (черт. 2).

Обозначая через ξ, η координаты граничной точки $s = \sigma$, а через x, y — координаты внутренней точки P, легко показать, что функция

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$$

при постоянных ξ, η удовлетворяет диференциальному уравнению (6) в каждой точке (x, y), лежащей внутри области. Действительно, это можно проверить путем подстановки в уравнение (6). Впрочем, этот факт немедленно следует из теории функций комплексного переменного, если заметить, что θ есть коэфициент при мнимой части от $\ln[\xi + i\eta - (x + iy)]$. Вследствие линейности уравнения (6) ему будет удовлетворять каждая линейная комбинация с постоянными коэфициентами выражений θ

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \operatorname{arctg}\frac{y-\eta_i}{x-\xi_i}.$$

Положим теперь

$$K(x, y; \sigma) = \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y-\eta}{x-\xi} = \frac{d\theta}{d\sigma}.$$

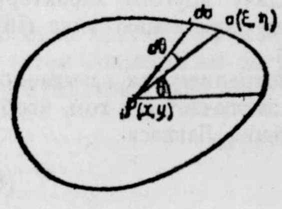
Выражение $K(x, y; \sigma)$, рассматриваемое как функция от x, y, очевидно удовлетворяет уравнению (6), так как производная по параметру σ от решения θ уравнения Лапласа должна ему удовлетворять; следовательно, решением уравнения Лапласа будет также и линейная комбинация с постоянными коэфициентами бесконечно многих выражений вида

$$K(x, y; \sigma)\, \mu(\sigma)\, d\sigma,$$

т. е.

$$u(x, y) = \int \mu(\sigma)\, K(x, y; \sigma)\, d\sigma = \int \mu(\sigma)\, d\theta, \tag{7}$$

где $\mu(\sigma)$ есть пока произвольная непрерывная функция, определенная на границе S области, и интеграл распространяется на замкнутый контур S. То обстоятельство, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (6), можно и непосредственно проверить, подставив выражение $u(x, y)$ в это уравнение, произведя дифеdoренцирование по параметрам x и y под знаком интеграла и замечая, что $K(x, y; \sigma)$ как функция x и y есть решение уравнения (6).



Черт. 2.

Вторая форма интеграла ясно показывает, что интегрирование можно мыслить распространенным на углы $d\theta$, под которыми видны линейные элементы $d\sigma$ из точки x, y (черт. 2).

2. Отсюда мы сразу усматриваем, что функция $U = u(x, y)$ при $\mu(\sigma) = \mu_0 = \text{const.}$ будет равна $\mu_0 \int d\theta$, т. е. $2\pi\mu_0$, если точка $P(x, y)$ лежит внутри области, $\pi\mu_0$ для точки P, находящейся на границе области, и нулю вне области. Таким образом функция $u(x, y)$ в рассматриваемом частном случае претерпевает разрыв непрерывности при переходе точки P через границу области.

Естественно ожидать, что и в общем случае произвольного $\mu(\sigma)$ функция $u(x, y)$, будучи непрерывной внутри и вне области, имеет границу S области линией прерывности.

Итак, рассмотрим

$$u(x, y) = \int \mu\, d\theta.$$

Пусть точка P, передвигаясь, пересекает контур в точке P_0. Отыщем $\lim u$ при приближении изнутри (u_{i0}) и извне (u_{e0}) и непосредственно значение u в точке P_0, обозначаемое через u_0, и найдем связь между ними.

Обозначим значение μ в точке P_0 через μ_0, и пусть

$$U = \int \mu_0 d\theta = \mu_0 \int d\theta.$$

Исследуем разность $u - U = \int (\mu - \mu_0)\, d\theta$ и покажем, что она непрерывна в точке P_0. В самом деле, выделим малую дугу, заключающую точку P_0; обозначим ее через S', а остальную часть контура обозначим через S''. Тогда можно написать

$$u - U = \int_{S''} (\mu - \mu_0)\, d\theta + \int_{S'} (\mu - \mu_0)\, d\theta. \tag{7'}$$

Так как в первом интеграле интеграция распространяется на контур S'', не содержащий точки P_0, то он есть непрерывная функция точки $P(x, y)$.

Величина второго интеграла может быть сделана по своему абсолютному значению сколь угодно малой, если S' взять достаточно малой. Действительно, в силу непрерывности μ разность $\mu - \mu_0$ на дуге S' может быть сделана по модулю меньшей сколь угодно малого положительного числа ε, а потому для второго интеграла имеем

$$\left| \int_{S'} (\mu - \mu_0)\, d\theta \right| < \varepsilon \int_{S'} |d\theta| < \varepsilon \int_{S} |d\theta| \leqslant C\varepsilon,$$

где C есть константа, которая для выпуклого контура равна 2π.

Рассмотрим два положения точки P, близких к точке P_0: P' внутри контура S и P'' вне его. Разность значений $u - U$ в этих точках слагается из разности значений первого интеграла в формуле (7′), которая стремится к нулю при приближении точек P' и P'' к точке P_0, и разности значений второго интеграла, которая по абсолютной величине во всяком случае меньше $2C\varepsilon$. Следовательно, не может быть скачка при прохождении точки P через P_0, т. е. $u - U$ непрерывна в точке P_0.

Из непрерывности $u - U$ в точке P_0, если принять во внимание замечание, сделанное выше относительно U, следует, что

$$u_{i0} - 2\pi\mu_0 = u_0 - \pi\mu_0 = u_{e0} - 0,$$

или

$$u_{i0} = u_0 + \pi\mu_0, \quad u_{e0} = u_0 - \pi\mu_0. \tag{8}$$

Итак, при переходе точки P через контур в точке P_0 скачок интеграла будет равен $2\pi\mu_0$, а значение его в точке P_0 есть среднее арифметическое между u_{i0} и u_{e0}.

3. Возвращаясь теперь к интересующей нас задаче Дирихле, мы перепишем первую из формул (8) так:

$$f(s) = \int K(x_s, y_s; \sigma)\, \mu(\sigma)\, d\sigma + \pi\mu(s),$$

где через x_s, y_s обозначены координаты граничной точки с дугой s, или, полагая для сокращения $K(x_s, y_s; \sigma) = K(s, \sigma)$, — в виде

$$\pi\mu(s) + \int K(s, \sigma)\, \mu(\sigma)\, d\sigma = f(s), \tag{9}$$

где μ есть искомая функция, f обозначает заданные граничные значения функции и, наконец, ядро $K(s, \sigma)$ определено выше.

Таким образом для отыскания μ мы имеем неоднородное интегральное уравнение Фредгольма II рода; определив из него μ, мы получим требуемое решение $u(x, y)$ уравнения (6) с граничными значениями f путем выполнения квадратуры согласно формуле (7). Из изложенного видно: применяя интегральные уравнения к задаче Дирихле, мы получаем существенное упрощение в том отношении, что отыскание функции двух переменных приводится к определению функции одного независимого переменного. Вместе с тем для отыскания этой последней функции мы получили тот же аналитический аппарат, который мы выше нашли для вынужденного колебания упругого стержня, хотя первоначальная аналитическая проблема в обоих случаях была совсем различной. Заметим, что и все другие граничные задачи теории потенциала как для плоских, так и для пространственных областей доступны аналогичной трактовке и приводят к интегральным уравнениям соответственно с одним и двумя независимыми переменными.

§ 4. Задача Коши. Интегральные уравнения Вольтерра II рода.

1. В § 2 мы рассматривали задачу о колебании стержня и видели, что она выражается при помощи линейного диференциального уравнения с граничными условиями. Как было показано, эта диференциальная система эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма II рода. Покажем теперь, что задача интегрирования линейного диференциального уравнения с начальными условиями, так называемая задача Коши, тоже сводится к решению интегрального уравнения, но другого типа. Для простоты выкладок ограничимся рассмотрением диференциального уравнения второго порядка, замечая при этом, что прием для уравнения любого порядка n остается тем же. Итак, рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x). \tag{10}$$

Начальные условия предположим в виде

$$[u(x)]_{x=0} = 0, \quad [u'(x)]_{x=0} = 0. \tag{11}$$

Этот частный вид начальных условий не уменьшает общности задачи. В самом деле, если начальные условия будут вида

$$[u(x)]_{x=0} = A, \quad [u'(x)]_{x=0} = B,$$

то достаточно ввести новую функцию

$$Z(x) = u(x) - (Bx + A),$$

чтобы свести эти начальные условия к указанному выше частному виду.

Чтобы построить интегральное уравнение, эквивалентное диференциальному уравнению (10) при начальных условиях (11), будем исходить из следующей очевидной связи между функцией $u(x)$ и ее первой производной:

$$u(x) = \int_0^x u'(s)\,ds;$$

отсюда после интеграции по частям получим

$$u(x) = xu'(x) - \int_0^x su''(s)\,ds. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = \frac{d^2u}{dx^2};$$

тогда

$$\frac{du}{dx} = \int_0^x \varphi(s)\,ds.$$

Принимая во внимание, что $u''(s) = \varphi(s)$ и внося полученное выражение для $\frac{du}{dx}$ в формулу (12), найдем

$$u(x) = \int_0^x (x - s)\varphi(s)\,ds. \tag{13}$$

Наконец, внося в диференциальное уравнение (10) выражения $u(x)$, $u'(x)$ и $u''(x)$, получим

$$\varphi(x) + p(x)\int_0^x \varphi(s)\,ds + q(x)\int_0^x (x - s)\varphi(s)\,ds = f(x),$$

или

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{14}$$

где положено

$$K(x, s) = p(x) + q(x)(x - s). \tag{15}$$

Таким образом задача интеграции диференциального уравнения (10) при начальных условиях (11) сведена к разрешению интегрального уравнения (14) с ядром вида (15), с данной функцией $f(x)$ и с искомой функцией $\varphi(x)$. Определив эту последнюю, мы найдем $u(x)$ квадратурой по формуле (13).

2. Полученное уравнение (14) отличается от уравнения Фредгольма лишь тем, что верхним пределом входящего интеграла будет переменное x, в то время как в уравнении Фредгольма он — постоянное число. Условимся называть уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{IV}$$

интегральным уравнением Вольтерра II *рода* с данным ядром $K(x, s)$, где $f(x)$ — данная функция, $\varphi(x)$ — искомая, а λ — произвольный параметр.

Очевидно, уравнение (14) есть интегральное уравнение Вольтерра II рода с ядром вида (15), в котором значение параметра λ равно -1.

В частности, при $f(x)\equiv 0$ уравнение (IV) принимает вид

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=0 \qquad \text{(IV')}$$

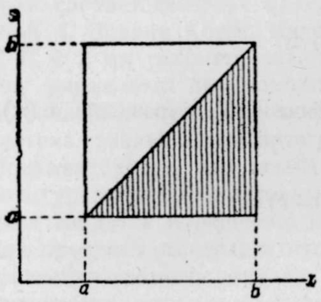
и называется *однородным интегральным уравнением Вольтерра* II *рода*.

§ 5. Уравнения Вольтерра как частный случай уравнений Фредгольма. Если в уравнении Вольтерра

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x H(x,s)\,\varphi(s)\,ds=f(x) \qquad (16)$$

мы будем считать x изменяющимся от a до b, то его ядро $H(x,s)$ нужно предполагать заданным в области, определяемой неравенствами

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad a\leqslant s\leqslant x,$$



Черт. 3.

т. е. во всякой точке (x, s) треугольника, заштрихованного на черт. 3.

Очевидно, уравнение Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, в котором ядро K определено следующим образом:

$$K(x,s)=H(x,s) \text{ для } s\leqslant x,$$
$$K(x,s)=0 \qquad \text{для } s>x,$$

т. е. в заштрихованной половине квадрата $K(x,s)$ совпадает с ядром $H(x,s)$, а во второй половине тождественно равно нулю. Действительно, при таком определении ядра $K(x,s)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=f(x)$$

тождественно с уравнением Вольтерра (16). Это простое замечание освободит нас в дальнейшем от необходимости отдельного рассмотрения теории интегральных уравнений Вольтерра, доставляя соответствующие результаты как следствия теории Фредгольма.

§ 6. Задача Абеля. Интегральные уравнения Вольтерра I рода. 1. Впервые к интегральному уравнению пришел Абель. Он исходил из рассмотрения одной механической задачи, причем в случае Абеля уравнение удалось разрешить квадратурой. Эта задача Абеля интересна также в том отношении, что она не может быть выражена с помощью диференциального уравнения, как это имеет место для других проблем механики, исторически же она представляет первую задачу, которая привела к необходимости рассмотрения интегральных уравнений. Задача Абеля состоит в следующем.

Пусть тяжелая материальная точка m движется из состояния покоя по кривой, лежащей в вертикальной плоскости. Спрашивается, как

должна быть построена кривая, чтобы время t, необходимое для того, чтобы точка m, двигаясь по кривой с высоты x, достигла своего нижнего положения, было равно заданной функции от x? Известно, например, что в случае $t=\text{const.}$ получается циклоида.

Обозначим через s высоту произвольной точки кривой, через τ — угол касательной с горизонтальной осью, через g — ускорение силы тяжести (черт. 4); тогда уравнение живой силы нам даст

$$v^2=2g(x-s);$$

замечая, что

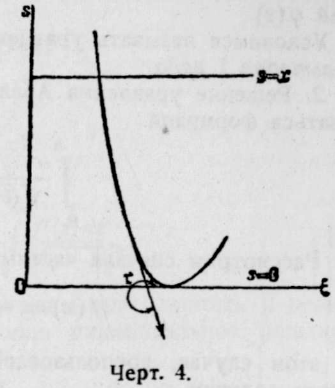
$$\frac{ds}{dt}=v\sin\tau,$$

найдем

$$\sqrt{2g(x-s)}=\frac{1}{\sin\tau}\cdot\frac{ds}{dt},$$

откуда время $t(x)$, нужное точке на перемещение с высоты $s=x$ до $s=0$, будет

$$-t(x)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\frac{1}{\sin\tau}\,\frac{ds}{\sqrt{x-s}}. \quad (17)$$



Черт. 4.

Обозначим известную функцию $-\sqrt{2g}\,t(x)$ через $f(x)$, а искомую $\operatorname{cosec}\tau$ — через $\varphi(s)$ и перепишем уравнение (17) в виде

$$f(x)=\int_0^x\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{x-s}}. \qquad (17')$$

Легко видеть, что, найдя $\varphi(s)$, мы можем составить уравнения кривой:

$$\frac{1}{\sin\tau}=\varphi(s),$$

откуда

$$s=\Phi(\tau);$$

далее,

$$d\xi=\frac{ds}{\operatorname{tg}\tau}=\frac{\Phi'(\tau)\,d\tau}{\operatorname{tg}\tau},$$

откуда

$$\xi=\int\frac{\Phi'(\tau)\,d\tau}{\operatorname{tg}\tau}=\Phi_1(\tau),$$

т. е. искомая кривая изображается в параметрической форме уравнениями

$$\xi=\Phi_1(\tau),$$
$$s=\Phi(\tau).$$

Итак, задача Абеля сводится к решению интегрального уравнения (17′), которое принадлежит к классу уравнений вида

$$f(x)=\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{V}$$

с данным ядром $K(x, s)$, данной функцией $f(x)$ и неизвестной функцией $\varphi(s)$.

Условимся называть уравнение вида (V) *интегральным уравнением Вольтерра* I *рода*.

2. Решение уравнения Абеля (17′) может быть дано, если воспользоваться формулой

$$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}}=\pi. \tag{18}$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $t(x)=\text{const.}$, т. е.

$$f(x)=-\sqrt{2g}\,t(x)=\text{const}.$$

В этом случае, воспользовавшись формулой (18) (при $a=0$, $b=x$), сразу получим

$$\varphi(s)=-\frac{\sqrt{2g}\,t}{\pi\sqrt{s}},$$

или

$$\sin\tau=-\frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{s}{2g}},$$

откуда

$$s=2a\sin^2\tau\ \left(a=\frac{gt^2}{\pi^2}\right),$$

$$d\xi=\frac{ds}{\operatorname{tg}\tau}=4a\cos^2\tau\,d\tau=2a(1+\cos 2\tau)\,d\tau$$

и, значит,

$$\xi=a\sin 2\tau+2a\tau.$$

Таким образом искомая кривая будет циклоида.

Переходя к общему случаю любой $f(x)$, перепишем формулу (18) так:

$$\int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}}=\pi;$$

умножим обе части этой последней формулы на произвольную функцию $\Psi(z)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до x

$$\pi\int_0^x \Psi(z)\,dz=\int_0^x \Psi(z)\,dz\int_z^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-z)}}.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, назначая при этом надлежащие пределы (формула Дирихле), получим

$$\pi\int_0^x \Psi(z)\,dz=\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{x-s}}\int_0^s \frac{\Psi(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}. \tag{19}$$

Заметив это, мы решим уравнение (17′) при условии $f(0)=0$, если примем

$$f(x)=\pi\int_0^x \Psi(z)\,dz,$$

т. е.

$$\Psi(x)=\frac{1}{\pi}f'(x),$$

а

$$\varphi(s)=\int_0^s \frac{\Psi(z)dz}{\sqrt{s-z}}=\frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}. \tag{20}$$

Если же $f(0)\neq 0$, то мы, очевидно, должны присоединить к решению (20), получаемому для $f(x)-f(0)$, еще циклоидальное решение для $f(x)\equiv f(0)$ и таким образом найдем

$$\varphi(s)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{s}}+\int_0^s \frac{f'(z)\,dz}{\sqrt{s-z}}\right].$$

Эта формула дает решение уравнения Абеля. Физическое значение это решение имеет только в том случае, когда оно по абсолютному значению не меньше единицы, так как $\varphi(s)=\frac{1}{\sin\tau}$.

Единственность решения уравнения Абеля немедленно вытекает из формулы (19). Действительно, разность двух непрерывных решений уравнения Абеля удовлетворяет этому же уравнению при $f(x)\equiv 0$. Поэтому, подставляя в формулу (19) вместо $\Psi(x)$ эту разность, мы из этой формулы заключаем, что эта разность тождественно равна нулю.

3. Обобщенным уравнением Абеля будем называть уравнение

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1.$$

Поступая аналогично предыдущему, воспользовавшись вместо (18) формулой

$$\int_z^x \frac{ds}{(x-s)^{\alpha}(s-z)^{1-\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

получим решение обобщенного уравнения Абеля в виде

$$\varphi(s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}+\int_0^s \frac{f'(z)\,dz}{(s-z)^{1-\alpha}}\right].$$

§ 7. Регулярное ядро. При изложении теории интегральных уравнений Фредгольма мы будем предполагать пределы интеграла a и b конечными, а ядро $K(x, s)$, определенное в области квадрата $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, — подчиненным следующим условиям: функция $K(x, s)$ в указанной области ограничена по абсолютной величине и может иметь точки и линии разрыва в конечном числе; линии разрыва, будучи произвольной формы, должны пересекаться с каждой прямой, параллельной оси координат, в конечном числе точек.

При этих условиях функция $K(x, s)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва с одной и той же абсциссой x или с одной и той же ординатой s.

Ядро, подчиненное указанным условиям, будем называть *регулярным*. Относительно регулярных в квадрате $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ функций докажем следующее предложение: пусть $f(x, s)$ и $g(x, s)$ — две регулярные в $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ функции; тогда функция

$$K(x, s) = \int_a^b f(x, t) g(t, s) \, dt \tag{21}$$

будет непрерывной в этом квадрате.

Достаточно доказать, что, какова бы ни была постоянная точка (x, s) в данном квадрате, для всякого ε, $\varepsilon > 0$, можно найти такое η, чтобы из неравенств $|x - x'| < \eta$, $|s - s'| < \eta$ следовало неравенство

$$|K(x', s') - K(x, s)| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть это не так. Тогда возможно найти число $\varepsilon > 0$ такое, что при всяком n существуют значения x_n, s_n в $[a, b]$, для которых будет

$$|x - x_n| < \frac{1}{n}, \quad |s - s_n| < \frac{1}{n},$$

$$|K(x_n, s_n) - K(x, s)| > \varepsilon.$$

Согласно формуле (21) можем написать

$$K(x_n, s_n) - K(x, s) =$$
$$= \int_a^b f(x_n, t) [g(t, s_n) - g(t, s)] \, dt + \int_a^b g(t, s) [f(x_n, t) - f(x, t)] \, dt.$$

Предполагая $|f| \leqslant M$, $|g| \leqslant N$, получим

$$|K(x_n, s_n) - K(x, s)| \leqslant$$
$$\leqslant M \int_a^b |g(t, s_n) - g(t, s)| \, dt + N \int_a^b |f(x_n, t) - f(x, t)| \, dt.$$

Рассмотрим коэфициент при M. По условию у функции g имеется лишь конечное число q точек разрыва с ординатой s. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — их абсциссы. Вне интервалов $\left(t_i \pm \frac{\varepsilon}{16MNq}\right)$ функция g

непрерывна на прямой с ординатой s по отношению к совокупности обеих переменных и, следовательно, равномерно непрерывна. Таким образом можно определить r не зависящим от t и достаточно большим так, чтобы

$$|g(t, s_n) - g(t, s)| < \frac{\varepsilon}{4M(b-a)},$$

когда $n > r$, если t не лежит внутри предыдущих интервалов. Отсюда следует, что часть рассматриваемого интеграла при M, относящаяся к интервалам $t_i \pm \frac{\varepsilon}{16MNq}$, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{8MNq} \cdot 2Nq = \frac{\varepsilon}{4M}$, а оставшаяся часть меньше чем $\frac{\varepsilon}{4M(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{4M}$. Следовательно,

$$M \int_a^b |g(t, s_n) - g(t, s)| \, dt < M \frac{\varepsilon}{4M} + M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > r$.

Аналогично получим

$$N \int_a^b |f(x_n, t) - f(x, t)| \, dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > r'$.

Таким образом для $n > r + r'$ будет

$$|K(x_n, s_n) - K(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

в противоречие с предположением. Тем самым наше утверждение доказано.

§ 8. Случай многих переменных. Уравнение Фредгольма (III) определяет функцию $\varphi(x)$, которая зависит от одного переменного x; расширение на случай многих переменных не представляет никаких затруднений, и вся теория немедленно распространяется без всяких изменений. Рассматривая, например, случай двух переменных, имеем

$$\varphi(x, y) - \lambda \iint_{(D)} K(x, y; s, t) \varphi(s, t) \, ds \, dt = f(x, y).$$

Интеграция распространяется на область D, точки которой определяются координатами (s, t); в области D определены также функции $\varphi(x, y)$ и $f(x, y)$. Для сокращения речи удобнее сказать, что φ, f суть две функции точки $M(x, y)$ и что K есть функция двух точек $M(x, y)$ и $N(s, t)$. Тогда можно записывать наше уравнение в виде

$$\varphi(M) - \lambda \int_{(D)} K(M, N) \varphi(N) \, d\omega = f(M), \tag{III}$$

где $d\omega$ обозначает элемент площади D.

§ 9. Неравенство Шварца. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две непрерывные функции в интервале $[a, b]$, а λ — числовой вещественный параметр. Тогда имеем очевидное неравенство

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x) + \lambda\varphi(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx + \lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Заметив, что вторая часть этого неравенства есть квадратный трехчлен относительно λ, не принимающий отрицательных значений, получим неравенство Шварца

$$\left[\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\, dx. \tag{22}$$

Таким же образом получается аналогичное неравенство для кратных интегралов и для сумм.

§ 10. Ортогональные функции. Две непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *ортогональными* в интервале $[a, b]$, если

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = 0.$$

Их называют, сверх того, *нормированными*, если

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = 1, \qquad \int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1.$$

Легко видеть, что если непрерывные функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ нормированы и ортогональны, то эти функции *линейно независимы*. Другими словами, тождество вида

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

где c_i суть постоянные, возможно только тогда, когда все c_i — нули. Действительно, умножая на $f_i(x)$ и интегрируя, получим

$$c_1 \int_a^b f_1(x) f_i(x)\, dx + \ldots + c_i \int_a^b f_i^2(x)\, dx + \ldots$$

$$\ldots + c_n \int_a^b f_n(x) f_i(x)\, dx = 0,$$

а отсюда следует, что $c_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

§ 11. Ортогонализация и нормирование. Пусть дана система n функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),$$

линейно независимых и непрерывных в интервале $[a, b]$. Всегда возможно ортогонализировать и нормировать эту систему, т. е. построить систему функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),$$

непрерывных в интервале $[a, b]$, нормированных и ортогональных в этом интервале и таких, что каждая функция φ есть линейная комбинация функций данной системы и, обратно, всякая функция f есть линейная комбинация функций построенной системы. Действительно, предположим доказанным, что можно построить p линейных комбинаций функций $f_1, f_2, \ldots, f_p$, — обозначим их $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, — которые являются нормированными и ортогональными между собой, причем, обратно, каждая функция f есть линейная комбинация функций φ. Тогда легко показать, что это будет верным, если заменим p через $p+1$. Для этого образуем функцию

$$\varphi_{p+1} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_p\varphi_p + c_{p+1} f_{p+1}, \tag{23}$$

которая представляет собой линейную комбинацию функций $f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}$. Функция φ_{p+1} будет ортогональной к функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, если выполнены условия

$$0 = \int_a^b \varphi_{p+1}(x)\varphi_k(x)\, dx =$$

$$= c_k + c_{p+1} \int_a^b f_{p+1}(x)\varphi_k(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

откуда

$$\varphi_{p+1} \equiv c_{p+1} \left[f_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) \int_a^b f_{p+1}(x)\varphi_k(x)\, dx \right].$$

Очевидно, выражение в скобке не может оказаться тождественным нулем; в противном случае f_{p+1} была бы линейной комбинацией функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, а следовательно, и функций $f_1, f_2, \ldots, f_p$, что невозможно в силу условия линейной независимости данной системы. Далее, c_{p+1} можно выбрать так, чтобы φ_{p+1} была нормированной функцией. Итак, первая часть теоремы вполне доказана, так как, предположив ее справедливость для p функций, мы показали, что она верна и для $p+1$ функций, а при $p = 1$ предложение очевидно. Что касается обратного заключения (вторая часть теоремы), то оно немедленно вытекает из формулы (23).

§ 12. Обобщенные коэфициенты Фурье. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, нормированных и ортогональных в интервале $[a, b]$. Пусть $F(x)$ — произвольная непрерывная в этом интервале функция. Числа

$$a_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

мы будем называть *коэфициентами Фурье* функции $F(x)$ относительно системы функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ Это название оправдывается тем обстоятельством, что если ряд

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

составлен из конечного числа членов или сходится равномерно, то его постоянные коэфициенты $a_1, a_2, \ldots$ суть как раз определенные только что коэфициенты Фурье суммы $F(x)$ этого ряда. Действительно, умножая его на $\varphi_n(x)$ и интегрируя в пределах от a и b, найдем

$$a_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

§ 13. Неравенство Бесселя. 1. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция в интервале $[a, b]$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — система функций, нормированных и ортогональных в этом интервале. Положим

$$a_n = \int_a^b F(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Очевидно, будем иметь

$$\int_a^b \Big[F(x) - \sum_1^p a_n\varphi_n(x)\Big]^2 dx = \int_a^b F^2(x)\,dx - 2\sum_1^p a_n \int_a^b F(x)\varphi_n(x)\,dx +$$

$$+ \sum_1^p a_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx + 2\sum_{n \neq m} a_n a_m \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b F^2(x)\,dx - \sum_1^p a_n^2.$$

Отсюда вытекает такая формула:

$$\sum_1^p a_n^2 = \int_a^b F^2(x)\,dx - \int_a^b \Big[F(x) - \sum_1^p a_n\varphi_n(x)\Big]^2 dx.$$

2. В частности, из этой формулы вытекает неравенство Бесселя

$$\sum_1^p a_n^2 \leqslant \int_a^b F^2(x)\,dx, \tag{24}$$

где a_n суть коэфициенты Фурье функции $F(x)$ относительно системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

Неравенство (24) показывает, что если функции φ_n образуют бесконечную последовательность, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ будет сходящимся с суммой, не превосходящей

$$\int_a^b F^2(x)\,dx.$$

ЗАДАЧИ

Решить следующие интегральные уравнения:

1. $u(x) = x + \int_0^x (s - x)\,u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x) = \sin x.$

2. $u(x) = 1 + \int_0^x (s - x)\,u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x) = \cos x.$

3. $u(x) = 1 + \int_0^x u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x) = e^x.$

4. $u(x) = -2\cos x + x + 2 + \int_0^x (s - x)\,u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x) = \sin x + x\sin x.$

5. Показать, что уравнение $u(x) = A + Bx + \int_0^x [C + D(x - s)]\,u(s)\,ds$ (A, B, C, D — постоянные) имеет решение вида

$$u(x) = K_1 e^{m_1 x} + K_2 e^{m_2 x},$$

где K_1, K_2, m_1, m_2 зависят от A, B, C, D.

6. Показать, что уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b u(s)\Big[\sum_1^p \alpha_q(x)\,\beta_q(s)\Big]\,ds$$

имеет решение вида $u(x) = f(x) + \lambda \sum_1^p A_q\,\alpha_q(x)$, где A_q — постоянные, определяемые из уравнений

$$\sum_{r=1}^p A_r\Big[\lambda \int_a^b \alpha_r(s)\,\beta_q(s)\,ds\Big] - A_q = -\int_a^b \beta_q(s) f(s)\,ds \quad (q = 1, 2, \ldots, p)$$

7. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\,u(s)\,ds.$$

Отв. $u(x) = x.$

8. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \sin x - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xs\,u(s)\,ds.$$

Отв. $u(x) = \sin x.$

9. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} u(s)\,ds.$$

Отв. $u(x) = x + \frac{1}{4}.$

10. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{xe^x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x s\,u(s)\,ds.$$

Отв. $u(x) = e^x.$

Решить следующие однородные интегральные уравнения:

11. $u(x)=\int\limits_0^1 u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x)=C.$

12. $u(x)=-\int\limits_0^1 u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x)=0.$

13. $u(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\, u(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x)=C\sin x.$

14. $u(x)=\frac{1}{e^2-1}\int\limits_0^1 2e^xe^su(s)\,ds.$ *Отв.* $u(x)=Ce^x.$

15. Решить интегральное уравнение

$$u(x)=\cos x+\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin x\, u(s)\,ds.$$

Отв. $u(x)=\cos x$, если $\lambda\neq\frac{1}{2}$;

$$u(x)=\cos x+C\sin x \text{ при } \lambda=\frac{1}{2}.$$

16. Решить интегральное уравнение

$$u(x)=x+\lambda\int\limits_0^1(x-s)^2u(s)\,ds.$$

Отв. $u=x+\frac{3\lambda}{35\lambda^2-66\lambda+180}\left[30x^2-\frac{\lambda(\lambda+96)}{\lambda+6}x+\frac{24(\lambda+15)}{\lambda+6}\right]$, если λ не есть корень уравнения $(\lambda+6)(35\lambda^2-66\lambda+180)=0$. В противном случае уравнение неразрешимо.

Глава I

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

§ 1. Приложение метода итераций к уравнениям Фредгольма. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x). \tag{1}$$

Ядро $K(x, s)$ мы будем считать заданным в области квадрата

$$a\leqslant(x, s)\leqslant b$$

и регулярным в этой области (см. введение, § 7).

Если существует непрерывное решение $\varphi(x)$, то функция $f(x)$ должна быть также непрерывной (§ 7). Поэтому мы будем предполагать данную функцию $f(x)$ непрерывной в интервале $[a, b]$. Переписав уравнение (1) в виде

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds+f(x), \tag{2}$$

подставим вместо $\varphi(s)$ во вторую часть уравнения (2) произвольную непрерывную функцию $\varphi_0(s)$; тогда получим

$$\varphi_1(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_0(s)\,ds+f(x). \tag{3}$$

Заменяя $\varphi_0(s)$ на $\varphi_1(s)$ и поступая таким же образом далее, получим последовательность непрерывных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... таких, что

$$\varphi_n(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x, s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds+f(x). \tag{4}$$

Если мы покажем, что φ_n сходится равномерно к предельной функции $\varphi(x)$, когда n неограниченно возрастает, то формула (4) в пределе обратится в уравнение (2); предельная функция $\varphi(x)$ будет решением уравнения Фредгольма (1), а функции $\varphi_n(x)$ — последовательными приближениями этого решения.

Последовательно применяя формулу (4), получим

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)\,ds+ \tag{5}$$

$$+\lambda^2\int_a^b K(x,s)\,ds\int_a^b K(s,s_1)f(s_1)\,ds_1+\ldots$$

$$\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K(x,s)\,ds\int_a^b K(s,s_1)\,ds_1\ldots\int_a^b K(s_{n-3},s_{n-2})f(s_{n-2})\,ds_{n-2}+R_n,$$

где положено

$$R_n=\lambda^n\int_a^b K(x,s)\,ds\int_a^b K(s,s_1)\,ds_1\ldots\int_a^b K(s_{n-2},s_{n-1})\,\varphi_0(s_{n-1})\,ds_{n-1}.$$

По условию имеем

$$|K(x,s)|\leqslant M,\quad |f(x)|\leqslant P,\quad |\varphi_0(x)|\leqslant N,\qquad a\leqslant(x,s)\leqslant b.$$

Следовательно, из формулы для R_n получим

$$|R_n|\leqslant[M(b-a)|\lambda|]^n\cdot N.$$

С другой стороны, заметим, что $\varphi_n(x)$ представлено в виде суммы R_n и n первых членов ряда, общий член которого по абсолютному значению не больше $[M(b-a)|\lambda|]^n\cdot P$.

Предполагая $M(b-a)|\lambda|<1$, мы видим, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится в интервале $[a,b]$, а R_n равномерно стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Так как этот ряд не зависит от $\varphi_0(x)$, то предел $\varphi(x)$ функций $\varphi_n(x)$ не будет зависеть от функции $\varphi_0(x)$, с которой мы начали строить приближения. На основании формул (3) и (4) мы видим, что все функции $\varphi_n(x)$ будут непрерывными в интервале $[a,b]$, а значит, непрерывной функцией будет и их равномерный предел $\varphi(x)$. Легко показать, что полученное непрерывное решение $\varphi(x)$ уравнения Фредгольма есть единственное. В самом деле, предположим, что $\psi(x)$ — другое непрерывное решение уравнения (1). Приняв за $\varphi_0(x)$ функцию $\psi(x)$, мы видим, что все $\varphi_n(x)$ будут тождественны с $\psi(x)$. Следовательно, их предел $\varphi(x)$ [не зависящий от выбора $\varphi_0(x)$] будет также равен $\psi(x)$. Итак, для всякого значения λ, удовлетворяющего условию $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$, уравнение Фредгольма имеет единственное непрерывное решение $\varphi(x)$, которое изображается абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)\,ds+\ldots \tag{6}$$

$$\ldots+\lambda^n\int_a^b K(x,s)\,ds\int_a^b K(s,s_1)\,ds_1\ldots\int_a^b K(s_{n-2},s_{n-1})f(s_{n-1})\,ds_{n-1}+\ldots$$

Очевидно, мы пришли бы к тому же ряду (6), если бы искомое решение сразу представили в виде ряда по возрастающим степеням параметра λ.

§ 2. Итерированные ядра. Ряд (6) можно записать в более удобной форме, если ввести последовательные итерации ядра $K(x,s)$.

Функции, определяемые последовательно соотношениями

$$K_1(x,s)=K(x,s),$$

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt,\ \ldots,\ K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt, \tag{7}$$

назовем *итерированными ядрами*. Заметим, что все итерированные ядра, начиная с K_2, будут непрерывными функциями в области $a\leqslant(x,s)\leqslant b$, если начальное ядро K регулярно (см. введение, § 7). Вводя обозначения (7), перепишем формулу (5), изменяя порядок интеграции, в следующем виде:

$$\varphi_{n+1}(x)=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K_1(x,s)f(s)\,ds+\ldots+\lambda^n\int_a^b K_n(x,s)f(s)\,ds+R_{n+1}, \tag{8}$$

где положено

$$R_{n+1}=\lambda^{n+1}\int_a^b K_{n+1}(x,s)\,\varphi_0(s)\,ds.$$

Переходя к пределу при n стремящемся к бесконечности, получим другую форму ряда (6):

$$\varphi(x)=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)\,ds+\ldots+\lambda^n\int_a^b K_n(x,s)f(s)\,ds+\ldots \tag{6'}$$

§ 3. Резольвента. Мы можем решение уравнения Фредгольма представить в более простом, чем (6′), и симметричном виде, если введем понятие *резольвенты* интегрального уравнения. Эта последняя определяется рядом

$$R(x,s;\lambda)=K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots, \tag{9}$$

который будет абсолютно и равномерно сходящимся в области $a\leqslant(x,s)\leqslant b$, если $M(b-a)|\lambda|<1$.

Последнее вытекает из того, что общий член этого ряда по модулю не больше, чем

$$|\lambda|^{n-1}M^n(b-a)^{n-1}=M[M(b-a)|\lambda|]^{n-1},$$

так как, если

$$|K(x,s)|\leqslant M,$$

то

$$|K_2(x,s)|\leqslant M^2(b-a),\ \ldots,\ |K_n(x,s)|\leqslant M^n(b-a)^{n-1}.$$

Поэтому ряд (9) будет абсолютно и равномерно сходящимся, если $M(b-a)|\lambda|<1$.

Заметим, что резольвента $R(x, s; \lambda)$ имеет те же места прерывности, что и ядро $K(x, s)=K_1(x, s)$, так как все итерированные ядра K_2, K_3, ... непрерывны. Следовательно, резольвента интегрального уравнения с регулярным ядром есть регулярная функция в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Эта функция R зависит только от ядра K интегрального уравнения. Воспользовавшись резольвентой (9), представим решение $\varphi(x)$ вместо ряда (6') формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds. \tag{10}$$

Формула (10) изображает непрерывное решение $\varphi(x)$ уравнения (2) и выведена при условии

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}.$$

Она имеет вид, симметричный с исходным уравнением

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds,$$

и получается из этого последнего, если в нем поменять роли известной и неизвестной функций и заменить ядро K через $-R$.

§ 4. Уравнения Вольтерра. 1. В предыдущем мы видели, что метод итераций дает решение уравнения Фредгольма лишь для значений параметра λ, достаточно малых по модулю. Таким образом этот метод не дает полного решения уравнения Фредгольма. Уравнение Вольтерра

$$\varphi(x)-\lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s)\, ds=f(x) \tag{11}$$

является частным случаем уравнения (1), если в этом последнем за ядро принять функцию, равную $K(x, s)$ для $s \leqslant x$ и равную нулю при $s>x$. Мы увидим, что в этом частном случае метод итераций дает исчерпывающее решение задачи.

Формулы (7) для итерированных ядер в этом случае примут вид

$$\left.\begin{array}{l}
K_1(x, s)=K(x, s), \\
K_2(x, s)=\displaystyle\int_s^x K(x, t) K(t, s)\, dt, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
K_n(x, s)=\displaystyle\int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s)\, dt
\end{array}\right\}(s<x). \tag{12}$$

В самом деле, разбивая интервал интеграции на части (a, s), (s, x), (x, b) (при $s<x$), мы видим, что под знаком интеграла в формуле

для K_2 второй множитель равен нулю в первом интервале, а первый множитель равен нулю в третьем интервале; далее, $K_2(x, s)$ при $s>x$ равно нулю, так как $K(x, t)$ есть нуль, когда $t>x$. Вообще под знаком интеграла в K_n формулы (7) второй множитель равен нулю в интервале (a, s), а первый множитель есть нуль в интервале (x, b). Формулы (12) позволяют вычислить последовательные итерации ядра K, определенного в области треугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$; итерации $K_2(x, s)$, $K_3(x, s)$, ..., $K_n(x, s)$, ... будут непрерывными функциями в этой области, если основное ядро $K(x, s)$ регулярно.

Заметив это, оценим сверху модули последовательных итераций ядра K. Из формул (12) находим

$$\left.\begin{array}{l}
|K(x, s)| \leqslant M, \\
|K_2(x, s)| \leqslant M^2(x-s), \\
|K_3(x, s)| \leqslant M^3 \displaystyle\int_s^x (t-s)\, dt=\frac{M^3(x-s)^2}{1 \cdot 2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
|K_n(x, s)| \leqslant M^n \displaystyle\int_s^x \frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!}\, dt=M^n \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{array}\right\}(s<x).$$

Общий член резольвенты (9) по модулю не будет превосходить

$$\frac{M}{(n-1)!}[M|\lambda|(x-s)]^{n-1} \leqslant \frac{M}{(n-1)!}[M|\lambda|(b-a)]^{n-1}=M \frac{q^{n-1}}{(n-1)!},$$

где положено

$$q=M(b-a)|\lambda|.$$

Так как ряд $M+Mq+M\frac{q^2}{2}+\ldots+M\frac{q^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$ сходится при всяком q, то ряд (9) для резольвенты сходится абсолютно и равномерно в области треугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$ при всяком конечном значении параметра λ. Таким образом резольвента интегрального уравнения Вольтерра есть целая функция параметра λ.

Мы получим решение уравнения Вольтерра из решения (10) уравнения Фредгольма, если в этом последнем резольвенту будем считать равной $R(x, s; \lambda)$ для $s \leqslant x$ и нулю для $s>x$, как это показывает ряд (9), в котором $K_1(x, s)$, $K_2(x, s)$, ..., $K_n(x, s)$, ... при $s>x$ равны нулю. Следовательно, решение уравнения Вольтерра примет вид

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda \int_a^x R(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \tag{13}$$

где R определяется рядом (9), причем K_1, K_2, K_3, ... определяются по формулам (12).

Итак, уравнение Вольтерра II рода (11) имеет при всяком значении параметра λ единственное непрерывное решение, определяемое формулой (13). В частности, однородное интегральное уравнение Вольтерра II рода $[f(x) = 0]$ не имеет других решений, кроме тождественного нуля.

2. Что касается уравнения Вольтерра I рода

$$\int_a^x K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x),$$

то его решение при некоторых гипотезах относительно ядра и правой части $f(x)$ может быть приведено к решению интегрального уравнения Вольтерра II рода. В самом деле, продиференцируем по x обе части данного уравнения, тогда получим

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x, s)\varphi(s)\,ds = f'(x),$$

откуда по разделении на $K(x, x)$ найдем

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}\varphi(s)\,ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}. \tag{14}$$

Уравнение (14) есть интегральное уравнение Вольтерра II рода с ядром $\frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}$ и известной функцией $\frac{f'(x)}{K(x, x)}$. При этом мы предполагали существование $K'_x(x, s)$ и $f'(x)$, а также, что $K(x, x) \not\equiv 0$. В случае если $K(x, x) \equiv 0$, мы после диференцирования будем иметь

$$\int_a^x K'_x(x, s)\varphi(s)\,ds = f'(x),$$

т. е. снова уравнение Вольтерра I рода. Диференцируя еще один раз, получим

$$K'_x(x, x)\varphi(x) + \int_a^x K''_{xx}(x, s)\varphi(s)\,ds = f''(x),$$

и если $K'_x(x, x) \not\equiv 0$, то, разделив на него, получим уравнение Вольтерра II рода

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K''_{xx}(x, s)}{K'_x(x, x)}\varphi(s)\,ds = \frac{f''(x)}{K'_x(x, x)}. \tag{14'}$$

Если же и $K'_x(x, x) \equiv 0$, то, продолжая процесс диференцирования, мы в конце концов сведем задачу о разрешении данного уравнения Вольтерра I рода к решению уравнения Вольтерра II рода, если только при некотором p существуют непрерывные производные $K_x^{(q)}(x, s)$, $f^{(q)}(x)$ $(q = 1, 2, \ldots, p+1)$, причем $K^{(p)}(x, x) \not\equiv 0$.

§ 5. Интегральные уравнения резольвенты. 1. Вернемся к уравнениям Фредгольма. Итерации ядра этого уравнения определяются формулой

$$K_n(x, s) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\ldots K(t_{n-1}, s)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1},$$

откуда немедленно вытекает замечательная формула

$$K_{n+p}(x, s) = \int_a^b K_n(x, t)K_p(t, s)\,dt. \tag{15}$$

Из ряда (9) резольвенты получим

$R(x, s; \lambda) - K(x, s) = \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \ldots + \lambda^{n-1}K_n(x, s) + \ldots$

Применяя формулу (15), имеем

$$R(x, s; \lambda) - K(x, s) =$$
$$= \lambda\int_a^b K_1(x, t)K_1(t, s)\,dt + \ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K_1(x, t)K_{n-1}(t, s)\,dt + \ldots =$$
$$= \lambda\int_a^b K_1(x, t)K_1(t, s)\,dt + \ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K_{n-1}(x, t)K_1(t, s)\,dt + \ldots,$$

откуда находим две формулы:

$$R(x, s; \lambda) - K(x, s) =$$
$$= \lambda\int_a^b K_1(x, t)[K_1(t, s) + \ldots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(t, s) + \ldots]\,dt$$
$$= \lambda\int_a^b [K_1(x, t) + \ldots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(x, t) + \ldots]K_1(t, s)\,dt.$$

В силу ряда (9) для резольвенты окончательно находим

$$R(x, s; \lambda) - K(x, s) =$$
$$= \lambda\int_a^b K(x, t)R(t, s; \lambda)\,dt = \lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)K(t, s)\,dt.$$

Итак, резольвента удовлетворяет интегральным уравнениям

$$R(x, s; \lambda) - \lambda\int_a^b K(x, t)R(t, s; \lambda)\,dt = K(x, s), \tag{16}$$

$$R(x, s; \lambda) - \lambda\int_a^b K(t, s)R(x, t; \lambda)\,dt = K(x, s). \tag{17}$$

Сравним эти уравнения с данным интегральным уравнением

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x)$$

и его „присоединенным" уравнением

$$\psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, x)\psi(t)\,dt = g(x).$$

Если s считать постоянным, то уравнение (16) показывает, что резольвента $R(x, s; \lambda)$ как функция x удовлетворяет данному интегральному уравнению, в котором правая часть

$$f(s) = K(x, s).$$

Наоборот, если x считать постоянным, то уравнение (17) показывает, что резольвента $R(x, s; \lambda)$ как функция s удовлетворяет „присоединенному" интегральному уравнению, в котором правая часть

$$g(s) = K(s, s).$$

ЗАДАЧИ

Найти три последовательных приближения к решениям следующих интегральных уравнений, выбирая $u_0(x) \equiv 0$:

1. $u(x) = x + \int_0^x (s - x)\,u(s)\,ds.$ *Отв.* $x,\ x - \frac{x^3}{3!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$

2. $u(x) = 1 + \int_0^x u(s)\,ds.$ *Отв.* $1,\ 1 + x,\ 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2}.$

3. $u(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\,u(s)\,ds.$ *Отв.* $\frac{5}{6}x,\ \frac{35}{36}x,\ \frac{215}{216}x.$

Глава II

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Частный случай уравнения Фредгольма. 1. Задачей настоящей главы является изложение теории интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{1}$$

при следующих общих предположениях: пределы интеграла a и b — конечные числа, ядро $K(x, s)$ — регулярная функция в области квадрата $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, т. е. $|K(x, s)| \leqslant M$, причем $K(x, s)$ может иметь точки и линии разрыва любой формы в конечном числе, лишь бы на каждой прямой, параллельной оси x или оси s, было, самое большее, конечное число точек.

Такое интегральное уравнение кратко будем называть *регулярным.* Что касается правой части $f(x)$ уравнения (1), то, желая сохранить непрерывность за искомым решением, будем считать $f(x)$ непрерывной функцией в интервале $[a, b]$.

Прежде чем приступить к теории общего уравнения (1), рассмотрим один частный случай, на решении которого мы лучше поймем основные моменты теории Фредгольма. Этот частный случай соответствует ядру вида

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\chi_i(s), \tag{2}$$

где ψ_i и χ_i — данные непрерывные функции в интервале $[a, b]$.

Введем обозначение $Q_i = \int_a^b \chi_i(s)\varphi(s)\,ds$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, Q_i — постоянные, но неизвестные величины, так как в подинтегральное выражение входит неизвестная функция $\varphi(s)$. Подставив выражение (2) для $K(x, s)$ в уравнение (1), получим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} Q_i\psi_i(x). \tag{3}$$

Мы пришли к выражению неизвестной функции $\varphi(x)$ через известные функции и n неизвестных постоянных Q_i. Нашей задачей и является определение этих постоянных.

2. Введем следующие обозначения:

$$A_{ik}=\int_a^b \psi_k(x)\chi_i(x)\,dx, \quad F_i=\int_a^b f(x)\chi_i(x)\,dx. \tag{4}$$

Ясно, что A_{ik} и F_i — постоянные известные величины. Для определения неизвестных коэфициентов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ поступим следующим образом: умножим последовательно равенство (3) на функции $\chi_1(x)$, $\chi_2(x), \ldots, \chi_n(x)$, затем проинтегрируем по x в пределах от a до b. Тогда, принимая во внимание введенные обозначения (4), получим следующую систему линейных уравнений для определения $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$:

$$\left.\begin{array}{l}(1-\lambda A_{11})Q_1-\lambda A_{12}Q_2-\ldots-\lambda A_{1n}Q_n=F_1,\\ -\lambda A_{21}Q_1+(1-\lambda A_{22})Q_2-\ldots-\lambda A_{2n}Q_n=F_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\lambda A_{n1}Q_1-\lambda A_{n2}Q_2-\ldots+(1-\lambda A_{nn})Q_n=F_n.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Определитель этой системы будет

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12}\ldots & -\lambda A_{1n}\\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22}\ldots & -\lambda A_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n1}\ldots & 1-\lambda A_{nn}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Неоднородному уравнению (1) с ядром вида (2) соответствует неоднородная линейная система вида (5), за исключением случая, когда данная функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям $\chi_i(x)$. В этом последнем случае все $F_i=0$ и система (5) будет однородной. Во всяком случае для каждого значения параметра λ, не являющегося корнем уравнения

$$D(\lambda)=0, \tag{7}$$

система (5), а следовательно, и интегральное уравнение (1), имеет единственное определенное решение.

Это решение интегрального уравнения определяется формулой (3), которая в отмеченном исключительном случае обратится в

$$\varphi(x)=f(x).$$

Если уравнение (1) однородное ($f\equiv 0$), то все $F_i=0$, а следовательно, и соответствующая линейная система будет однородной. Поэтому однородное интегральное уравнение Фредгольма с ядром вида (2) может иметь решения, отличные от нуля, только для тех значений λ, которые являются корнями уравнения (7).

Наконец, если λ есть корень уравнения (7), то неоднородное интегральное уравнение (1), вообще говоря, не имеет решений, так как нет решений у системы (5); в исключительных случаях, зависящих от вида функции $f(x)$, система (5) может иметь бесчисленное множество решений, и, значит, в этих случаях и неоднородное уравнение (1) будет иметь бесчисленное множество решений.

Рассмотренный нами частный вид интегрального уравнения имеет существенное значение для решения интегральных уравнений общего вида, так как всякое непрерывное ядро может быть с любой степенью точности равномерно аппроксимировано конечной суммой вида (2) при надлежащем выборе функций $\psi_i(x)$ и $\chi_i(s)$. Ядра специального вида, здесь рассмотренные, лежат также в основании предложенного Э. Шмидтом метода решения общих уравнений Фредгольма II рода, которого мы рассматривать не будем.

3. Разберем пример на рассмотренный случай:

$$K(x, s)=60x^2+12xs+6s^2; \quad a=0, \ b=1.$$

Таким образом имеем

$$\psi_1(x)=60x^2, \quad \psi_2(x)=12x, \quad \psi_3(x)=6,$$
$$\chi_1(s)=1, \quad \chi_2(s)=s, \quad \chi_3(s)=s^2.$$

На основании (4) получаем для A_{ik} таблицу

20	6	6
15	4	3
12	3	2

Решение системы (5) для $\lambda=-1$ будет

$$Q_1=\frac{-F_1+2F_3}{3}, \quad Q_2=\frac{F_1+F_2-3F_3}{2}, \quad Q_3=\frac{5F_1-3F_2-5F_3}{6},$$

и поэтому формула (3) даст для интегрального уравнения

$$\varphi(x)+\int_0^1(60x^2+12xs+6s^2)\varphi(s)\,ds=f(x),$$

после замены F_i по формуле (4), следующее решение:

$$\varphi(x)=f(x)-(-20x^2+6x+5)\int_0^1 f(x)\,dx-$$
$$-(6x-3)\int_0^1 xf(x)\,dx-(40x^2-18x-5)\int_0^1 x^2f(x)\,dx.$$

Исключительные значения параметра λ являются корнями уравнения (7), которое здесь в развернутом виде будет таким:

$$2\lambda^3-43\lambda^2-26\lambda+1=0.$$

§ 2. Общий случай. 1. Рассмотрим общий случай интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{1}$$

ядро которого $K(x, s)$ будем предполагать регулярным в области квадрата $a\leqslant(x, s)\leqslant b$, а правую часть $f(x)$ — непрерывной функцией в интервале $[a, b]$. A priori на искомую функцию $\varphi(x)$ естественно наложить только одно ограничение — чтобы она была абсолютно интегрируемой функцией в интервале $[a, b]$. Однако при вышеуказанных гипотезах относительно ядра и данной функции $f(x)$ интегрируемое решение уравнения (1) необходимо должно быть непрерывной функцией в интервале $[a, b]$. В самом деле, для этого достаточно показать, что

$$F(x)=\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \tag{8}$$

изображает непрерывную функцию в интервале $[a, b]$, какова бы ни была абсолютно интегрируемая функция $\varphi(s)$, если ядро $K(x, s)$ регулярно в области квадрата $a\leqslant(x, s)\leqslant b$. Другими словами, мы должны показать, что для любой постоянной точки x при произвольно малом $\varepsilon>0$ найдется достаточно малое число $\eta>0$ такое, что из неравенства $|x-x'|<\eta$ вытекает неравенство $|F(x)-F(x')|\leqslant\varepsilon$. Предположим, что это не так. Тогда возможно найти $\varepsilon>0$ такое, что при всяком n существуют значения x_n в интервале $[a, b]$, для которых будет

$$|x-x_n|<\frac{1}{n}, \quad |F(x)-F(x_n)|>\varepsilon.$$

Согласно формуле (8) можем написать

$$|F(x)-F(x_n)|\leqslant\int_a^b|K(x, s)-K(x_n, s)|\,|\varphi(s)|\,ds. \tag{9}$$

Введем обозначение

$$\int_a^b|\varphi(s)|\,ds=P.$$

По условию у функции $K(x, s)$ имеется лишь конечное число q точек прерывности с абсциссой x; пусть $s_1, s_2, \ldots, s_q$ — их ординаты. Вне интервалов $(s_i-\delta, s_i+\delta)$ функция $K(x, s)$ непрерывна на прямой с абсциссой x по отношению к совокупности обеих переменных и, следовательно, равномерно непрерывна. Таким образом можно определить N независящим от s и достаточно большим так, чтобы

$$|K(x, s)-K(x_n, s)|<\frac{\varepsilon}{2P},$$

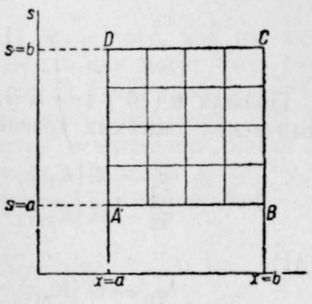
когда $n>N$, если s не лежит внутри предыдущих интервалов. Отсюда следует, что часть интеграла формулы (9), относящаяся к интервалам $(s_i-\delta, s_i+\delta)$, меньше чем $2M\int|\varphi(s)|\,ds$, где интегрирование распространено на упомянутые интервалы, а оставшаяся часть меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2P}\cdot P=\frac{\varepsilon}{2}$. Считая δ достаточно малым, можно осуществить неравенство $2M\int|\varphi(s)|\,ds<\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, по формуле (9)

$$|F(x)-F(x_n)|<2M\int|\varphi(s)|\,ds+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ при } n>N$$

в противоречие с предположением.

Итак, наше утверждение доказано.

2. В §§ 1, 2, 3 гл. I был изложен метод итераций в применении его к уравнениям Фредгольма. Мы видели, что посредством этого метода получается решение уравнения (1) только для малых по модулю значений параметра λ. Полное исчерпывающее решение задачи было дано Фредгольмом в 1904 г., и эта работа Фредгольма содержит самое выдающееся открытие начала XX в. в области анализа, после которого быстро развивается теория интегральных уравнений. Основная идея метода Фредгольма состоит в том, что интегральное уравнение (1) рассматривается как предельное для системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, когда n неограниченно возрастает. Исходя из этой идеи, можно получить основные формулы Фредгольма, дающие полное решение уравнения (1), а затем путем проверки убедиться, что полученное таким образом решение действительно удовлетворяет интегральному уравнению и является единственным. Итак, приступая к изложению метода Фредгольма, разобьем интервал $[a, b]$, в котором определены функции $\varphi(x)$ и $f(x)$, на n равных частных интервалов. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — абсциссы середин этих интервалов. Мы допустим приближенно, что функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ сохраняют в каждом интервале постоянные значения, и примем, что эти значения в интервале индекса i суть $\varphi(x_i)$ и $f(x_i)$. Ядро интегрального уравнения у нас определено в квадрате $a\leqslant(x, s)\leqslant b$. Возьмем прямоугольные декартовы координаты и вычертим этот квадрат (черт. 5). Стороны его AB и AD разделим на n равных частей и из точек деления на каждой стороне проведем прямые, параллельные другой стороне. Тогда в результате описанного построения основной квадрат $ABCD$ распадется на n^2 частных квадратов. Каждый частный квадрат мы отметим двумя индексами i и j, указывающими номер столбца и номер строки, к которым принадлежит этот квадрат. Нумеровать будем в направлении возрастающих значений x и s.



Черт. 5.

Пусть

$$\begin{gathered} x_1, s_1;\ x_2, s_1;\ \ldots;\ x_n, s_1; \\ x_1, s_2;\ x_2, s_2;\ \ldots;\ x_n, s_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1, s_n;\ x_2, s_n;\ \ldots;\ x_n, s_n \end{gathered}$$

— координаты центров соответствующих частных квадратов. Мы допустим приближенно, что функция $K(x, s)$ сохраняет в каждом частном квадрате постоянное значение, и за ее значение в квадрате с индексами i, j примем $K(x_i, s_j)$. Введем следующие сокращенные обозначения:

$$\varphi(x_i)=\varphi_i, \quad f(x_i)=f_i, \quad K(x_i, s_j)=K_{ij}.$$

При указанном нами способе аппроксимации функций $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x, s)$ интегральное уравнение (1) для каждого частного интервала индекса i примет вид

$$\varphi_i - \frac{b-a}{n}\lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j = f_i, \tag{10}$$

или

$$\varphi_i - \delta\lambda \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_j = f_i, \tag{10'}$$

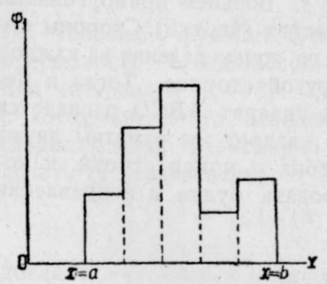
где положено

$$\delta = \frac{b-a}{n}. \tag{10''}$$

Полагая в (10′) $i = 1, 2, \ldots, n$, получим следующую систему алгебраических линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 - \delta\lambda\,[K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 + \ldots + K_{1n}\varphi_n] = f_1, \\ &\varphi_2 - \delta\lambda\,[K_{21}\varphi_1 + K_{22}\varphi_2 + \ldots + K_{2n}\varphi_n] = f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n - \delta\lambda\,[K_{n1}\varphi_1 + K_{n2}\varphi_2 + \ldots + K_{nn}\varphi_n] = f_n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если определитель этой системы не равен нулю, то из уравнений (11) мы можем определить все φ_i и таким образом получим приближенное выражение неизвестной функции $\varphi(x)$ в виде кусочно-постоянной функции. Если эту кусочно-постоянную функцию мы изобразим графически, то получим диаграмму вида приведенной на черт. 6. Чем больше n, тем точнее кусочно-постоянная функция аппроксимирует искомую неизвестную функцию. Допустим, что n неограниченно возрастает. Тогда линейная система (11) в пределе переходит в интегральное уравнение (1), а кусочно-постоянная аппроксимирующая функция стремится к некоторому пределу; вследствие этого ступенчатая диаграмма переходит в пределе в плавную кривую, являющуюся графическим изображением искомого решения. Из этих общих замечаний следует, что для разрешения уравнения (1) нужно разрешить сначала линейную систему (11) и найти предел ее решения. Для этого решению системы (11) нужно придать форму, удобную для предельного перехода.



Черт. 6.

3. Введем новые неизвестные z_i, определив их равенствами

$$\varphi_i = f_i + z_i. \tag{12}$$

Тогда система (11) может быть переписана в виде

$$z_i - \delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik}z_k = \delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik}f_k, \tag{13}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Решая эту систему, мы придем к выражениям следующего вида:

$$z_i = \delta\lambda\,[R_{i1}f_1 + R_{i2}f_2 + \ldots + R_{in}f_n], \tag{14}$$

где R_{ij} не зависят от z и f. Подставляя формулы (14) в равенства (12), находим

$$\varphi_i = f_i + \delta\lambda\,[R_{i1}f_1 + R_{i2}f_2 + \ldots + R_{in}f_n], \tag{15}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формулы (15) дают решение системы (11) после того, как мы вычислим все R. Что касается выражений для R, то они могут быть получены непосредственным вычислением; однако их будет удобнее определить другим путем. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что R не зависят от z и f и, следовательно, остаются неизменными, когда z и f изменяются, принимая различные значения. Положим $f_j = 1$, а f с прочими индексами равны нулю. Тогда система (13) примет вид

$$z_i - \delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik}z_k = \delta\lambda K_{ij}, \tag{16}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. При тех же предположениях из формул (14) находим

$$z_i = \delta\lambda R_{ij}, \tag{17}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подставляя значения z_i из (17) в уравнения (16) и полагая $j = 1, 2, \ldots, n$, получим n систем следующего вида:

$$R_{ij} - \delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik}R_{kj} = K_{ij},$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} &R_{1j} - \delta\lambda\,[K_{11}R_{1j} + K_{12}R_{2j} + \ldots + K_{1n}R_{nj}] = K_{1j}, \\ &R_{2j} - \delta\lambda\,[K_{21}R_{1j} + K_{22}R_{2j} + \ldots + K_{2n}R_{nj}] = K_{2j}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &R_{nj} - \delta\lambda\,[K_{n1}R_{1j} + K_{n2}R_{2j} + \ldots + K_{nn}R_{nj}] = K_{nj}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определитель каждой из этих систем совпадает с определителем основной системы (11)

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\delta\lambda K_{11} & -\delta\lambda K_{12} & \ldots & -\delta\lambda K_{1n} \\ -\delta\lambda K_{21} & 1-\delta\lambda K_{22} & \ldots & -\delta\lambda K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\delta\lambda K_{n1} & -\delta\lambda K_{n2} & \ldots & 1-\delta\lambda K_{nn} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Обозначая через $D_{ij}(\lambda)$ определитель, получаемый из (19) путем замены i-го столбца правыми частями j-й системы вида (18), найдем

$$R_{ij} = \frac{D_{ij}(\lambda)}{D_n(\lambda)}. \tag{20}$$

Легко видеть, что если мы развернем определители $D_n(\lambda)$ и $D_{ij}(\lambda)$, то они будут относительно λ многочленами: первый — степени n, а второй — степени $n-1$, т. е. будут иметь вид

$$D_n(\lambda) = 1 + d_1^{(n)}\lambda + d_2^{(n)}\lambda^2 + \ldots + d_n^{(n)}\lambda^n, \tag{21}$$

$$D_{ij}(\lambda) = d_0^{(ij)} + d_1^{(ij)}\lambda + d_2^{(ij)}\lambda^2 + \ldots + d_{n-1}^{(ij)}\lambda^{n-1}, \tag{21'}$$

а потому выражение для R_{ij} примет вид

$$R_{ij} = \frac{d_0^{(ij)} + d_1^{(ij)}\lambda + d_2^{(ij)}\lambda^2 + \ldots + d_{n-1}^{(ij)}\lambda^{n-1}}{1 + d_1^{(n)}\lambda + d_2^{(n)}\lambda^2 + \ldots + d_n^{(n)}\lambda^n}. \tag{22}$$

Чтобы получить выражение $D_n(\lambda)$, расположенное по степеням λ, напишем $D_n(\lambda)$ в виде

$$D_n(\lambda) = (-\delta\lambda)^n \begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}+t & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn}+t \end{vmatrix}, \tag{23}$$

где $t = -\frac{1}{\delta\lambda}$. Определив функцию $F(t)$ при помощи равенства

$$F(t) = \begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}+t & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn}+t \end{vmatrix}, \tag{23'}$$

разложим ее в ряд Маклорена

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1}F'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0). \tag{23''}$$

Из выражения (23′) следует

$$F(0) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Обозначим через D^i определитель, получаемый из определителя (23′) путем вычеркивания из него элементов i-й строки и i-го столбца, т. е. минор определителя (23′), соответствующий i-му элементу главной диагонали. Тогда, диференцируя определитель (23′), получим

$$F'(t) = D^1 + D^2 + \ldots + D^n. \tag{25}$$

Полученную сумму при $t=0$ можно представить в виде

$$F'(0) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_{n-1}} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\alpha_{n-1}\alpha_1} & K_{\alpha_{n-1}\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

где каждое из чисел α принимает любое значение из совокупности $1, 2, \ldots, n$.

Диференцируя (25), получим

$$\begin{aligned} F''(t) = D^{12} + D^{13} + \ldots + D^{1n} + \\ + D^{21} + D^{23} + \ldots + D^{2n} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + D^{n1} + D^{n2} + \ldots + D^{nn-1}, \end{aligned} \tag{27}$$

где D^{ij} обозначает определитель, образованный из определителя (23′) вычеркиванием двух строк номеров i и j и двух столбцов тех же номеров. Полагая в формуле (27) аргумент t равным нулю, представим ее в виде

$$F''(0) = \frac{2!}{(n-2)!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_{n-2}} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_{n-2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\alpha_{n-2}\alpha_1} & K_{\alpha_{n-2}\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-2}} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ принимает любое значение из совокупности $1, 2, \ldots, n$.

Проводя индукцию, получаем следующий общий результат:

$$F^{(n-m)}(0) = \frac{(n-m)!}{m!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_m} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix}, \tag{29}$$

где каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ принимает любое значение из совокупности $1, 2, \ldots, n$. При $m=0$ мы условно считаем $0! = 1$ и $\sum = 1$, т. е. $F^{(n)}(0) = n!$.

Далее, сравнивая формулы (23) и (23′), находим

$$D_n(\lambda) = (-\delta\lambda)^n F(t),$$

или, принимая во внимание разложение (23″) для $F(t)$, которое запишем по убывающим степеням t, получим

$$D_n(\lambda) = (-\delta\lambda)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{t^{n-m}}{(n-m)!} F^{(n-m)}(0).$$

Подставляя сюда значение t, а также выражение для $F^{(n-m)}(0)$ из формулы (29), окончательно найдем

$$D_n(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{(-1)^m}{m!}\lambda^m\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\begin{vmatrix}K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_m}\\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_m\alpha_m}\end{vmatrix}\delta^m\right]. \quad (30)$$

4. Поставим теперь своей задачей получить выражение $D_{ij}(\lambda)$, разложенное по степеням λ. Рассмотрим систему уравнений, получаемую из системы (18) путем присоединения к ней в качестве $(n+1)$-го уравнения принадлежащего ей уравнения индекса i:

$$\begin{aligned}
R_{1j}-\delta\lambda\,[K_{11}R_{1j}+K_{12}R_{2j}+\ldots+K_{1n}R_{nj}]&=K_{1j},\\
R_{2j}-\delta\lambda\,[K_{21}R_{1j}+K_{22}R_{2j}+\ldots+K_{2n}R_{nj}]&=K_{2j},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
R_{nj}-\delta\lambda\,[K_{n1}R_{1j}+K_{n2}R_{2j}+\ldots+K_{nn}R_{nj}]&=K_{nj},\\
-\delta\lambda\,[K_{i1}R_{1j}+K_{i2}R_{2j}+\ldots+K_{in}R_{nj}]&=K_{ij}-R_{ij}.
\end{aligned}$$

Мы имеем систему $n+1$ совместных уравнений с n неизвестными (именно в силу совместности этих уравнений мы могли в последнем неизвестное R_{ij} перенести в правую часть и рассматривать как известное); поэтому определитель, составленный из коэфициентов этой системы и правых частей, равен нулю. Итак,

$$\begin{vmatrix}1-\delta\lambda K_{11} & -\delta\lambda K_{12} & \ldots & -\delta\lambda K_{1n} & K_{1j}\\ -\delta\lambda K_{21} & 1-\delta\lambda K_{22} & \ldots & -\delta\lambda K_{2n} & K_{2j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\delta\lambda K_{n1} & -\delta\lambda K_{n2} & \ldots & 1-\delta\lambda K_{nn} & K_{nj}\\ -\delta\lambda K_{i1} & -\delta\lambda K_{i2} & \ldots & -\delta\lambda K_{in} & K_{ij}-R_{ij}\end{vmatrix}=0.$$

Разлагая этот определитель на сумму двух определителей, получим

$$\begin{vmatrix}1-\delta\lambda K_{11} & -\delta\lambda K_{12} & \ldots & -\delta\lambda K_{1n} & K_{1j}\\ -\delta\lambda K_{21} & 1-\delta\lambda K_{22} & \ldots & -\delta\lambda K_{2n} & K_{2j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\delta\lambda K_{n1} & -\delta\lambda K_{n2} & \ldots & 1-\delta\lambda K_{nn} & K_{nj}\\ -\delta\lambda K_{i1} & -\delta\lambda K_{i2} & \ldots & -\delta\lambda K_{in} & K_{ij}\end{vmatrix}-R_{ij}D_n(\lambda)=0.$$

Принимая во внимание, что

$$R_{ij}=\frac{D_{ij}(\lambda)}{D_n(\lambda)},$$

найдем

$$D_{ij}(\lambda)=(-\lambda\delta)^n\begin{vmatrix}K_{11}+t & K_{12} & \ldots & K_{1n} & K_{1j}\\ K_{21} & K_{22}+t & \ldots & K_{2n} & K_{2j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K_{n} & K_{n2} & \ldots & K_{nn}+t & K_{nj}\\ K_{i1} & K_{i2} & \ldots & k_{in} & K_{ii}\end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель в ряд по степеням t и заменяя t его значением, получим

$$D_{ij}(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left[\frac{(-1)^m}{m!}\lambda^m\delta^m\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\begin{vmatrix}K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_1\alpha_m} & K_{\alpha_1 j}\\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_2\alpha_m} & K_{\alpha_2 j}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \ldots & K_{\alpha_m\alpha_m} & K_{\alpha_m j}\\ K_{i\alpha_1} & K_{i\alpha_2} & \ldots & K_{i\alpha_m} & K_{ij}\end{vmatrix}\right], \quad (31)$$

где каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ принимает любое значение из совокупности $1, 2, \ldots, n$.

Член с λ^n в формуле (31) отсутствует, так как его коэфициент очевидно равен нулю; лишь ради симметрии формул (30) и (31) мы взяли в последней суммирование от 0 до n вместо суммирования от 0 до $n-1$.

5. Предположим теперь, что n неограниченно возрастает. Тогда кусочно постоянная функция (15), аппроксимирующая неизвестную функцию $\varphi(x)$, в пределе обратится в точное выражение этой функции. Линейная система (11) в пределе обратится в исходное интегральное уравнение. Что касается пределов $D_n(\lambda)$ и $D_{ij}(\lambda)$, то, обозначая их через $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$, найдем

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(\alpha_1,\alpha_1) & K(\alpha_1,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m)\\ K(\alpha_2,\alpha_1) & K(\alpha_2,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_2,\alpha_m)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(\alpha_m,\alpha_1) & K(\alpha_m,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m)\end{vmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m, \quad (32)$$

$$D(x, s; \lambda)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(\alpha_1,\alpha_1) & K(\alpha_1,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) & K(\alpha_1,s)\\ K(\alpha_2,\alpha_1) & K(\alpha_2,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_2,\alpha_m) & K(\alpha_2,s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(\alpha_m,\alpha_1) & K(\alpha_m,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m) & K(\alpha_m,s)\\ K(x,\alpha_1) & K(x,\alpha_2) & \ldots & K(x,\alpha_m) & K(x,s)\end{vmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m. \quad (33)$$

Выражение (20) для R_{ij} в пределе примет вид

$$R(x, s; \lambda)=\frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (34)$$

Если ряды (32) и (33) равномерно сходятся при всех x, s, а значения полиномов (21) и (21′) в пределе дают суммы этих рядов, то решение интегрального уравнения получим, переходя к пределу в решении (15) линейной системы. Таким образом найдем

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda)f(s)\,ds. \quad (35)$$

Формулы (32), (33), (34) и (35) принадлежат Фредгольму; они получены нами пока лишь путем формального перехода к пределу из соответствующих формул, дающих решение линейной системы.

Ради сокращения письма положим

$$\begin{vmatrix} K(\alpha_1, \beta_1) & K(\alpha_1, \beta_2) \ldots K(\alpha_1, \beta_n) \\ K(\alpha_2, \beta_1) & K(\alpha_2, \beta_2) \ldots K(\alpha_2, \beta_n) \\ \ldots & \ldots \\ K(\alpha_n, \beta_1) & K(\alpha_n, \beta_2) \ldots K(\alpha_n, \beta_n) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \end{pmatrix}.$$

Тогда ряды Фредгольма (32) и (33) можно представить в форме

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m,$$

$$D(x; s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, x \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, s \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m.$$

§ 3. Неравенство Адамара. 1. Чтобы обосновать формальный переход к пределу, произведенный в предыдущем параграфе для получения формул Фредгольма, нам необходимо прежде всего доказать сходимость рядов (32) и (33) при всяком значении параметра λ. Для этой цели мы воспользуемся одним неравенством, принадлежащим Адамару. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{36}$$

и обозначим через σ_i^2 сумму квадратов элементов его i-й строки, т. е. положим

$$\sigma_i^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2, \tag{37}$$

где i принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

Неравенством Адамара называется следующее неравенство:

$$|\Delta| \leqslant \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n. \tag{38}$$

В случае $n = 3$ это неравенство имеет простое геометрическое истолкование и немедленно вытекает из элементов векторной алгебры. Действительно, считая a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} за координаты некоторого вектора $\overline{a}_i$, мы знаем из векторной алгебры, что определитель Δ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$, т. е. $(\overline{a}_1 \overline{a}_2 \overline{a}_3)$; с другой стороны, скалярное произведение трех векторов по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах. Объем же параллелепипеда, очевидно, не больше, чем произведение длин его ребер. Замечая, что длины векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ — ребер параллелепипеда — обозначены через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, мы получаем неравенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leqslant \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3,$$

которое выражает очевидный геометрический факт: объем параллелепипеда не может быть больше произведения длин его ребер.

Очевидно, это неравенство обращается в равенство только в том случае, когда параллелепипед прямоугольный, т. е. если его ребра — $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ — взаимно ортогональны. Другими словами, наше неравенство выражает тот очевидный геометрический факт, что из всех параллелепипедов с данными длинами ребер наибольший объем имеет прямоугольный параллелепипед.

2. Дадим теперь вывод неравенства (38), независимый от изложенных геометрических соображений и справедливый при всяком n. Будем σ_i^2 считать данными числами и в этом предположении найдем максимум $|\Delta|$. Очевидно, $|\Delta| \leqslant \max|\Delta|$, и, следовательно, найденный максимум даст нам правую часть неравенства (38).

Прежде всего преобразуем определитель Δ, написав его в виде

$$\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\sigma_1} & \frac{a_{12}}{\sigma_1} & \ldots & \frac{a_{1n}}{\sigma_1} \\ \frac{a_{21}}{\sigma_2} & \frac{a_{22}}{\sigma_2} & \ldots & \frac{a_{2n}}{\sigma_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}}{\sigma_n} & \frac{a_{n2}}{\sigma_n} & \ldots & \frac{a_{nn}}{\sigma_n} \end{vmatrix},$$

или, приняв обозначения $C_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sigma_i}$, перепишем последнее равенство в виде

$$\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Положим

$$D = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

и заметим, что элементы i-й строки этого определителя будут удовлетворять соотношению

$$C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + \ldots + C_{in}^2 = 1, \tag{40}$$

где i может принимать значения $1, 2, \ldots, n$.

Из формулы (39) легко усматриваем, что определение наибольшего значения $|\Delta|$ при условиях (37) сводится к отысканию наибольшего значения $|D|$ при условиях (40).

Мы будем искать максимум Δ^2, сведя его к максимуму D^2 на основании соотношения

$$\Delta^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2 D^2.$$

Итак, ищем максимум D^2 при условиях (40). Это — задача Лагранжа на условный экстремум. Согласно общему методу строим вспомогательное выражение

$$H = D^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + \ldots + C_{in}^2 - 1)$$

и ищем его безусловный максимум. Диференцируя функцию H по элементам C_{ij} и приравнивая нулю полученные частные производные, получим систему равенств

$$2D \frac{\partial D}{\partial C_{ij}} + 2\lambda_i C_{ij} = 0,$$

где каждый из индексов i, j может принимать любое значение из совокупности 1, 2, ..., n.

Последнее равенство может быть представлено так:

$$DD_{ij} = -\lambda_i C_{ij},$$

где D_{ij} есть алгебраическое дополнение определителя D, соответствующее элементу C_{ij}. Умножая это равенство на C_{kj}, получим

$$DD_{ij}C_{kj} = -\lambda_i C_{ij} C_{kj}.$$

Полагая последовательно $j = 1, 2, \ldots, n$ и суммируя по j, найдем

$$D \sum_{j=1}^{n} D_{ij} C_{kj} = -\lambda_i \sum_{j=1}^{n} C_{ij} C_{kj}. \tag{40'}$$

Легко усмотреть, что $\sum_{j=1}^{n} D_{ij} C_{kj}$ представляет собой определитель, получающийся из D путем замены элементов строки i соответствующими элементами строки k. Поэтому эта сумма при $i \neq k$, как определитель с двумя одинаковыми строками, равна нулю, и мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} C_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, \tag{41}$$

так как из (40′) при $i = k$

$$\lambda_i = -D^2 \neq 0.$$

В силу этого результата определитель D будет иметь наибольшее значение, когда он будет ортогональным. Принимая во внимание также условие (40) относительно строк, найдем, что при наибольшем значении определитель D^2 имеет вид

$$D^2 = D \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

следовательно,

$$\max D^2 = 1 \quad \text{и} \quad \max \Delta^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2,$$

или

$$\max |\Delta| = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n,$$

что обнаруживает справедливость доказываемого неравенства (38).

3. В частности из неравенства (38) следует, что если в определителе Δ все элементы удовлетворяют условию $|a_{ik}| \leqslant M$, то

$$|\Delta| \leqslant M^n \sqrt{n^n}.$$

§ 4. Сходимость рядов Фредгольма и переход к пределу. 1. Применим неравенство (38) Адамара к исследованию сходимости рядов Фредгольма (32) и (33). Обращаясь к ряду (32), вспомним, что по условию $|K(x, s)| \leqslant M$. Тогда, в силу сказанного в п. 3 предыдущего параграфа, определитель в коэфициенте при λ^m по абсолютной величине будет не больше, чем $M^m \sqrt{m^m}$. Обозначая коэфициент при λ^m через d_m, имеем из (32)

$$|d_m| \leqslant (b-a)^m \frac{M^m \sqrt{m^m}}{m!}. \tag{42}$$

Далее из формулы Стирлинга

$$m! \sim \sqrt{2\pi m} \cdot m^m e^{-m}$$

имеем

$$m! > m^m \cdot e^{-m},$$

а потому (42) переходит в неравенство

$$|d_m| < \frac{[(b-a) Me]^m}{\sqrt{m^m}},$$

откуда

$$|d_m \lambda^m| < \left[\frac{(b-a) Me |\lambda|}{\sqrt{m}}\right]^m. \tag{43}$$

2. Применяя аналогичные рассуждения к ряду (33), в котором коэфициент при λ^m обозначим через $d_m(x, s)$, найдем

$$|d_m(x, s)| \leqslant \frac{M^{m+1} \sqrt{(m+1)^{m+1}}}{m!} (b-a)^m <$$

$$< \frac{(Me)^{m+1} \sqrt{(m+1)^{m+1}}}{em^m} (b-a)^m.$$

Так как $e > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, то

$$|d_m(x, s)| < (b-a)^m \frac{(Me)^{m+1}}{\sqrt{(m+1)^{m-1}}}$$

и

$$|d_m(x, s) \lambda^m| < \left[\frac{(b-a) Me |\lambda|}{\sqrt{m+1}}\right]^{m-1} (b-a) M^2 e^2 |\lambda|. \tag{44}$$

Ряды, общие члены которых выражаются правыми частями неравенств (43) и (44), сходятся при всяком значении λ, так как, начиная с некоторого m, $\frac{(b-a)\,Me\,|\lambda|}{\sqrt{m}}<q<1$. Следовательно, ряды Фредгольма (32) и (33) будут абсолютно сходящимися при всяком значении параметра λ, причем сходимость второго ряда при каждом значении λ будет равномерной относительно переменных x, s.

3. Итак, ряд Фредгольма (32) изображает целую функцию $D(\lambda)$ параметра λ; точно так же ряд (33) представляет функцию $D(x, s; \lambda)$, целую относительно параметра λ. Отношение второй функции к первой определяет согласно (34) так называемую резольвенту Фредгольма $R(x, s; \lambda)$, которая, следовательно, является мероморфной функцией параметра λ. Таким образом резольвента $R(x, s; \lambda)$ имеет определенное конечное значение при всяком значении параметра λ, не являющемся нулем функции $D(\lambda)$.

Нули функции $D(\lambda)$ будут, как мы это покажем далее, полюсами резольвенты.

4. Ряды (32) и (33) Фредгольма мы получили, совершив переход к пределу в полиномах $D_n(\lambda)$ и $D_{ij}(\lambda)$, с помощью которых была разрешена линейная система, аппроксимирующая данное интегральное уравнение. Соответственно этому из формулы (15), дающей решение линейной системы, мы получили формулу (35), разрешающую исходное интегральное уравнение. Теперь мы покажем, что этот формальный переход к пределу был законным, т. е. что значения полиномов (21) и (21′) стремятся при неограниченно возрастающем n соответственно к суммам рядов (32) и (33). Впрочем, дальнейшее изложение от этого не зависит. Прежде всего заметим, что, пользуясь неравенством Адамара, аналогично предыдущему из формул (30) и (31) получим для общих членов полиномов $D_n(\lambda)$ и $D_{ij}(\lambda)$ неравенства

$$|d_m^{(n)}\lambda^m|<\left[\frac{(b-a)\,Me\,|\lambda|}{\sqrt{m}}\right]^m, \tag{43'}$$

$$|d_m^{(ij)}\lambda^m|<\left[\frac{(b-a)\,Me\,|\lambda|}{\sqrt{m+1}}\right]^{m-1}(b-a)\,M^2e^2\,|\lambda|. \tag{44'}$$

Обратим внимание на то, что правые части последних неравенств (43′) и (44′) совпадают с правыми частями неравенств (43) и (44), и не зависят от n.

Итак, докажем, что выражение $D_n(\lambda)$ стремится при неограниченно возрастающем n к $D(\lambda)$, причем эта сходимость равномерна для всех значений λ, модуль которых не превосходит любой произвольно выбранной величины l. Предположим, что это не так. Тогда существует положительное число ε такое, что для бесконечно многих целых значений n и надлежащих значений λ_n параметра λ, $|\lambda_n|\leqslant l$, имеем

$$|D_n(\lambda_n)-D(\lambda_n)|>\varepsilon.$$

Теперь выберем m столь большим, чтобы выполнялись следующие условия. Для всех λ, $|\lambda|\leqslant l$ должно иметь место

$$|d_{m+1}\lambda^{m+1}+d_{m+2}\lambda^{m+2}+\ldots|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}, \tag{45}$$

что возможно сделать, так как ряд $D(\lambda)$ сходится при всяком λ и сходимость его, как степенного ряда, будет равномерной при $|\lambda|\leqslant l$. Далее должны быть выполнены неравенства

$$m>[2eMl(b-a)]^2, \tag{46}$$

$$\frac{1}{2^m}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{47}$$

Тогда вследствие (43′) и (46) для каждого $n>m$ будет

$$D_n(\lambda)=1+d_1^{(n)}\lambda+\ldots+d_m^{(n)}\lambda^m+d_{m+1}^{(n)}\lambda^{m+1}+\ldots+d_n^{(n)}\lambda^n=$$
$$=1+d_1^{(n)}\lambda+\ldots+d_m^{(n)}\lambda^m\pm\frac{\theta}{2^m}\qquad(0\leqslant\theta\leqslant 1),$$

или благодаря (47) будет

$$|D_n(\lambda_n)-(1+d_1^{(n)}\lambda_n+\ldots+d_m^{(n)}\lambda_n^m)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{48}$$

Определив этим способом m, выберем теперь $N>m$ столь большим, чтобы при всех $n\geqslant N$ мы имели

$$|(1+d_1^{(n)}\lambda_n+\ldots+d_m^{(n)}\lambda_n^m)-(1+d_1\lambda_n+\ldots+d_m\lambda_n^m)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{49}$$

что возможно сделать, так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty}d_m^{(n)}=d_m$ при каждом значении m.

Неравенства (45), (48) и (49) показывают, что разность между $D_n(\lambda_n)$ и $D(\lambda_n)$ по модулю должна быть меньше, чем ε, а это находится в противоречии с нашим предположением. Следовательно, утверждение доказано.

Путем совершенно аналогичных рассуждений мы можем доказать, что полином $D_{ij}(\lambda)$ стремится при неограниченном возрастании n к $D(x, s; \lambda)$, причем эта сходимость равномерна для всех значений λ, модуль которых не превосходит любой произвольно выбранной величины.

§ 5. Интегральные уравнения резольвенты. 1. Выше мы получили решение интегрального уравнения Фредгольма, изображаемое формулами (32), (33), (34) и (35), в результате перехода к пределу от решения линейной системы, с помощью которой мы аппроксимировали исходное интегральное уравнение. Таким образом наши выводы существенным образом основаны на двух гипотезах, представляющих исходную идею метода Фредгольма.

Во-первых, мы рассматривали данное интегральное уравнение как предельное для системы n линейных уравнений с n неизвестными; во-вторых, мы предполагали, что решение интегрального уравнения получается предельным переходом из решения этой линейной системы.

Чтобы обосновать справедливость этих гипотез, нам остается показать, что полученные формулы Фредгольма действительно дают решение интегрального уравнения и притом единственное.

Этот вывод будет основан на двух интегральных уравнениях, которым удовлетворяет резольвента. В гл. I, применяя метод итераций, мы получили для достаточно малых по модулю значений параметра λ решение уравнения Фредгольма в виде той же формулы (35), причем входящая в эту формулу резольвента изображалась степенным рядом относительно λ. Естественно ожидать, что найденная теперь резольвента Фредгольма, определенная в виде отношения всюду сходящихся рядов (32) и (33), будет тождественно совпадать с прежде введенной резольвентой для значений параметра λ, модуль которых достаточно мал. Иными словами, резольвента Фредгольма — мероморфная функция параметра λ — есть аналитическое продолжение резольвенты, определенной по методу итераций для малых по модулю значений λ. Чтобы это показать, вспомним, что, отправляясь от определения резольвенты помощью степенного ряда, мы получили для нее в § 5 гл. I два интегральных уравнения (16) и (17). Легко видеть, что, обратно, отправляясь от любого из этих интегральных уравнений, мы получим немедленно представление резольвенты в виде того степенного ряда относительно параметра λ, который служил ее определением в методе итераций. Следовательно, проверив, что резольвента Фредгольма при всех значениях параметра λ, не являющихся корнями ее знаменателя, удовлетворяет интегральным уравнениям (16) и (17), мы вместе с тем докажем ее тождественность для малых по модулю значений λ с резольвентой, найденной методом итераций. Кроме того, эти интегральные уравнения резольвенты Фредгольма послужат нам вспомогательным аналитическим аппаратом для обоснования метода Фредгольма, о котором говорилось в начале этого пункта.

2. Итак, подставим в уравнение (16) § 5 гл. I вместо $R(x, s; \lambda)$ отношение $\frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}$; умножая затем обе части на $D(\lambda)$, мы получим

$$D(x, s; \lambda)=K(x, s)\,D(\lambda)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,D(t, s; \lambda)\,dt, \tag{50}$$

где $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ определены рядами (32) и (33).

Пользуясь введенным ранее сокращенным обозначением, ряды (32) и (33) представим в виде

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m, \tag{32'}$$

$$D(x, s; \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & x\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m. \tag{33'}$$

Сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях равенства (50), обнаружим, что они совпадают. В самом деле, свободные члены в левой и правой частях формулы (50) суть соответственно $K(x, s)$ и $K(x, s)\cdot 1$; коэфициенты при λ будут

$$-\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & x\\ \alpha_1, & s\end{pmatrix}d\alpha_1$$

и

$$-K(x, s)\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1+\int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt.$$

Надо, следовательно, показать, что

$$\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & x\\ \alpha_1, & s\end{pmatrix}d\alpha_1=K(x, s)\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1-\int_a^b K(x, \alpha_1)\,K(\alpha_1, s)\,d\alpha_1.$$

Но это вытекает из равенства

$$K\begin{pmatrix}\alpha_1, & x\\ \alpha_1, & s\end{pmatrix}=K(x, s)\,K(\alpha_1, \alpha_1)-K(x, \alpha_1)\,K(\alpha_1, s).$$

Вообще коэфициенты при λ^m в левой и правой частях равенства (50) будут

$$\frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m; & x\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m$$

и

$$K(x, s)\,\frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}d\alpha_1\ldots d\alpha_m+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_a^b\ldots\int_a^b K(x, \alpha_m)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{m-1}, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{m-1}, & s\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m;$$

чтобы показать их совпадение, нужно обнаружить справедливость равенства

$$\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & x\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m=$$

$$=K(x, s)\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m-$$

$$-m\int_a^b\ldots\int_a^b K(x, \alpha_m)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{m-1}, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_{m-1}, & s\end{pmatrix}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m. \tag{51}$$

Для этой цели, разлагая определитель $K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & x\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s\end{pmatrix}$ по элементам последней строки и переставляя столбцы в его минорах, найдем

$$K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & x\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s\end{pmatrix}=$$

$$=K(x, s)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}-K(x, \alpha_1)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ s, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}-$$

$$-K(x, \alpha_2)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & s, & \ldots, & \alpha_m\end{pmatrix}-\ldots-K(x, \alpha_m)\,K\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & s\end{pmatrix}.$$

Умножим последнее равенство на $d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_m$ и проинтегрируем по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ в пределах от a до b; замечая, что величина этих кратных интегралов не зависит от обозначений, принятых для переменных интегрирования, придем к формуле (51).

Итак, мы обнаружили справедливость равенства (50) при всяком значении параметра λ. Разделив обе его части на $D(\lambda)$, предполагая $D(\lambda) \neq 0$, и вводя обозначение (34)

$$R(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)},$$

получим интегральное уравнение резольвенты Фредгольма

$$R(x, s; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\, dt = K(x, s). \qquad (16')$$

Это есть знакомое нам из § 5 гл. I уравнение (16), которое теперь получено для резольвенты Фредгольма.

3. Поступая аналогично предыдущему, мы можем проверить, что резольвента Фредгольма удовлетворяет и уравнению (17) § 5 гл. I:

$$R(x, s; \lambda) - \lambda \int_a^b K(t, s) R(x, t; \lambda)\, dt = K(x, s). \qquad (17')$$

§ 6. Обоснование метода Фредгольма. 1. Покажем, что функция $\varphi(x)$, определяемая формулой Фредгольма (35):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \qquad (35')$$

действительно удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t)\, dt. \qquad (52)$$

В самом деле, внося выражение для $\varphi(x)$ из формулы Фредгольма (35′) в последнее интегральное уравнение, получим

$$f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\, ds \right] dt,$$

или

$$\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) f(s)\, ds dt,$$

откуда получим

$$\int_a^b \left[R(x, s; \lambda) - K(x, s) - \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\, dt \right] f(s)\, ds = 0.$$

Последнее равенство справедливо, так как выражение в скобках под знаком интеграла есть нуль вследствие уравнения (16′), которому должна удовлетворять резольвента.

§ 7. Единственность решения. 1. Мы показали, что формула Фредгольма (35′) дает непрерывное решение интегрального уравнения (52). Остается доказать, что это решение единственно; это можно сделать, воспользовавшись вторым интегральным уравнением (17′) резольвенты.

Действительно, пусть $\varphi(x)$ есть непрерывное решение уравнения (52). Из этого уравнения получаем

$$\int_a^b R(x, s; \lambda) \varphi(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t) R(x, s; \lambda) \varphi(t)\, ds dt,$$

или, приняв во внимание уравнение (17′),

$$\int_a^b R(x, s; \lambda) \varphi(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds + \int_a^b \varphi(t) [R(x, t; \lambda) - K(x, t)]\, dt,$$

т. е.

$$\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds = \int_a^b K(x, t) \varphi(t)\, dt.$$

Комбинируя это равенство с уравнением (52), получаем формулу (35′).

§ 8. Первая теорема Фредгольма. 1. Из предыдущего вытекает справедливость *первой теоремы Фредгольма.*

Если λ не есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$, то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds = f(x)$$

имеет единственное непрерывное решение, определяемое формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds,$$

где $R(x, s; \lambda) = \dfrac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}$.

Функции $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ определяются ***рядами*** *(32) и (33),* ***сходящимися во всей плоскости комплексного параметра*** λ.

2. Совершенно аналогично предыдущему можно доказать, что уравнение, присоединенное к уравнению (52)

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(s, x) \psi(s)\, ds = g(x), \qquad (53)$$

имеет единственное непрерывное решение, определяемое формулой

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(s, x; \lambda)\, g(s)\, ds, \tag{54}$$

где $R(s, x; \lambda) = \dfrac{D(s, x; \lambda)}{D(\lambda)}$.

Заметим, что мы переходим от данного интегрального уравнения с ядром $K(x, s)$ и правой частью $f(x)$ к его присоединенному уравнению с той же правой частью, если в ядре $K(x, s)$ переставим аргументы x и s, причем за переменное интегрирования попрежнему будем считать s. Обращаясь к функциям Фредгольма $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$, представленным рядами (32) и (33), мы немедленно усматриваем, что при такой перестановке аргументов ядра значение $D(\lambda)$ не изменится, так как дело сведется к перемене строк на столбцы во всех определителях, входящих в различные члены ряда (32), а такая перестановка не изменит значений этих определителей. Что касается значения $D(x, s; \lambda)$, то оно, вообще говоря, изменится, так как все члены ряда (33), изображающего функцию $D(x, s; \lambda)$, зависят от x и s, и следовательно, полученное значение $D(s, x; \lambda)$ будет отличным от $D(x, s; \lambda)$. Таким образом резольвента присоединенного уравнения получается из резольвенты данного уравнения путем перестановки в этой последней аргументов x и s, т. е. таким же точно образом, как ядро присоединенного уравнения получается из ядра первоначального уравнения.

После этих замечаний формула (54), дающая решение присоединенного интегрального уравнения, вытекает сразу из формулы (35′), дающей решение данного интегрального уравнения. Из рассмотрения рядов $D(x, s; \lambda)$ и $D(s, x; \lambda)$ мы сразу усматриваем, что $D(x, s; \lambda) \equiv D(s, x; \lambda)$ только в том случае, когда $K(x, s) \equiv K(s, x)$. В этом случае присоединенное интегральное уравнение с правой частью $g(x) = f(x)$ совпадает с данным интегральным уравнением, а формула (54), дающая его решение, обращается в формулу (35′), представляющую решение первоначального уравнения.

Ядра, удовлетворяющие условию $K(x, s) \equiv K(s, x)$, носят название *симметрических* ядер; присоединенное уравнение для уравнения с симметрическим ядром обращается в первоначальное уравнение [при условии равенства правых частей $f(x)$ и $g(x)$], а его резольвента $R(s, x; \lambda)$ совпадает с резольвентой данного уравнения $R(x, s; \lambda)$, будучи симметрической функцией относительно аргументов x и s.

§ 9. Вычисление коэфициентов рядов Фредгольма. 1. Вычисление коэфициентов при различных степенях λ в рядах Фредгольма (32) и (33) при помощи детерминантных формул является практически весьма затруднительным. Поэтому для коэфициентов $d_1, d_2, \ldots$ и $d_1(x, s)$, $d_2(x, s), \ldots$ рядов

$$\left.\begin{aligned} D(\lambda) &= 1 + d_1\lambda + d_2\lambda + \ldots, \\ D(x, s; \lambda) &= K(x, s) + d_1(x, s)\lambda + d_2(x, s)\lambda^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

мы дадим простые рекуррентные формулы. Одна из них легко получается, если воспользоваться интегральным уравнением (16′) резольвенты. Действительно, умножая обе части уравнения резольвенты (16′) на $D(\lambda)$, получим

$$D(\lambda) R(x, s; \lambda) = K(x, s) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t) D(\lambda) R(t, s; \lambda)\, dt.$$

Принимая затем во внимание, что

$$D(\lambda) R(x, s; \lambda) = D(x, s; \lambda),$$
$$D(\lambda) R(t, s; \lambda) = D(t, s; \lambda),$$

из последней формулы имеем

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t) D(t, s; \lambda)\, dt. \tag{56}$$

Мысля $D(x, s; \lambda)$ и $D(\lambda)$ в виде рядов (55), расположенных по степеням λ, и сравнивая коэфициенты при одинаковых степенях, находим первую рекуррентную формулу

$$d_m(x, s) = K(x, s)\, d_m + \int_a^b K(x, t)\, d_{m-1}(t, s)\, dt. \tag{57}$$

Чтобы получить вторую формулу, сравним непосредственно коэфициенты d_{m+1} и $d_m(x, s)$ рядов (55):

$$d_{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & \alpha_{m+1} \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & \alpha_{m+1} \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{m+1},$$

$$d_m(x, s) = \frac{(-1)^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & x \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, & s \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m.$$

Если положить в последней формуле $x = s$, затем проинтегрировать ее по s в пределах от a до b и, наконец, умножить на $-\dfrac{1}{m+1}$, то в результате, очевидно, получим d_{m+1}. Следовательно, имеем

$$d_{m+1} = -\frac{1}{m+1} \int_a^b d_m(s, s)\, ds. \tag{58}$$

Формулы (58) и (57) определяют каждый последующий коэфициент рядов (55) по предыдущим. Что касается начальных коэфициентов этих рядов d_0 и $d_0(x, s)$, то они будут

$$d_0 = 1, \quad d_0(x, s) = K(x, s).$$

Таким образом, полагая в формуле (58) $m = 0$, найдем d_1; затем из формулы (57) при $m = 1$ получим $d_1(x, s)$; снова применяя формулу (58) при $m = 1$, получим d_2, а из формулы (57) для $m = 2$ найдем $d_2(x, s)$, и т. д.

§ 10. Фундаментальные числа. 1. Решение интегрального уравнения по формуле (35′) предполагает, что значение параметра λ не есть корень уравнения $D(\lambda)=0$. Эта формула теряет смысл для тех значений λ, которые удовлетворяют уравнению

$$D(\lambda)=0. \tag{59}$$

Корни этого уравнения называются *фундаментальными числами* (собственными значениями) интегрального уравнения или его ядра. Так как $D(\lambda)$ есть целая функция комплексного параметра λ, то множество фундаментальных чисел не может иметь предельную точку на конечном расстоянии и, следовательно, все фундаментальные числа могут быть пронумерованы в порядке неубывающих модулей:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

где

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$$

Далее, фундаментальное число λ_i может быть простым или кратным корнем уравнения (59) с определенной конечной кратностью.

Покажем, что если λ' есть фундаментальное число интегрального уравнения, то оно будет полюсом его резольвенты.

Для доказательства нам придется воспользоваться одной вспомогательной формулой, которую сначала мы и выведем. Полагая в ряде (55) для $D(x, s; \lambda)$ переменное $x=s$, получим

$$D(s, s; \lambda)=K(s, s)+\lambda d_1(s, s)+\lambda^2 d_2(s, s)+\ldots$$

Интегрируя это равенство по s в пределах от a до b и принимая во внимание рекуррентную формулу (58), найдем

$$\int_a^b D(s, s; \lambda)\, ds=-d_1-2d_2\lambda-3d_3\lambda^2-\ldots$$

С другой стороны, диференцируя ряд $D(\lambda)$ по λ, получим

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=d_1+2d_2\lambda+3d_3\lambda^2+\ldots$$

Сравнивая два полученных выражения, находим

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=-\int_a^b D(s, s; \lambda)\, ds, \tag{60}$$

или, разделив обе части на $D(\lambda)$,

$$\frac{d}{d\lambda}\ln D(\lambda)=-\int_a^b R(s, s; \lambda)\, ds. \tag{60'}$$

2. Обращаясь теперь к доказательству сформулированного выше предложения, допустим, что λ' не есть полюс резольвенты. Это значит, что, каковы бы ни были x и s, λ' будет корнем числителя $D(x, s; \lambda)$ резольвенты, причем порядок его кратности p_1 не меньше порядка кратности p этого же фундаментального числа λ', рассматриваемого как корень знаменателя $D(\lambda)$:

$$p_1 \geqslant p. \tag{61}$$

Диференцированием формулы (60) получаем

$$\frac{d^h}{d\lambda^h}D(\lambda)=-\int_a^b \frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}D(s, s; \lambda)\, ds.$$

Если в этом тождестве положим $\lambda=\lambda'$ и заметим, что

$$\frac{d^{h-1}}{d\lambda^{h-1}}D(s, s; \lambda')\equiv 0 \quad \text{для} \quad h=1, 2, \ldots, p_1,$$

то получим

$$\frac{d^h}{d\lambda^h}D(\lambda)=0 \quad \text{для} \quad \lambda=\lambda' \quad \text{и} \quad h=1, 2, \ldots, p_1.$$

Значит, $p \geqslant p_1+1$, но это противоречит неравенству (61).

3. Из формулы (60′) легко получить разложение по степеням λ логарифма функции $D(\lambda)$.

Для этого воспользуемся разложением $R(x, s; \lambda)$ по степеням λ, полученным в гл. I методом итераций. Имеем

$$R(s, s; \lambda)=K(s, s)+\lambda K_2(s, s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(s, s)+\ldots,$$

где K_2, K_3, ... суть последовательные итерации ядра K. Подставляя последнее разложение в формулу (60′), получим

$$-\frac{d}{d\lambda}\ln D(\lambda)=\int_a^b K(s, s)\, ds+\lambda\int_a^b K_2(s, s)\, ds+\ldots$$

$$\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K_n(s, s)\, ds+\ldots, \tag{60''}$$

откуда, заметив, что $D(0)=1$, найдем

$$\ln D(\lambda)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\int_a^b K_n(s, s)\, ds.$$

Очевидно, разложение (60″) и только что написанное имеют место при достаточно малых по модулю значениях параметра λ, а именно, когда $|\lambda|$ меньше, чем модуль первого фундаментального числа.

§ 11. Решение однородного уравнения. Вторая теорема Фредгольма. 1. Рассмотрим теперь однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds=0, \tag{62}$$

т. е. уравнение Фредгольма II рода, в котором правая часть $f(x)$ есть тождественный нуль. Это уравнение имеет очевидное решение $\varphi(x)\equiv 0$. Если λ не есть фундаментальное число, то первая теорема Фредгольма показывает, что решение $\varphi(x)\equiv 0$ есть единственное. Таким образом нам остается исследовать случай, когда λ есть фундаментальное число.

Очевидно, что если существует ненулевое решение уравнения (62), то тем самым будет существовать бесконечное множество решений этого уравнения, которые получим путем умножения одного из них на произвольный числовой фактор. Далее ясно, что если существует несколько линейно независимых решений уравнения (62), то всякая линейная и однородная комбинация их с постоянными коэфициентами будет также ненулевым его решением. Таким образом прежде всего возникает вопрос о существовании хотя бы одного ненулевого решения однородного интегрального уравнения. Докажем, что если λ' есть фундаментальное число ядра $K(x, s)$, то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda' \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0 \qquad (62')$$

имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Рассмотрим формулу (56)

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t) D(t, s; \lambda)\,dt$$

и предположим в ней $\lambda \to \lambda'$, причем $D(\lambda') = 0$. Тогда в пределе эта формула примет вид

$$D(x, s; \lambda') = \lambda' \int_a^b K(x, t) D(t, s; \lambda')\,dt.$$

Сравнивая последнюю формулу с уравнением (62'), мы видим, что это уравнение имеет решение $\varphi(x) = D(x, s; \lambda')$. Полученное решение зависит от произвольного параметра s. Однако это доказательство не может считаться окончательным, вполне подтверждающим нашу теорему, так как может оказаться, что $D(x, s; \lambda')$ есть тождественный нуль. Поэтому мы дадим другое доказательство интересующей нас теоремы.

2. Вследствие предложения, установленного в § 10, фундаментальное число λ' будет полюсом резольвенты $R(x, s; \lambda)$, порядок которого r по крайней мере равен единице. Следовательно, на основании известного результата теории функций комплексного переменного мы можем представить эту резольвенту в виде

$$R(x, s; \lambda) = \frac{\varphi_r(x, s)}{(\lambda - \lambda')^r} + \frac{\varphi_{r-1}(x, s)}{(\lambda - \lambda')^{r-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1(x, s)}{\lambda - \lambda'} + \varphi_0(x, s; \lambda),$$

где $\varphi_r(x, s)$ заведомо не может быть тождественным нулем, а $\varphi_0(x, s; \lambda)$ есть голоморфная функция относительно λ вблизи значения $\lambda = \lambda'$. Такое представление резольвенты имеет место для всех значений комплексного параметра λ, достаточно близких к полюсу λ'.

Воспользуемся теперь интегральными уравнениями резольвенты (16) и (17), выведенными в § 5:

$$R(x, s; \lambda) - K(x, s) = \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\,dt,$$

$$R(x, s; \lambda) - K(x, s) = \lambda \int_a^b K(t, s) R(x, t; \lambda)\,dt,$$

которые перепишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &R(x, s; \lambda) - K(x, s) = \\ &= (\lambda - \lambda') \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\,dt + \lambda' \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\,dt, \\ &R(x, s; \lambda) - K(x, s) = \\ &= (\lambda - \lambda') \int_a^b K(t, s) R(x, t; \lambda)\,dt + \lambda' \int_a^b K(t, s) R(x, t; \lambda)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Подставляя сюда вместо $R(x, s; \lambda)$ написанное выше ее выражение и отождествляя коэфициенты при $(\lambda - \lambda')^{-r}$ в левой и правой частях формул (63), найдем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_r(x, s) &= \lambda' \int_a^b K(x, t)\varphi_r(t, s)\,dt, \\ \varphi_r(x, s) &= \lambda' \int_a^b K(t, s)\varphi_r(x, t)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Первая из этих формул показывает, что функция $\varphi(x) = \varphi_r(x, s)$, где s имеет какое-нибудь числовое значение, удовлетворяет интегральному уравнению (62). Так как $\varphi_r(x, s)$ не может быть тождественным нулем относительно x и s, то существует числовое значение θ, заключенное в интервале $[a, b]$, такое, что $\varphi_r(x, \theta)$ будет функцией от x, не равной тождественно нулю. Эта функция будет решением уравнения (62'), и, следовательно, теорема доказана. Что касается второй формулы (64), то она показывает, что функция $\overline{\varphi}(s) = \varphi_r(x, s)$, где x имеет какое-нибудь числовое значение, удовлетворяет интегральному уравнению, присоединенному к уравнению (62'). Так как $\varphi_r(x, s)$ не может быть тождественным нулем, то существует числовое значение θ' такое, что $\varphi_r(\theta', s)$ будет функцией от s, не равной тождественно нулю. Эта функция будет решением присоединенного уравнения, и таким образом, мы одновременно доказали существование ненулевого решения также для однородного интегрального уравнения, присоединенного к уравнению (62').

3. Чтобы получить все линейно независимые решения однородного интегрального уравнения, соответствующие данному фундаментальному числу λ', вернемся к методу, намеченному в начале этого параграфа. Было установлено, что вопрос о существовании решения однородного интегрального уравнения остается открытым, если

$$D(\lambda') = 0, \quad D(x, s; \lambda') \equiv 0.$$

Для разбора этого случая введем вместе с Фредгольмом понятие p-го минора от $D(\lambda)$. Пользуясь ранее введенным сокращенным обозначением

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2), & \ldots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2), & \ldots & K(x_2, s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2), & \ldots & K(x_n, s_n) \end{vmatrix},$$

положим

$$
\left.
\begin{aligned}
& B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix} = \\
& = \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n, \\
& B_0\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\right\} \tag{65}
$$

Тогда по определению p-й минор от $D(\lambda)$ выражается рядом

$$
\begin{aligned}
& D\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix}; \lambda\Bigg) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!} B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix} \equiv D_p(x, s; \lambda),
\end{aligned} \tag{66}
$$

который при $p = 1$ обращается в $D(x, s; \lambda)$.

Воспользовавшись неравенством Адамара, можно доказать вполне аналогично тому, как мы это делали раньше для $D(x, s; \lambda)$, следующее предложение.

Ряд (66) для $D_p(x, s; \lambda)$ абсолютно сходится при всяком значении параметра λ и равномерно сходится относительно $x_1, x_2, \dots, x_p$, $s_1, s_2, \dots, s_p$, удовлетворяющих неравенствам

$$
a \leqslant x_i \leqslant b, \quad a \leqslant s_j \leqslant b \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p).
$$

Из самого определения $D_p(x, s; \lambda)$ следует, что если два значения x или s с различными индексами становятся равными, например $x_i = x_j$, или же $s_\alpha = s_\beta$, то $D_p(x, s; \lambda)$ обращается в нуль. В самом деле, тогда в определителе, стоящем под знаком интеграла в выражении $B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix}$, две строки (или два столбца) становятся одинаковыми, поэтому $B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix} = 0$ и, следовательно, $D_p(x, s; \lambda) = 0$. Аналогично можно показать, что если в $D_p(x, s; \lambda)$ переменить местами два x или же два s с разными индексами, то $D_p(x, s; \lambda)$ переменит лишь знак.

4. Фундаментальное соотношение Фредгольма (56) для $D(x, s; \lambda)$ может быть обобщено на миноры $D_p(x, s; \lambda)$. С этой целью разложим определитель, стоящий под знаком интеграла в $B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix}$, по элементам столбца s_β:

$$
\begin{aligned}
& B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_p \end{pmatrix} = \\
& = \int_a^b \dots \int_a^b \Bigg\{ \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, s_\beta) K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_{\alpha-1}, & x_{\alpha+1}, & \dots, & x_p, & t_1, & \dots, & t_n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p, & t_1, & \dots, & t_n \end{pmatrix} + \\
& + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{p+\beta+i} K(t_i, s_\beta) K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{i-1}, & t_{i+1}, & \dots, & t_n \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_n \end{pmatrix} \Bigg\} dt_1 dt_2 \dots dt_n
\end{aligned}
$$

Производя интегрирование под знаком первой суммы и пользуясь первой формулой (65), мы запишем эту сумму так:

$$
\sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, s_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_{\alpha-1}, & x_{\alpha+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix}.
$$

Переменив перед интегрированием во второй сумме обозначения t_i, $t_{i+1}, \dots, t_n$ на $t, t_i, \dots, t_{n-1}$, представим i-й член этой суммы в виде

$$
(-1)^{p+\beta+i} K(t, s_\beta) K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{n-1} \\ s_1, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p, & t_1, & \dots, & t_{i-1}, & t, & t_i, & \dots, & t_{n-1} \end{pmatrix}.
$$

Перенесем теперь столбец t на место между столбцами $s_{\beta-1}$ и $s_{\beta+1}$, на что понадобится $i + p - \beta - 1$ последовательных транспозиций. После этого i-й член второй суммы представится в виде

$$
-K(t, s_\beta) K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_{\beta-1}, & x_\beta, & x_{\beta+1}, & \dots, & x_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\beta-1}, & t, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{n-1} \end{pmatrix},
$$

а это показывает, что интегралы всех членов второй суммы равны между собой. Поэтому, интегрируя сначала относительно $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, представим эту сумму в виде

$$
-n \int_a^b K(t, s_\beta) \left[\int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{\beta-1}, & x_\beta, & x_{\beta+1}, & \dots, & x_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{n-1} \\ s_1, & \dots, & s_{\beta-1}, & t, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p, & t_1, & t_2, & \dots, & t_{n-1} \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_{n-1} \right] dt
$$

что согласно формуле (65) приводится к

$$
-n \int_a^b K(t, s_\beta) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_{\beta-1}, & x_\beta, & x_{\beta+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\beta-1}, & t, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix} dt.
$$

Таким образом мы получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
& B_n\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_p \\ s_1, & \dots, & s_p \end{pmatrix} = \\
& = \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, s_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{\alpha-1}, & x_{\alpha+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix} - \\
& \quad - n \int_a^b K(t, s_\beta) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{\beta-1}, & x_\beta, & x_{\beta+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & \dots, & s_{\beta-1}, & t, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix} dt.
\end{aligned} \tag{67}
$$

Аналогично, разлагая определитель, стоящий под знаком интеграла в выражении (65) для B_n, по элементам строки x_α, мы получим соотношение

$$
\begin{aligned}
& B_n\begin{pmatrix} x_1 \dots, & x_p \\ s_1 \dots, & s_p \end{pmatrix} = \\
& = \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} K(x_\alpha, s_\beta) B_n\begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_{\alpha-1}, & x_{\alpha+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & \dots, & s_{\beta-1}, & s_{\beta+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix} - \\
& \quad - n \int_a^b K(x_\alpha, t) B_{n-1}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_{\alpha-1}, & t, & x_{\alpha+1}, & \dots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_{\alpha-1}, & s_\alpha, & s_{\alpha+1}, & \dots, & s_p \end{pmatrix} dt.
\end{aligned} \tag{68}
$$

Умножая обе части формул (67) и (68) на $(-1)^n \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!}$ и суммируя затем по n от $n=0$ до $n=\infty$, мы получим согласно формуле (66) следующие два соотношения:

$$D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ s_1, \ldots, s_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \lambda K(x_\alpha, s_\beta) D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots x_p \\ s_1, \ldots, s_{\beta-1}, s_{\beta+1}, \ldots s_p \end{matrix}; \lambda\right) +$$

$$+ \lambda \int_a^b K(t, s_\beta) D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_{\beta-1}, x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots x_p \\ s_1, \ldots, s_{\beta-1}, t, s_{\beta+1}, \ldots s_p \end{matrix}; \lambda\right) dt \qquad (69)$$

и

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_p \\ s_1, \ldots, s_p \end{matrix}; \lambda\right) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \lambda K(x_\alpha, s_\beta) D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots x_p \\ s_1, \ldots, s_{\beta-1}, s_{\beta+1}, \ldots, s_p \end{matrix}; \lambda\right) +$$

$$+ \lambda \int_a^b K(x_\alpha, t) D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, t, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p \\ s_1, \ldots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \ldots, s_p \end{matrix}; \lambda\right) dt. \qquad (70)$$

При $p=1$ формулы (69) и (70) обращаются в ранее установленные фундаментальные соотношения Фредгольма, немедленно вытекающие из двух интегральных уравнений для резольвенты.

5. Точно так же соотношение (60) между $D'(\lambda)$ и $D(s, s; \lambda)$ является частным случаем следующего общего соотношения:

$$\int_a^b \ldots \int_a^b D\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_p \\ s_1, s_2, \ldots, s_p \end{matrix}; \lambda\right) ds_1 ds_2 \ldots ds_p = (-1)^p \lambda^{p-1} \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p}. \qquad (71)$$

В самом деле, диференцируя p раз ряд

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n \frac{\lambda^n}{n!},$$

мы получаем

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n d_n \frac{\lambda^{n-p}}{(n-p)!},$$

или

$$D^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} d_{n+p} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Заметив, что в последней формуле

$$d_{n+p} = \int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{matrix} t_1, t_2, \ldots, t_{n+p} \\ t_1, t_2, \ldots, t_{n+p} \end{matrix}\right) dt_1 \ldots dt_{n+p},$$

мы подставим $x_1, x_2, \ldots, x_p, t_1, t_2, \ldots, t_n$ вместо $t_1, t_2, \ldots, t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+n}$ и произведем сначала интегрирование по $t_1, t_2, \ldots, t_n$, тогда получим

$$d_{n+p} = \int_a^b \ldots \int_a^b \left[\int_a^b \ldots \int_a^b K\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p, t_1, t_2, \ldots, t_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_p, t_1, t_2, \ldots, t_n \end{matrix}\right) dt_1 \ldots dt_n \right] dx_1 \ldots dx_p,$$

что согласно формуле (65) может быть записано так:

$$d_{n+p} = \int_a^b \ldots \int_a^b B_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{matrix}\right) dx_1 \ldots dx_p.$$

Умножая обе части этого равенства на $(-1)^n \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!}$ и суммируя затем по n от $n=0$ до $n=\infty$, мы найдем

$$(-1)^p \lambda^{p-1} D^{(p)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \ldots \int_a^b \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!} (-1)^n B_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{matrix}\right) dx_1 \ldots dx_p.$$

Производя суммирование под знаком интеграла и применяя затем формулу (66), получим

$$(-1)^p \lambda^{p-1} \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p} = \int_a^b \ldots \int_a^b D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_p \\ x_1, \ldots, x_p \end{matrix}; \lambda\right) dx_1 \ldots dx_p,$$

т. е. соотношение (71).

6. Последним результатом мы воспользуемся для доказательства того, что не все миноры Фредгольма тождественно равны нулю.

В самом деле, пусть λ' будет корень уравнения $D(\lambda)=0$. Тогда во всяком случае $\lambda' \neq 0$, потому что $D(0)=1$. Обозначим через r кратность корня λ', т. е. предположим, что

$$D(\lambda')=0, \quad D'(\lambda')=0, \quad \ldots, \quad D^{(r-1)}(\lambda')=0, \quad D^{(r)}(\lambda') \neq 0.$$

Полагая в формуле (71) $p=r$, $\lambda=\lambda'$, мы видим, что интеграл, стоящий в левой части этой формулы, не равен нулю, потому что правая часть не равна нулю. Следовательно, $D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_r \\ x_1, \ldots, x_r \end{matrix}; \lambda'\right)$ не есть тождественный нуль, и, значит,

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_r \\ s_1, \ldots, s_r \end{matrix}; \lambda'\right) \not\equiv 0.$$

Отсюда, идя по ряду

$$D(\lambda'), \quad D\left(\begin{matrix} x_1 \\ s_1 \end{matrix}; \lambda'\right), \quad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2 \\ s_1, s_2 \end{matrix}; \lambda'\right), \ldots,$$

мы должны притти к некоторому числу q, $q \leqslant r$, называемому *рангом* фундаментального числа λ', такому, что

$$D(\lambda')=0, \quad D\left(\begin{matrix} x_1 \\ s_1 \end{matrix}; \lambda'\right) \equiv 0, \quad \ldots, \quad D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_{q-1} \\ s_1, \ldots, s_{q-1} \end{matrix}; \lambda'\right) \equiv 0,$$

$$D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_q \\ s_1, \ldots, s_q \end{matrix}; \lambda'\right) \not\equiv 0.$$

Последнее неравенство означает, что существует некоторая совокупность значений $x'_1, \ldots, x'_q, s'_1, \ldots, s'_q$ переменных $x_1, \ldots, x_q, s_1, \ldots, s_q$, при которых имеет место численное неравенство

$$D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda' \neq 0.$$

Итак, мы показали, что ранг q корня уравнения $D(\lambda) = 0$ меньше или самое большее равен кратности r этого корня: $q \leqslant r$.

7. Построим теперь q линейно независимых решений однородного интегрального уравнения, соответствующих фундаментальному числу λ', и покажем, что они представляют полную совокупность таких решений.

Напишем второе обобщенное фундаментальное соотношение Фредгольма (70) для значений

$$\lambda = \lambda', \quad p = q,$$

$$x_1 = x'_1, \ldots, x_{\alpha-1} = x'_{\alpha-1}, \; x_\alpha = x, \; x_{\alpha+1} = x'_{\alpha+1}, \ldots, x_q = x'_q,$$
$$s_1 = s'_1, \ldots, s_{\alpha-1} = s'_{\alpha-1}, \; s_\alpha = s'_\alpha, \ldots, s_q = s'_q;$$

оно примет вид

$$D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, x, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_{\alpha-1}, s'_\alpha, s'_{\alpha+1}, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda' =$$

$$= \lambda' \int_a^b K(x, t)\, D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, t, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_{\alpha-1}, s'_\alpha, s'_{\alpha+1}, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda' dt.$$

Разделив обе части полученного равенства на $D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda'$ и положив при этом

$$D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_{\alpha-1}, x, x'_{\alpha+1}, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_{\alpha-1}, s'_\alpha, s'_{\alpha+1}, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda' = \varphi_\alpha(x)\, D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda', \quad (72)$$

будем иметь

$$\varphi_\alpha(x) = \lambda' \int_a^b K(x, t)\, \varphi_\alpha(t)\, dt.$$

Это значит, что q функций $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, q)$ являются решениями однородного интегрального уравнения (62), причем, очевидно, в силу своего определения они удовлетворяют условиям

$$\varphi_\beta(x'_\beta) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_\alpha(x'_\beta) = 0, \quad \text{если } \beta \neq \alpha. \qquad (73)$$

Легко показать, что найденные q непрерывных решений линейно независимы, т. е. что из соотношения $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x) \equiv 0$, где c_i — постоянные, следует, что все c_i равны нулю. Действительно, полагая в этом соотношении $x = x'_\alpha$, мы найдем по формулам (73), что $c_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, q)$.

Из однородности линейного интегрального уравнения (62′) следует, что функция

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x), \qquad (74)$$

где $c_1, \ldots, c_q$ — произвольные постоянные, также является решением уравнения (62′), причем это решение не может быть тождественным нулем, если c_i одновременно не равны нулю. Таким образом мы нашли ∞^q решений однородного интегрального уравнения (62′).

8. Остается доказать полноту найденной системы решений, т. е. что всякое решение уравнения (62′) может быть представлено в виде (74). Пусть $u(x)$ есть какое-нибудь решение уравнения (62′), т. е.

$$u(x) = \lambda' \int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt.$$

Тогда для любой непрерывной функции $H(x, s)$ имеет место тождество

$$0 \equiv \int_a^b H(x, s)\left[u(s) - \lambda' \int_a^b K(s, t)\, u(t)\, dt\right] ds.$$

Путем вычитания этого равенства из первого найдем

$$u(x) = \lambda' \int_a^b N(x, t)\, u(t)\, dt, \qquad (75)$$

где положено

$$N(x, t) = K(x, t) - \left[\frac{1}{\lambda'} H(x, t) - \int_a^b H(x, s)\, K(s, t)\, ds\right].$$

Положим теперь в фундаментальном соотношении (69) $p = q + 1$, $x_{q+1} = x$, $s_{q+1} = s$. Вспомнив, что перемена местами двух x или s с разными индексами изменяет лишь знак D, мы найдем

$$D\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_q \\ s, s_1, \ldots, s_q \end{pmatrix}; \lambda = \lambda K(x, s)\, D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_q \\ s_1, \ldots, s_q \end{pmatrix}; \lambda -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{q} \lambda K(x_\alpha, s)\, D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x, x_{\alpha+1}, \ldots, x_q \\ s_1, \ldots, s_{\alpha-1}, s_\alpha, s_{\alpha+1}, \ldots, s_q \end{pmatrix}; \lambda +$$

$$+ \lambda \int_a^b K(T, s)\, D\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_q \\ T, s_1, \ldots, s_q \end{pmatrix}; \lambda\, dT.$$

Положим здесь

$$x_1 = x'_1, \ldots, x_q = x'_q, \; s_1 = s'_1, \ldots, s_q = s'_q, \; s = t, \; \lambda = \lambda'.$$

Разделим затем обе части этой формулы на $D\begin{pmatrix} x'_1, \ldots, x'_q \\ s'_1, \ldots, s'_q \end{pmatrix}; \lambda'$ и введем обозначение

$$H(x, s) = \frac{D\begin{pmatrix} x, & x_1', & \ldots, & x_q' \\ s, & s_1', & \ldots, & s_q' \end{pmatrix}; \lambda'}{D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots, & x_q' \\ s_1', & \ldots, & s_q' \end{pmatrix}; \lambda'}.$$

Тогда последнее соотношение примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{q} K(x_\alpha', t)\,\varphi_\alpha(x) = K(x, t) - \frac{1}{\lambda'} H(x, t) + \int_a^b K(T, t)\, H(x, T)\, dT. \quad (76)$$

Правая часть этого равенства есть $N(x, t)$, поэтому уравнение (75) мы можем переписать так:

$$u(x) = \lambda' \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x) \int_a^b K(x_\alpha', t)\, u(t)\, dt.$$

А это и показывает, что $u(x)$ может быть представлено в форме (74), если придать постоянным c_α значения

$$c_\alpha = \lambda' \int_a^b K(x_\alpha', t)\, u(t)\, dt.$$

Результаты исследования однородного интегрального уравнения (62′) могут быть формулированы в виде следующей теоремы:

Если $\lambda = \lambda'$ есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$ ранга q, то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

имеет q линейно независимых решений, и каждое другое решение этого уравнения выражается через них линейно и однородно. Эта система независимых решений определяется формулами

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots, & x_{\alpha-1}', & x, & x_{\alpha+1}', & \ldots, & x_q' \\ s_1', & \ldots, & s_{\alpha-1}', & s_\alpha', & s_{\alpha+1}', & \ldots, & s_q' \end{pmatrix}; \lambda'}{D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots, & x_q' \\ s_1', & \ldots, & s_q' \end{pmatrix}; \lambda'} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Это предложение носит название *второй теоремы Фредгольма.*

9. Непрерывная функция $\varphi(x)$, не равная тождественно нулю в интервале $[a, b]$, удовлетворяющая однородному интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

называется *фундаментальной функцией* ядра $K(x, s)$, принадлежащей

фундаментальному числу λ'. Функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x)$ образуют *полную* систему фундаментальных функций ядра $K(x, s)$, принадлежащих фундаментальному числу λ', если каждое другое решение выражается линейно через эти q решений. Следовательно, если $\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)$ являются решениями того же однородного интегрального уравнения, то должны иметь место следующие q равенств:

$$\psi_\alpha = \sum_{i=1}^{q} c_{\alpha i}\varphi_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Если определитель из чисел $c_{\alpha i}$ не равен нулю, то функции $\psi_1, \ldots, \psi_q$ в свою очередь образуют другую полную систему фундаментальных функций, принадлежащих тому же фундаментальному числу λ'.

10. Фундаментальные числа присоединенного интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)\, \psi(s)\, ds$$

будут те же, что и у основного уравнения, и будут иметь тот же ранг. В самом деле, ядро $\overline{K}(x, s) = K(s, x)$ присоединенного уравнения получается из первоначального ядра путем перестановки аргументов x и s. Замечая, что определитель Фредгольма $D(\lambda)$ и его миноры зависят только от ядра интегрального уравнения, мы заключаем: определитель Фредгольма $\overline{D}(\lambda)$ для присоединенного уравнения получается из определителя $D(\lambda)$ основного уравнения, если переставить между собою аргументы x и s, что сводится к замене строк столбцами во всех определителях, входящих в выражение $D(\lambda)$. Такая замена не изменяет результата, и поэтому $\overline{D}(\lambda) = D(\lambda)$. Аналогично можно показать, что

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_p \\ s_1, & \ldots, & s_p \end{pmatrix} = B_n\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix},$$

и, значит,

$$\overline{D}\begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_p \\ s_1, & \ldots, & s_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) = D\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_p \\ x_1, & \ldots, & x_p \end{pmatrix}; \lambda\Big),$$

т. е. миноры Фредгольма присоединенного уравнения получаются из миноров первоначального уравнения путем перестановки аргументов x и s.

Если λ' есть фундаментальное число ядра $K(x, s)$ ранга q, то

$$D(\lambda') = 0,$$

$$D\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_p \end{pmatrix}; \lambda'\Big) \equiv 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q-1),$$

тогда как

$$D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots, & x_q' \\ s_1', & \ldots, & s_q' \end{pmatrix}; \lambda'\Big) \neq 0$$

для некоторой системы значений $x_1', \ldots x_q', \ldots, s_1', \ldots, s_q'$.

Значит, для присоединенного уравнения имеем

$$\overline{D}(\lambda') = D(\lambda') = 0,$$

$$\overline{D}\left(\begin{matrix}x_1,\ldots,x_p\\ s_1,\ldots,s_p\end{matrix};\lambda'\right) = D\left(\begin{matrix}s_1,\ldots,s_p\\ x_1,\ldots,x_p\end{matrix};\lambda'\right)\equiv 0 \quad (p=1,\ 2,\ldots,\ q-1).$$

Полагая $s'_\alpha = \overline{x}'_\alpha$, $x'_\alpha = \overline{s}'_\alpha$, получим

$$\overline{D}\left(\begin{matrix}\overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\\ \overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\end{matrix};\lambda'\right) = D\left(\begin{matrix}\overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\\ \overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\end{matrix};\lambda'\right) = D\left(\begin{matrix}x'_1,\ldots,x'_q\\ s'_1,\ldots,s'_q\end{matrix};\lambda'\right)\neq 0.$$

Отсюда следует по определению, что λ', рассматриваемое как фундаментальное число ядра $K(s, x)$, имеет ранг $\overline{q}$, равный q. Что касается фундаментальных функций присоединенного уравнения, то на основании общей теоремы их будет q линейно независимых между собой, и всякая другая фундаментальная функция, принадлежащая тому же фундаментальному числу λ', выражается через них линейно и однородно. Далее эти фундаментальные функции определяются по формулам

$$\overline{\varphi}_\alpha(x) = \frac{\overline{D}\left(\begin{matrix}\overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_{\alpha-1},\ x,\ \overline{x}'_{\alpha+1},\ldots,\overline{x}'_q\\ \overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_{\alpha-1},\ \overline{s}'_\alpha,\ \overline{s}'_{\alpha+1},\ldots,\overline{s}'_q\end{matrix};\lambda'\right)}{\overline{D}\left(\begin{matrix}\overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\\ \overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\end{matrix};\lambda'\right)} =$$

$$= \frac{D\left(\begin{matrix}\overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_\alpha,\ldots,\overline{s}'_q\\ \overline{x}'_1,\ldots,x,\ldots,\overline{x}'_q\end{matrix};\lambda'\right)}{D\left(\begin{matrix}\overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\\ \overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\end{matrix};\lambda'\right)},$$

или

$$\overline{\varphi}_\alpha(x) = \frac{D\left(\begin{matrix}x'_1,\ldots,x'_{\alpha-1},\ x'_\alpha,\ x'_{\alpha+1},\ldots,x'_q\\ s'_1,\ldots,s'_{\alpha-1},\ x,\ s'_{\alpha+1},\ldots,s'_q\end{matrix};\lambda'\right)}{D\left(\begin{matrix}x'_1,\ldots,x'_q\\ s'_1,\ldots,s'_q\end{matrix};\lambda'\right)} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ldots,\ q).$$

11. В дальнейшем исследовании особого случая неоднородного интегрального уравнения нам придется воспользоваться функцией $H(x, s)$, введенной выше.

Покажем, что для присоединенного уравнения эта функция будет $H(s, x)$. Действительно,

$$\overline{H}(x, s) = \frac{\overline{D}\left(\begin{matrix}x,\ \overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\\ s,\ \overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\end{matrix};\lambda'\right)}{\overline{D}\left(\begin{matrix}\overline{x}'_1,\ldots,\overline{x}'_q\\ \overline{s}'_1,\ldots,\overline{s}'_q\end{matrix};\lambda'\right)} = \frac{D\left(\begin{matrix}s,\ x'_1,\ldots,x'_q\\ x,\ s'_1,\ldots,s'_q\end{matrix};\lambda'\right)}{D\left(\begin{matrix}x'_1,\ldots,x'_q\\ s'_1,\ldots,s'_q\end{matrix};\lambda'\right)},$$

т. е.

$$\overline{H}(x, s) = H(s, x).$$

Поэтому соотношение (76), примененное к ядру $\overline{K}(x, s)$, дает нам

$$\sum_{\alpha=1}^{q} K(t,\ s'_\alpha)\,\overline{\varphi}_\alpha(x) = K(t,\ x) - \frac{1}{\lambda'}H(t,\ x) + \int_a^b K(t, T)\ H(T,\ x)\,dT. \quad (77)$$

§ 12. Вывод из первой и второй теорем Фредгольма. 1. Согласно первой теореме Фредгольма мы знаем, что неоднородное уравнение имеет единственное решение, если значение параметра λ не является фундаментальным числом. Обратно, если неоднородное уравнение имеет единственное решение, то λ не может быть фундаментальным числом. В самом деле, когда λ есть фундаментальное число, то соответствующее однородное уравнение [получаемое из неоднородного при $f(x) = 0$] согласно второй теореме Фредгольма имеет ненулевое решение. Прибавляя это решение к решению неоднородного уравнения, мы получим новое решение последнего уравнения, что противоречит предположенной единственности его решения. Таким образом неоднородное уравнение имеет единственное решение в том и только в том случае, когда λ не есть фундаментальное число. Иными словами, чтобы убедиться в несуществовании или существовании единственного решения неоднородного уравнения, нужно узнать, будет ли λ фундаментальным числом или не будет, что приводит нас к необходимости вычисления функции Фредгольма $D(\lambda)$ для рассматриваемого значения параметра. Однако можно итти другим путем. Именно, если λ не есть фундаментальное число, то соответствующее однородное уравнение согласно первой теореме Фредгольма не имеет других решений, кроме нулевого; вследствие же второй теоремы, если однородное уравнение не имеет других решений, кроме нулевого, то λ не может быть фундаментальным числом. Значит, однородное уравнение не имеет других решений, кроме нулевого, тогда и только тогда, когда λ не есть фундаментальное число.

Сопоставляя это заключение с предыдущим, мы можем формулировать такое предложение.

Для того чтобы неоднородное уравнение Фредгольма (52) *имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему однородное уравнение* (62) *не имело других решений, кроме нулевого.*

Как известно, это решение неоднородного уравнения представляется формулой Фредгольма (35).

Это предложение удобно в том отношении, что избавляет нас от необходимости вычисления $D(\lambda)$, когда мы хотим убедиться в существовании единственного решения неоднородного уравнения. В приложениях теории интегральных уравнений этим замечанием постоянно приходится пользоваться.

§ 13. Ортогональность решений. 1. Мы знаем, что всякое фундаментальное число λ' данного интегрального уравнения (62) является также фундаментальным числом для присоединенного уравнения и обратно, так как функция $D(\lambda)$ для обоих уравнений одна и та же. Рассмотрим два различных фундаментальных числа λ', λ'' и соответствующие им решения однородного интегрального уравнения и его присоединенного уравнения. Обозначая эти функции через $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, будем иметь

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

$$\psi(x) = \lambda'' \int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds.$$

Умножая первое из этих равенств на $\lambda''\psi(x)$, второе — на $\lambda'\varphi(x)$, интегрируя по x в пределах от a до b и вычитая, находим

$$(\lambda'' - \lambda') \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx =$$

$$= \lambda'\lambda'' \int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,dx\,ds - \lambda'\lambda'' \int_a^b\int_a^b K(s, x)\varphi(x)\psi(s)\,dx ds.$$

Второй интеграл в правой части становится тождественным первому, если в нем переставим переменные интегрирования. Следовательно,

$$(\lambda'' - \lambda') \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0,$$

откуда при $\lambda'' \neq \lambda'$ следует

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Итак, мы доказали, что если два решения двух однородных интегральных уравнений, присоединенных друг к другу, соответствуют различным фундаментальным числам, то они ортогональны.

2. В частности, когда ядро $K(x, s)$ есть симметрическое, т. е. $K(x, s) \equiv K(s, x)$, то данное интегральное уравнение совпадает со своим присоединенным. Следовательно, всякие два решения однородного интегрального уравнения с симметрическим ядром, соответствующие различным фундаментальным числам, необходимо должны быть ортогональны.

§ 14. Третья теорема Фредгольма. 1. Обратимся к интегральному уравнению со второй частью (52). Первая теорема Фредгольма показывает, что это уравнение имеет единственное решение, когда λ не есть фундаментальное число, и дает формулы для этого решения. Предполагая теперь значение параметра λ равным фундаментальному числу λ', мы прежде всего заметим, что не только рассуждения, приведшие нас к первой теореме Фредгольма, становятся неприменимыми, но и самая формула (35) для решения теряет смысл в настоящем случае. Поэтому необходимо разобрать этот исключительный случай отдельно. Мы покажем, что уравнение

$$\varphi(x) - \lambda' \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{78}$$

вообще говоря, не имеет решений, если $f(x)$ есть произвольная непрерывная функция. Точнее говоря, мы обнаружим, что в случае существования решения уравнения (78) его правая часть должна удовлетворять некоторым условиям и поэтому не может быть любой непрерывной функцией.

Между прочим, заметим, что если имеется решение $\varphi(x)$ уравнения (78), то самое общее его решение получится, если прибавить к $\varphi(x)$ общее решение соответствующего однородного уравнения, так что, следовательно, решений будет бесконечное множество.

Чтобы изучить условия существования решения уравнения (78), мы введем в рассмотрение уравнение, присоединенное к однородному уравнению (62):

$$\psi(x) - \lambda' \int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds = 0. \tag{79}$$

Каждому решению $\psi(x)$ этого уравнения будет соответствовать условие возможности разрешения данного уравнения (78).

Действительно, предположим, что уравнение (78) имеет непрерывное решение $\varphi(x)$. Непрерывность решения $\varphi(x)$ мы можем, как известно (§ 2), предполагать, не уменьшая общности, так как иных решений не может быть в случае непрерывной функции $f(x)$. Умножая данное уравнение на $\psi(x)$ и интегрируя по x в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx - \lambda' \int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,ds dx,$$

или, переставляя переменные интегрирования в двойном интеграле,

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\Big[\psi(x) - \lambda' \int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds\Big]\,dx.$$

По определению функций $\psi(x)$ выражение в скобках есть нуль, и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Итак, необходимым условием существования решения неоднородного уравнения (78) в случае, когда λ равно фундаментальному числу, является ортогональность правой части $f(x)$ к любому решению однородного присоединенного уравнения (79).

Примечание. Мы знаем, что однородное уравнение (79) имеет бесконечное множество решений $\psi(x)$. Однако в § 11 было доказано, что у однородного интегрального уравнения при данном λ' всегда имеется лишь конечное число линейно независимых решений, т. е. всякое решение такого уравнения есть линейная однородная комбинация с произвольными постоянными коэфициентами конечного числа линейно независимых решений. Полученные условия ортогональности функции

$f(x)$ к любому решению $\psi(x)$ однородного уравнения (79), очевидно, равносильны с условиями ортогональности этой функции к каждому из конечного числа линейно независимых решений этого уравнения. Таким образом число условий, выведенных в настоящем параграфе, является конечным и равно числу линейно независимых решений уравнения (79) или, что то же, — рангу фундаментального числа λ'.

Доказанное предложение выражает первую часть так называемой третьей теоремы Фредгольма.

Условия, необходимые для того, чтобы интегральное уравнение (78) было разрешимо, суть

$$\int_a^b f(x)\,\psi_p(x)\,dx = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q),$$

где $\psi_p(x)$ суть фундаментальные функции однородного присоединенного уравнения (79).

2. Покажем теперь, обратно, что если $f(x)$ удовлетворяет q условиям

$$\int_a^b f(x)\,\psi_p(x)\,dx = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q),$$

то уравнение (78) действительно имеет непрерывное решение. В силу нашего предположения

$$\sum_{\alpha=1}^{q} K(x, s'_\alpha) \int_a^b f(t)\,\psi_\alpha(t)\,dt = 0$$

или

$$\int_a^b \Big[\sum_{\alpha=1}^{q} K(x, s'_\alpha)\,\psi_\alpha(t)\Big] f(t)\,dt = 0,$$

что вследствие соотношения (77) равносильно равенству

$$0 = \int_a^b K(x, t)\,f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda'}\int_a^b H(x, t)\,f(t)\,dt + \\ + \int_a^b f(t)\Big[\int_a^b K(x, T)\,H(T, t)\,dT\Big]dt. \qquad (80)$$

Последний член

$$\int_a^b\int_a^b f(t)\,K(x, T)\,H(T, t)\,dT\,dt$$

можно переписать в виде

$$\int_a^b\int_a^b f(T)\,K(x, t)\,H(t, T)\,dt\,dT$$

или

$$\int_a^b K(x, t)\Big[\int_a^b H(t, T)\,f(T)\,dT\Big]dt.$$

Внося это выражение в равенство (80) и соединяя первый член с последним, найдем

$$0 = \int_a^b K(x, t)\Big[f(t) + \int_a^b H(t, T)\,f(T)\,dT\Big]dt - \frac{1}{\lambda'}\int_a^b H(x, t)\,f(t)\,dt. \qquad (81)$$

Положим

$$\varphi_0(t) = f(t) + \int_a^b H(t, T)\,f(T)\,dT;$$

тогда

$$\int_a^b H(x, t)\,f(t)\,dt = \varphi_0(x) - f(x)$$

и равенство (81) преобразуется к виду

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda' \int_a^b K(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt,$$

т. е. мы доказали, что при выполнении вышеупомянутых условий уравнение (78) имеет непрерывное решение $\varphi_0(x)$, определяемое формулой

$$\varphi_0(x) = f(x) + \int_a^b H(x, t)\,f(t)\,dt. \qquad (82)$$

Если мы предположим, что уравнение (78) имеет еще какое-нибудь другое непрерывное решение $\varphi(x)$, то разность $\varphi(x) - \varphi_0(x)$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$\varphi(x) - \varphi_0(x) = \lambda' \int_a^b K(x, s)\,[\varphi(s) - \varphi_0(s)]\,ds$$

и, следовательно, общее решение последнего уравнения будет

$$\varphi(x) - \varphi_0(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ — фундаментальные функции ядра $K(x, s)$, принадлежащие фундаментальному числу λ'.

Таким образом полное решение неоднородного уравнения (78) представляется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b H(x, s)\,f(s)\,ds + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x).$$

Итак, мы полностью доказали третью теорему Фредгольма.

Если λ' есть фундаментальное число ядра $K(x, s)$, с рангом q, то уравнение

$$\varphi(x) - \lambda' \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),$$

вообще говоря, не имеет решения. Для того чтобы существовало решение, необходимо выполнение условий

$$\int_a^b f(x)\,\psi_p(x)\,dx = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, q),$$

где функции $\psi_p(x)$ представляют собой полную систему фундаментальных функций, принадлежащую фундаментальному числу λ' присоединенного интегрального уравнения. Если эти условия выполняются, то существует ∞^q решений, определяемых формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b H(x, s)\,f(s)\,ds + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_q\varphi_q(x),$$

где c_p — произвольные постоянные, $\varphi_p(x)$ — полная система фундаментальных функций ядра $K(x, s)$, принадлежащая фундаментальному числу λ', и $H(x, s)$ определяется по формуле

$$H(x, s) = \frac{D\begin{pmatrix} x, x_1', \ldots, x_q' \\ s, s_1', \ldots, s_q' \end{pmatrix}; \lambda'}{D\begin{pmatrix} x_1', \ldots, x_q' \\ s_1', \ldots, s_q' \end{pmatrix}; \lambda'}.$$

§ 15. Вид знаменателя резольвенты для уравнения Вольтерра.

1. Из теории уравнения Вольтерра (гл. I) мы знаем, что его резольвента есть целая функция параметра λ; следовательно, уравнение Вольтерра не имеет фундаментальных чисел, т. е. знаменатель резольвенты $D(\lambda)$ в этом случае не имеет нулей. Действительно, всякий нуль функции $D(\lambda)$, как было доказано, необходимо есть полюс резольвенты.

Можно непосредственным вычислением доказать, что функция $D(\lambda)$ в случае уравнения Вольтерра не имеет нулей. С этой целью рассмотрим коэфициент d_m при λ^m в разложении функции $D(\lambda)$, который имеет следующее выражение:

$$d_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m. \qquad (83)$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что в случае уравнения Вольтерра ядро $K(x, s)$ равно нулю при $s > x$. Из формулы (83) имеем

$$d_1 = -\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1,$$

$$d_2 = \frac{1}{2!} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$d_3 = -\frac{1}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

и т. д.

Определитель, стоящий под знаком интеграла в d_2, будет

$$K(\alpha_1, \alpha_1)\,K(\alpha_2, \alpha_2) - K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_1).$$

Первый член, образованный из диагональных элементов, после интеграции даст

$$\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1 \cdot \int_a^b K(\alpha_2, \alpha_2)\,d\alpha_2 = d_1^2.$$

Что касается второго члена этого определителя $K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_1)$, то он, очевидно, равен нулю при всех значениях α_1 и α_2, не удовлетворяющих условию $\alpha_1 = \alpha_2$, так как для таких значений переменных либо $\alpha_2 > \alpha_1$, либо $\alpha_1 > \alpha_2$ и в первом случае первый множитель $K(\alpha_1, \alpha_2)$ есть нуль, а во втором случае второй множитель $K(\alpha_2, \alpha_1)$ будет нулем. Иными словами, произведение $K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_1)$ равно нулю во всякой точке (α_1, α_2) квадрата $a \leqslant (\alpha_1, \alpha_2) \leqslant b$, не лежащей на диагонали $\alpha_1 = \alpha_2$. При интегрировании этого второго члена $K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_1)$ в результате мы получим нуль, так как в двумерной области интегрирования подинтегральная функция отлична от нуля только на линии. Аналогично, мысля определитель, стоящий под знаком интеграла в d_3, развернутым, мы увидим, что только главный его член, образованный из диагональных элементов, после интеграции даст результат, отличный от нуля и равный

$$\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1 \cdot \int_a^b K(\alpha_2, \alpha_2)\,d\alpha_2 \cdot \int_a^b K(\alpha_3, \alpha_3)\,d\alpha_3 = d_1^3.$$

Действительно, каждый из пяти остальных его членов будет отличным от нуля только либо на диагонали, либо на диагональной плоскости куба $a \leqslant (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leqslant b$; так, выражение $K(\alpha_2, \alpha_1)\,K(\alpha_1, \alpha_3)\,K(\alpha_3, \alpha_2)$ может быть отлично от нуля при условии $\alpha_2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_3 \leqslant \alpha_2$, т. е. на диагонали $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то же самое относится к выражению

$$K(\alpha_3, \alpha_1)\,K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_3);$$

остальные члены:

$$K(\alpha_1, \alpha_3)\,K(\alpha_3, \alpha_1)\,K(\alpha_2, \alpha_2),$$

$$K(\alpha_2, \alpha_3)\,K(\alpha_3, \alpha_2)\,K(\alpha_1, \alpha_1),\ K(\alpha_1, \alpha_2)\,K(\alpha_2, \alpha_1)\,K(\alpha_3, \alpha_3)$$

будут отличны от нуля соответственно на диагональных плоскостях

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

Следовательно, каждый из приведенных пяти членов этого определителя в результате интегрирования дает нуль, так как в трехмерной области интегрирования подинтегральная функция каждый раз будет отличной от нуля только в точках линии или плоскости.

Применяя это рассуждение к определителю, стоящему под знаком интеграла в d_m, мы убедимся, что для вычисления d_m нужно проинтегрировать лишь главный член определителя, и мы получим

$$d_m = \frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1 \cdot \int_a^b K(\alpha_2, \alpha_2)\,d\alpha_2 \ldots \int_a^b K(\alpha_m, \alpha_m)\,d\alpha_m = \frac{d_1^m}{m!}.$$

В самом деле, остальные члены определителя, стоящего под знаком интеграла в d_m, будут содержать циклы вида

$$K(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2})\,K(\alpha_{s_2}, \alpha_{s_3}) \ldots K(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_1}),$$

а потому каждый из этих членов может быть отличным от нуля только при условии $\alpha_{s_1} = \alpha_{s_2} = \ldots = \alpha_{s_k}$; иными словами, каждый член нашего определителя, кроме диагонального, равен нулю всюду в m-мерном кубе $a \leqslant (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \leqslant b$, кроме, быть может, точек $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, лежащих на гиперплоскости $\alpha_{s_1} = \alpha_{s_2} = \ldots = \alpha_{s_k}$. После интеграции каждого из этих членов мы получим нуль, так как подинтегральная функция каждый раз будет отличной от нуля лишь на множестве точек, m-мерный объем которого равен нулю.

Итак, в случае интегрального уравнения Вольтерра функция $D(\lambda)$ имеет следующее выражение:

$$D(\lambda) = 1 + d_1\lambda + \frac{d_1^2\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{d_1^m}{m!}\lambda^m + \ldots = e^{d_1\lambda},$$

где

$$d_1 = -\int_a^b K(x, x)\,dx.$$

Из этого выражения мы усматриваем, что $D(\lambda)$ не имеет нулей, т. е. уравнение Вольтерра не имеет фундаментальных чисел, а потому его резольвента есть целая функция параметра λ, что согласуется с результатом гл. I.

§ 16. Квази-регулярные интегральные уравнения. В предыдущем была изложена теория регулярных интегральных уравнений Фредгольма. Интегральное уравнение Фредгольма мы называли регулярным, если его ядро $K(x, s)$ имеет точки и линии разрыва в конечном числе, причем каждая линия разрыва пересекается с каждой из прямых, параллельных осям координат, в конечном числе точек. Сверх того, регулярность ядра предполагает, что оно ограничено по абсолютной величине в области квадрата $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Однако в приложениях интегральных уравнений часто приходится встречаться со случаями, когда ядро $K(x, s)$ будет неограниченной функцией. Вследствие этого представляется весьма важным исследовать те случаи, когда ядро интегрального уравнения неограничено. Как показал Фредгольм, его теория распространяется на класс интегральных уравнений с неограниченными ядрами при условии, что их итерации $K_n(x, s)$, начиная с некоторого n, становятся ограниченными функциями. В этом случае метод состоит в том, что данное интегральное уравнение заменяется эквивалентным ему уравнением с ограниченным ядром $K_n(x, s)$. Итак, считая ядро $K(x, s)$ неограниченной разрывной функцией с линиями разрыва того вида, о которых говорилось выше, предположим, что некоторая итерация этого ядра $K_n(x, s)$ будет ограниченной по абсолютной величине функцией в области квадрата $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Так как при повторных итерациях ядра $K(x, s)$ не может появляться новых разрывов, то, очевидно, $K_n(x, s)$ будет регулярной функцией. Следовательно, к интегральному уравнению с ядром $K_n(x, s)$ приложима вся теория Фредгольма как к уравнению с регулярным ядром.

Остается показать, каким образом данное интегральное уравнение заменить ему эквивалентным с ядром $K_n(x, s)$. Для этого, предполагая $\varphi(x)$ решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{84}$$

обратимся к формуле (8) гл. I и положим в ней $\varphi_0(x) = \varphi(x)$. Замечая, что $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv \ldots \equiv \varphi_n(x) \equiv \varphi(x)$, получим, заменив n на $n-1$,

$$\varphi(x) - \lambda^n\int_a^b K_n(x, s)\,\varphi(s)\,ds =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K(x, s)\,f(s)\,ds + \ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K_{n-1}(x, s)\,f(s)\,ds,$$

или

$$\varphi(x) - \lambda^n\int_a^b K_n(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f_n(x), \tag{85}$$

где $f_n(x)$ есть известная функция, определяемая по формуле

$$f_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x, s)\,f(s)\,ds + \ldots + \lambda^{n-1}\int_a^b K_{n-1}(x, s)\,f(s)\,ds. \tag{86}$$

Итак, мы показали, что всякое решение $\varphi(x)$ уравнения Фредгольма (84) удовлетворяет уравнению Фредгольма (85), в котором ядро будет $K_n(x, s)$, правая часть $f_n(x)$ и параметр λ^n. Обратно, пусть $\varphi(x)$ есть решение интегрального уравнения (85). Заменим в формулах (3) и (4) гл. I функцию φ_0 через φ, т. е. положим

$$\varphi_1(x) = \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x),$$

и вообще

$$\varphi_p(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_{p-1}(s)\, ds + f(x) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \quad (87)$$

Тогда согласно формуле (8) гл. I будет

$$\varphi_n(x) = \lambda^n \int_a^b K_n(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f_n(x),$$

т. е. $\varphi_n(x)$ будет равно $\varphi(x)$. Складывая почленно n первых равенств (87) и деля полученное равенство на n, мы найдем

$$\frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)}{n} =$$

$$= \lambda \int_a^b K(x, s)\, \frac{\varphi(s) + \varphi_1(s) + \ldots + \varphi_{n-1}(s)}{n}\, ds + f(x).$$

Замечая, что $\varphi_n(x) = \varphi(x)$, мы убеждаемся в следующем.

Функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_{n-1}(x)}{n}$$

есть решение исходного интегрального уравнения (84). В этом смысле мы говорим, что уравнения (84) и (85) эквивалентны. Сверх того, $\psi(x)$ совпадает с $\varphi(x)$, если уравнение (85) имеет единственное решение, т. е. если λ^n не есть фундаментальное число ядра $K_n(x, s)$.

В этом можно убедиться из следующих соображений. Так как $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ есть решение уравнения (85), то $\varphi_1(x) = \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x)$, удовлетворяя тому же уравнению, будут совпадать с $\varphi(x)$, и, следовательно, $\psi(x) = \varphi(x)$.

Итак, мы доказали, что если решение уравнения (85) единственно, то оно удовлетворяет исходному интегральному уравнению (84).

Часто в приложениях встречаются ядра, обращающиеся в бесконечность на некоторых линиях, однако такие, что можно определить значение n, при котором повторное ядро $K_n(x, s)$ становится ограниченным. Этот случай, таким образом, принадлежит к только что рассмотренному.

Интегральные уравнения рассмотренного вида назовем квази-регулярными.

§ 17. Ядро вида $\frac{H(x,s)}{|x-s|^\alpha}$. 1. Будем теперь предполагать, что ядро обращается в бесконечность только при $x = s$ и притом как $\frac{1}{|x-s|^\alpha}$; для того чтобы K было интегрируемой функцией в промежутке $a \leqslant s \leqslant b$, необходимо выполнение условия $0 < \alpha < 1$. Более точно, предположим, что $K(x, s)$ можно представить в следующем виде:

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x-s|^\alpha},$$

где $H(x, s)$ есть регулярная функция в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, и $0 < \alpha < 1$.

Имеем

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt.$$

Отсюда, предполагая $|H(x, s)| \leqslant M$, получаем

$$|K_2(x, s)| \leqslant M^2 \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha\, |t-s|^\alpha}.$$

Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то последний интеграл ограничен при всех значениях x и s, так как подинтегральная функция даже при $x = s$ будет бесконечно большой, порядка $2\alpha < 1$. Следовательно, уже $K_2(x, s)$ ограничено.

Если $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, то, выполняя подстановку

$$t = xT + s(1 - T),$$

преобразуем последний интеграл к виду

$$|x - s|^{1-2\alpha} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dT}{|T|^\alpha\, |1 - T|^\alpha},$$

где

$$a_1 = \frac{a - s}{x - s}; \quad b_1 = \frac{b - s}{x - s}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ последний интеграл выражается через элементарные функции и будет бесконечно большим, порядка $\ln|x - s|$.

Наконец, при $\alpha > \frac{1}{2}$ получим

$$|K_2(x, s)| < M^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT}{|T|^\alpha\, |1-T|^\alpha} \cdot |x - s|^{1-2\alpha} = M^2 P_2 |x - s|^{1-2\alpha},$$

где P_2 — положительное постоянное число.

Итак, первая итерация $K_2(x, s)$ ядра $K(x, s)$ будет ограниченной лишь при $\alpha < \frac{1}{2}$; при $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем $K_2(x, s) = g(x, s) \ln|x - s|$, где $g(x, s)$ ограничено, наконец, при $\alpha > \frac{1}{2}$ первая итерация $K_2(x, s)$ будет обращаться в бесконечность при $x = s$ как $\frac{1}{|x - s|^{2\alpha - 1}}$.

Считая $\alpha > \frac{1}{2}$, рассмотрим вторую итерацию $K_3(x, s)$:

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, dt.$$

Замечая, что

$$|K_2(x, t)| < M^2 P_2 |x - t|^{1-2\alpha},$$
$$|K(t, s)| \leqslant \frac{M}{|t-s|^\alpha},$$

получаем

$$|K_3(x, s)| < M^3 P_2 \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^{2\alpha-1}|t-s|^\alpha}.$$

Выполняя ту же подстановку $t = xT + s(1 - T)$, преобразуем это неравенство к виду

$$|K_3(x, s)| < M^3 P_2 |x - s|^{2-3\alpha} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dT}{|1-T|^{2\alpha-1}|T|^\alpha}.$$

Если $\alpha < \frac{2}{3}$, то $K_3(x, s)$ ограничено, как это следует из предпоследнего неравенства.

При $\alpha = \frac{2}{3}$ последний интеграл выражается через элементарные функции и будет бесконечно большим при $x = s$, порядка $\ln|x - s|$.

Наконец, при $\alpha > \frac{2}{3}$ последний интеграл меньше

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT}{|1-T|^{2\alpha-1}|T|^\alpha} = P_3,$$

где P_3 — положительное постоянное число, и, значит,

$$|K_3(x, s)| < \frac{M^3 P_2 P_3}{|x-s|^{3\alpha-2}},$$

т. е. $K_3(x, s)$ обращается в бесконечность при $x = s$ как $\frac{1}{|x-s|^{3\alpha-2}}$.

Аналогичными рассуждениями, отправляясь от формулы

$$K_n(x, s) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, s)\, dt,$$

найдем, что $|K_n(x, s)|$ всюду в основной области остается ограниченным, если только $\alpha < \frac{n-1}{n}$; при $\alpha = \frac{n-1}{n}$ функция $K_n(x, s)$ будет вида $g(x, s) \ln|x - s|$, где $|g(x, s)|$ ограничено; наконец, при $\alpha > \frac{n-1}{n}$ имеем неравенство

$$|K_n(x, s)| < \frac{M^n P_2 P_3 \ldots P_n}{|x-s|^{n\alpha-(n-1)}},$$

в котором величины $P_k(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT}{|1-T|^{(k-1)\alpha-(k-2)}|T|^\alpha}$ обозначают постоянные положительные числа.

Все итерированные ядра могут иметь прерывности только на диагонали $x = s$ основного квадрата. Из предыдущего вытекает, что, выбирая при данном α целое число n бо́льшим чем $\frac{1}{1-\alpha}$, мы получим ограниченную функцию $K_n(x, s)$, которая, следовательно, будет регулярной в области основного квадрата. В частности, если $\alpha < \frac{1}{2}$, то достаточно взять $n = 2$.

Остается показать, что если данное ядро имеет вид

$$K(x, s) = H(x, s) \ln \frac{1}{|x-s|},$$

где $H(x, s)$ есть регулярная функция в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, то уже первая итерация $K_2(x, s)$ будет регулярной в той же области. Это немедленно вытекает из того, что логарифм растет медленнее, чем любая положительная степень, т. е.

$$\lim_{z \to 0} \left[\ln \frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha\right] = 0 \quad \text{для} \quad \alpha > 0.$$

2. В случае $\alpha < \frac{1}{2}$ Гильберт указал весьма остроумный метод непосредственного решения интегрального уравнения, изменяя метод Фредгольма, изложенный выше для ограниченного ядра. Вопрос сводится к тому, чтобы устранить трудность, возникающую от того, что главные диагональные члены определителей $K\begin{pmatrix} x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix}$, кроме первого, становятся бесконечными, будучи равными

$$K(\alpha_1, \alpha_1), K(\alpha_2, \alpha_2), \ldots, K(\alpha_n, \alpha_n).$$

С этой целью заменим данное ядро $K(x, s)$ функцией $K_0(x, s)$, равной всюду $K(x, s)$, за исключением диагонали $x = s$, на которой положим $K_0(x, x) = 0$. Очевидно, что новое интегральное уравнение с ядром $K_0(x, s)$ будет полностью эквивалентно данному уравнению, так как интеграл не изменяет своей величины, если изменим значение подинтегральной функции в одной точке. Остается показать, что хотя $K_0(x, s)$ не ограничена, ряды Фредгольма $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$ будут сходиться при всяком значении параметра λ. Действительно, рассмотрим, например, определитель

$$K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Предполагая сначала $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, умножим первую строку этого определителя на $(\alpha_1 - \alpha_2)^\alpha$, вторую — на $[(\alpha_1 - \alpha_2)^{-\alpha} + (\alpha_2 - \alpha_3)^{-\alpha}]^{-1}$, третью — на $[(\alpha_2 - \alpha_3)^{-\alpha} + (\alpha_3 - \alpha_4)^{-\alpha}]^{-1}$, и т. д. до $(n-1)$-й, и, наконец, последнюю — на $(\alpha_{n-1} - \alpha_n)^\alpha$. Элементы полученного определителя будут все по абсолютной величине меньше постоянного числа P. Пользуясь неравенством Адамара, найдем

$$\left| K\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix} \right| < (\alpha_1 - \alpha_2)^{-\alpha} [(\alpha_1 - \alpha_2)^{-\alpha} + (\alpha_2 - \alpha_3)^{-\alpha}] \ldots$$
$$\ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^{-\alpha} \sqrt{n^n} P^n.$$

Последнее неравенство имеет место в области D, определенной неравенствами $b > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > a$.

Интегралы от $\left| K \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix} \right|$ в каждой из $n!$ областей, аналогичных области D и полученных из D перестановкой переменных α_i, равны между собой. Таким образом общий член $d_n \lambda^n$ ряда, изображающего $D(\lambda)$, будет не больше по абсолютной величине, чем

$$|\lambda|^n \sqrt{n^n} P^n \int\int_D \ldots \int (\alpha_1 - \alpha_2)^{-\alpha} [(\alpha_1 - \alpha_2)^{-\alpha} + (\alpha_2 - \alpha_3)^{-\alpha}] \ldots$$

$$\ldots [(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})^{-\alpha} + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^{-\alpha}] (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^{-\alpha} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Выполняя подстановку $\alpha_i = a + (b - a) \alpha_i'$, приведем это выражение к виду

$$|\lambda|^n \sqrt{n^n P^n} (b - a)^{(1-\alpha)n} \cdot I_n,$$

где I_n изображает интеграл того же вида, что и выше, но распространенный на область

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > 0.$$

Путем вычисления мы сейчас покажем, что

$$I_n < \frac{A^n}{n^{n(1-\alpha)}}, \tag{88}$$

где A — постоянное число. Отсюда для общего члена $d_n \lambda^n$ ряда Фредгольма $D(\lambda)$ будем иметь

$$\sqrt[n]{|d_n \lambda^n|} < |\lambda| P (b - a)^{1-\alpha} A \frac{1}{n^{\frac{1}{2} - \alpha}}.$$

Так как $\alpha < \frac{1}{2}$, то $\sqrt[n]{|d_n \lambda^n|}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n; следовательно, ряд $D(\lambda)$ абсолютно сходится для всех λ.

3. Остается показать справедливость неравенства (88). Для этого в интеграле I_n введем новые переменные

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1, \quad \alpha_2 - \alpha_3 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} - \alpha_n = \beta_{n-1}, \quad \alpha_n = \beta_n$$

и выполним умножение под знаком интеграла; тогда мы увидим, что I_n есть сумма 2^{n-2} кратных интегралов следующей формы:

$$\int\int \ldots \int \beta_1^{\sigma_1} \beta_2^{\sigma_2} \ldots \beta_n^{\sigma_n} d\beta_1 \ldots d\beta_n, \tag{89}$$

распространенных на область

$$\beta_1 > 0, \ \beta_2 > 0, \ldots, \beta_n > 0, \ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 1,$$

причем показатели $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ могут получать значения $0, -\alpha, -2\alpha$, а их сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ постоянно равна $-n\alpha$.

Выполняя в интеграле (89) интегрирование относительно β_1, получим

$$\frac{1}{\sigma_1 + 1} \int\int \ldots \int (1 - \beta_2 - \beta_3 - \ldots - \beta_n)^{\sigma_1 + 1} \beta_2^{\sigma_2} \ldots \beta_n^{\sigma_n} d\beta_2 d\beta_3 \ldots d\beta_n.$$

Интегрируя относительно β_2 в пределах от 0 до $1 - (\beta_3 + \ldots + \beta_n)$, получим

$$\frac{\int_0^1 \beta_2^{\sigma_2} (1 - \beta_2)^{\sigma_1 + 1} d\beta_2}{\sigma_1 + 1} \times$$

$$\times \int\int \ldots \int (1 - \beta_3 - \beta_4 - \ldots - \beta_n)^{\sigma_1 + \sigma_2 + 2} \beta_3^{\sigma_3} \ldots \beta_n^{\sigma_n} d\beta_3 \ldots d\beta_n.$$

Выполняя, далее, интегрирование относительно β_3 в пределах от 0 до $1 - (\beta_4 + \ldots + \beta_n)$, получим

$$\frac{\int_0^1 \beta_2^{\sigma_2} (1 - \beta_2)^{\sigma_1 + 1} d\beta_2 \int_0^1 \beta_3^{\sigma_3} (1 - \beta_3)^{\sigma_1 + \sigma_2 + 2} d\beta_3}{\sigma_1 + 1} \times$$

$$\times \int\int \ldots \int (1 - \beta_4 - \ldots - \beta_n)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3} \beta_4^{\sigma_4} \ldots \beta_n^{\sigma_n} d\beta_4 \ldots d\beta_n.$$

Продолжая последовательно интегрировать относительно $\beta_4, \beta_5, \ldots, \beta_{n-1}$, получим в результате

$$\frac{1}{\sigma_1 + 1} \int_0^1 \beta_2^{\sigma_2} (1 - \beta_2)^{\sigma_1 + 1} d\beta_2 \int_0^1 \beta_3^{\sigma_3} (1 - \beta_3)^{\sigma_1 + \sigma_2 + 2} d\beta_3 \int_0^1 \beta_4^{\sigma_4} (1 - \beta_4)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3} d\beta_4 \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 \beta_{n-1}^{\sigma_{n-1}} (1 - \beta_{n-1})^{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-2} + n - 2} d\beta_{n-1} \int_0^1 (1 - \beta_n)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} + n - 1} \beta_n^{\sigma_n} d\beta_n.$$

Полученные интегралы все принадлежат к типу эйлеровых интегралов I рода

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$$

и могут быть выражены через функцию Γ на основании формулы

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Таким образом интеграл (89) представляется в виде

$$\frac{1}{\sigma_1 + 1} \cdot \frac{\Gamma(\sigma_2 + 1) \Gamma(\sigma_1 + 2)}{\Gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + 3)} \cdot \frac{\Gamma(\sigma_3 + 1) \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + 3)}{\Gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 4)} \ldots$$

$$\ldots \frac{\Gamma(\sigma_n + 1) \Gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} + n)}{\Gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + n + 1)}.$$

Последнее выражение после сокращений примет вид

$$\frac{\Gamma(\sigma_1 + 1) \Gamma(\sigma_2 + 1) \Gamma(\sigma_3 + 1) \ldots \Gamma(\sigma_n + 1)}{\Gamma(n + 1 - n\alpha)},$$

ибо $\Gamma(\sigma_1 + 2) = (\sigma_1 + 1) \Gamma(\sigma_1 + 1)$ и $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = -n\alpha$. Так как $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ могут принимать лишь значения $0, -\alpha, -2\alpha$, то, обозначая через C наибольшее из трех чисел $\Gamma(1)$, $\Gamma(1-\alpha)$, $\Gamma(1-2\alpha)$, видим, что интеграл (89) будет меньше, чем $\frac{C^n}{\Gamma(n+1-n\alpha)}$.

Отсюда I_n, как сумма 2^{n-2} интегралов вида (89), будет меньше

$$\frac{(2C)^n}{\Gamma(n+1-n\alpha)} = \frac{C_1^n}{\Gamma(n+1-n\alpha)}.$$

Заметив, наконец, что $\Gamma(p+1) > \left(\frac{p}{e}\right)^p$, получим $I_n < \frac{A^n}{n^{n(1-\alpha)}}$, т. е. требуемое неравенство (88).

§ 18. Ядро вида $\frac{H(M, P)}{MP^\alpha}$. Результаты, полученные в предыдущем параграфе для ядра вида $\frac{H(x, s)}{|x-s|^\alpha}$, мы можем распространить на ядро того же вида с k парами переменных; это обобщение часто используется в приложениях, когда приходится определять неизвестную функцию многих переменных из интегрального уравнения. Итак, рассмотрим ядро

$$K(x_1, x_2, \ldots, x_k, s_1, s_2, \ldots, s_k) = \frac{H(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)}{r^\alpha},$$

где $|H(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)| \leqslant M$ во всей основной области $a \leqslant (x_i, s_i) \leqslant b$, $r = \sqrt{(x_1-s_1)^2 + (x_2-s_2)^2 + \ldots + (x_k-s_k)^2}$ и $0 < \alpha < k$. Итерированное ядро будет определяться в основной области $2k$-мерного куба по формуле

$$K_2(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k) =$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \frac{H(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1, t_2, \ldots, t_k)\, H(t_1, t_2, \ldots, t_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)}{\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-t_i)^2}\, \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i-s_i)^2}\right)^\alpha} dt_1\, dt_2 \ldots dt_k,$$

откуда получаем верное во всей основной области неравенство

$$|K_2(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)| \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \int_a^b \cdots \int_a^b \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_k}{\left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-t_i)^2}\, \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i-s_i)^2}\right)^\alpha}.$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что среднее арифметическое никогда не может быть меньше среднего геометрического, так что

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2 \geqslant \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}.$$

Тогда предыдущее неравенство можно будет представить таким образом:

$$|K_2(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)| \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \int_a^b \cdots \int_a^b \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_k}{\sqrt{k^\alpha} \prod\limits_{i=1}^{k} |x_i-t_i|^{\frac{\alpha}{k}} \sqrt{k^\alpha} \prod\limits_{i=1}^{k} |t_i-s_i|^{\frac{\alpha}{k}}} =$$

$$= \frac{M^2}{k^\alpha} \prod_{i=1}^{k} \int_a^b \frac{dt_i}{|x_i-t_i|^{\frac{\alpha}{k}} |t_i-s_i|^{\frac{\alpha}{k}}}.$$

Отсюда, так же как в § 17, следует, что $|K_2(x_1, \ldots, x_k; s_1, \ldots, s_k)|$ ограничено, если $2\frac{\alpha}{k} - 1 < 0$; в случае же $2\frac{\alpha}{k} - 1 > 0$ будет

$$|K_2(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)| \leqslant \frac{M^2}{k^\alpha}\left[P_2\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right]^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{|x_i-s_i|^{2\frac{\alpha}{k}-1}},$$

и вообще для $n\frac{\alpha}{k} - (n-1) < 0$ $|K_n(x_1, \ldots, s_k)|$ будет ограничено, а при $n\frac{\alpha}{k} - (n-1) > 0$ будет выполняться неравенство

$$|K_n(x_1, x_2, \ldots, x_k; s_1, s_2, \ldots, s_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^n}{k^{\frac{n\alpha}{2}}}\left[P_n\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right]^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{|x_i-s_i|^{n\frac{\alpha}{k}-(n-1)}},$$

где $n = 2, 3, \ldots$

Таким образом, если мы при данном α выберем целое число n так, чтобы выполнялось неравенство $n\frac{\alpha}{k} - (n-1) < 0$, т. е. $n > \frac{1}{1-\frac{\alpha}{k}}$, то $|K_n(x_1, \ldots, x_k; s_1, \ldots, s_k)|$ будет ограниченным во всей основной области.

§ 19. Особые интегральные уравнения. 1. *Особым интегральным уравнением* мы называем всякое уравнение, которое не является регулярным или квази-регулярным. Общие предложения могут быть установлены для таких уравнений лишь если мы наложим дополнительные ограничения на природу ядра в основной области. Общая теория Гильберта квадратичных форм с бесконечным числом переменных дала возможность получить ряд важных результатов относительно таких уравнений. Затем было исследовано специальными методами некоторое число ядер частного вида, которые встречаются в приложениях. Заметим, что для особых интегральных уравнений, вообще говоря, не имеют места те результаты, которые мы установили в общей теории регулярных и квази-регулярных интегральных уравнений. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим некоторые примеры особых интегральных уравнений, на которых мы проиллюстрируем характерные особенности таких уравнений.

2. Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty e^{-xs} \varphi(s)\, ds = 0. \tag{90}$$

Заметим, что при $x > 0$ и любом $a < 1$ будет

$$\int_0^\infty e^{-xs} s^{-a} ds = \int_0^\infty e^{-\eta} \left(\frac{\eta}{x}\right)^{-a} \frac{d\eta}{x} = \Gamma(1-a)\, x^{a-1}, \tag{91}$$

откуда, заменив a на $1-a$, получим также

$$\int_0^\infty e^{-xs} s^{a-1} ds = \Gamma(a)\, x^{-a}, \quad \text{где } 1-a < 1, \text{ т. е. } a > 0. \tag{91'}$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\Gamma(a)}\, x^{-a} + \sqrt{\Gamma(1-a)}\, x^{a-1} &= \varphi_a^+(x), \\ \sqrt{\Gamma(a)}\, x^{-a} - \sqrt{\Gamma(1-a)}\, x^{a-1} &= \varphi_a^-(x), \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

считая $0 < a < 1$; тогда из равенств (91) и (91′) следует

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xs} \varphi_a^+(s)\, ds &= \sqrt{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}\, \varphi_a^+(x), \\ \int_0^\infty e^{-xs} \varphi_a^-(s)\, ds &= -\sqrt{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}\, \varphi_a^-(x). \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Так как $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$, то последние равенства (93) показывают, что $\varphi_a^+(x)$ и $\varphi_a^-(x)$ являются решениями данного однородного интегрального уравнения (90) с фундаментальными числами

$$\lambda_a = \pm \sqrt{\frac{\sin \pi a}{\pi}}.$$

Таким образом фундаментальные числа заполняют конечный интервал

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} < \lambda < +\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

за исключением значения $\lambda = 0$. Вопрос о том, будут ли существовать иные фундаментальные числа, остается открытым. Принципиальная особенность этого интегрального уравнения состоит в том, что оно имеет континуальное множество фундаментальных чисел, в то время как регулярные интегральные уравнения могут иметь лишь счетное множество таких чисел.

3. В качестве второго примера рассмотрим интегральное уравнение с ядром Фурье, которое имеет только два фундаментальных числа с противоположными знаками. Как известно, согласно интегральной теореме Фурье произвольная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию Дирихле в каждом конечном промежутке и абсолютно интегрируемая в интервале $(-\infty, +\infty)$, может быть представлена в виде определенного интеграла с бесконечными пределами. В частности, для четной функции $\varphi(x)$ эта формула Фурье будет

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xs \left[\int_0^\infty \cos st\, \varphi(t)\, dt\right] ds.$$

Пусть дано интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty \cos xs\, \varphi(s)\, ds.$$

Подставляя $\varphi(x)$, определяемое этим уравнением, под знак интеграла, получим

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_0^\infty \cos xs \left[\int_0^\infty \cos st\, \varphi(t)\, dt\right] ds.$$

Сравнивая последнее уравнение с вышенаписанной формулой Фурье, мы усматриваем, что $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Этим рассуждением показано, что если вообще существуют фундаментальные числа для ядра $\cos xs$, то они могут иметь только значения $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. То обстоятельство, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ действительно есть фундаментальное число ядра $\cos xs$, вытекает из формулы

$$\int_0^\infty \cos xs\, e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Эту формулу можно доказать следующим образом. Полагая

$$\int_0^\infty \cos xs\, e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = I(x)$$

и диференцируя по x, получим

$$-\int_0^\infty \sin xs\, s e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = I'(x).$$

Интеграцией по частям найдем

$$I'(x) = \int_0^\infty \sin xs\, d\left(e^{-\frac{1}{2}s^2}\right) = \left[e^{-\frac{1}{2}s^2} \sin xs\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2} \cos xs\, x\, ds,$$

т. е. $I'(x) = -xI(x)$, откуда $I(x) = I_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$. Полагая $x=0$, получим

$$I_0 = I(0) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно,

$$I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4. Если мы напишем интегральную теорему Фурье для нечетной функции $\varphi(x)$, то рассуждениями, аналогичными вышеприведенным, убедимся в том, что фундаментальными числами для ядра $\sin xs$ могут быть только числа $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Покажем теперь, что эти значения действительно являются фундаментальными числами для ядра $\sin xs$ и что каждому из них соответствует континуальное множество решений однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty \sin xs\,\varphi(s)\,ds.$$

Для этого воспользуемся легко проверяемыми интегральными формулами

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \sin xs\,e^{-as}ds = \frac{x}{a^2+x^2},\\ &\int_0^\infty \frac{\sin xs}{a^2+s^2}\,s\,ds = \frac{\pi}{2}\,e^{-ax}, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

где $a>0$, $x>0$. Первая из этих формул получается интегрированием по частям. В самом деле,

$$\int_0^\infty \sin xs\,e^{-as}ds = -\frac{1}{a}\int_0^\infty \sin xs\,d\left(e^{-as}\right) = \frac{x}{a}\int_0^\infty e^{-as}\cos xs\,ds =$$

$$= -\frac{x}{a^2}\int_0^\infty \cos xs\,d\left(e^{-as}\right) = \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-as}\sin xs\,ds,$$

откуда

$$\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^\infty e^{-as}\sin xs\,ds = \frac{x}{a^2},$$

и, значит,

$$\int_0^\infty \sin xs\,e^{-as}\,ds = \frac{x}{a^2+x^2}.$$

Переходя к выводу второй формулы (94), перепишем первую формулу в виде $\frac{s}{a^2+s^2} = \int_0^\infty \sin st\,e^{-at}\,dt$, умножим обе части на $\sin xs\,ds$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ∞; тогда получим

$$\int_0^\infty \frac{\sin xs}{a^2+s^2}\,s\,ds = \int_0^\infty \sin xs\left[\int_0^\infty \sin st\,e^{-at}dt\right]ds.$$

Применяя к правой части интегральную формулу Фурье для нечетной функции

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xs\left[\int_0^\infty \sin st\,\varphi(t)\,dt\right]ds,$$

видим, полагая $\varphi(x) = e^{-ax}$, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin xs}{a^2+s^2}\,s\,ds = \frac{\pi}{2}\,e^{-ax}.$$

Теперь, складывая и вычитая формулы (94), предварительно умножив первую на $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, найдем

$$\int_0^\infty \sin xs\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-as} \pm \frac{s}{a^2+s^2}\right]ds =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2+x^2}\right].$$

Сравнивая это равенство с интегральным уравнением

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty \sin xs\,\varphi(s)\,ds,$$

мы усматриваем, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ есть его фундаментальное число с решениями $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax} + \frac{x}{a^2+x^2}$, а $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ — другое фундаментальное число с соответствующими решениями

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax} - \frac{x}{a^2+x^2}.$$

Так как $a>0$ вполне произвольно, то каждому из двух фундаментальных чисел соответствует континуальное множество линейно независимых решений однородного интегрального уравнения.

Принципиальное отличие этого интегрального уравнения от однородных регулярных уравнений состоит в том, что последние имеют лишь конечное число линейно независимых решений для каждого фундаментального числа.

§ 20. Особое интегральное уравнение с ядром вида $H(|x-s|)$.

1. Особое интегральное уравнение с ядром $e^{-|x-s|}$ и основной областью от $-\infty$ до $+\infty$ было изучено Пикаром. Отправляясь от тождества

$$y''(s)z(s)-y(s)z''(s)\equiv\frac{d}{ds}[y'(s)z(s)-y(s)z'(s)], \tag{95}$$

заменим в нем $y(s)$ решением диференциального уравнения

$$y''(s)-(1-2\lambda)y(s)=g(s), \tag{96}$$

считая это решение вместе с его первой производной ограниченными функциями; $g(s)$ есть данная ограниченная функция. Таким образом $y''(s)$ будет также ограниченной функцией. Что касается $z(s)$, то ее заменим решением диференциального уравнения

$$z''(s)-\mu z(s)=0, \tag{97}$$

где $\mu>0$, т. е. положим

$$z(s)=e^{\varepsilon\sqrt{\mu}(s-x)}, \tag{98}$$

где ε равно $+1$ или -1 и x — произвольное постоянное интеграции. Принимая во внимание уравнения (96), (97) и (98), проинтегрируем тождество (95) по s в пределах от $-\infty$ до x, беря $\varepsilon=+1$, и от $s=x$ до $+\infty$, беря $\varepsilon=-1$. Складывая оба проинтегрированные уравнения, получим

$$[(1-2\lambda)-\mu]\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{\mu}|x-s|}y(s)\,ds+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{\mu}|x-s|}g(s)\,ds=-2\sqrt{\mu}\,y(x). \tag{99}$$

Каждое решение $y(x)$ диференциального уравнения (96), удовлетворяющее предположениям ограниченности, о которых говорилось выше, есть также решение интегрального уравнения (99); при этом безразлично, какое значение мы приписываем положительному постоянному μ. Обратное заключение также справедливо, что мы могли бы доказать, выполняя диференцирование под знаком интеграла.

Пусть, например, $\mu=1$; тогда получаем из (99) равносильное диференциальному уравнению (96) интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}y(s)\,ds=f(x), \tag{100}$$

где положено

$$f(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}g(s)\,ds. \tag{101}$$

Если же в уравнении (99) мы положим $\mu=1-2\lambda$ $\left(\text{так как } \mu>0,\right.$ то при этом мы должны предполагать, что $\left.\lambda<\frac{1}{2}\right)$, то получаемое уравнение

$$y(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-2\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-s|}g(s)\,ds \tag{102}$$

снова будет равносильно диференциальному уравнению (96). Таким образом каждое решение уравнения (100) должно удовлетворять уравнению (102) и обратно. Но уравнение (102) уже разрешено относительно $y(x)$. Формула (102) дает единственное решение интегрального уравнения (100), в котором правая часть определяется формулой (101), так как функция $y(x)$, изображенная формулой (102), вследствие ограниченности $g(s)$ будет ограничена вместе со своей первой производной. При всем этом, конечно, предполагается, что правая часть данного уравнения (100) может быть представлена в виде формулы (101).

2. Уравнение (100) вместе с тем представляет пример особого интегрального уравнения, где значения λ, для которых неоднородное уравнение неразрешимо, зависят не только от ядра, как это имеет место всегда у регулярных уравнений, но также еще от правой части уравнения. В самом деле, полагая $g(s)=-\cos\alpha s$, где α — произвольное действительное число, будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}\cos\alpha s\,ds=\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}.$$

Последняя формула легко устанавливается методом интеграции по частям. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}\cos\alpha s\,ds=\int_{-\infty}^{x}e^{s-x}\cos\alpha s\,ds+\int_{x}^{\infty}e^{x-s}\cos\alpha s\,ds=2\cos\alpha x+\alpha\int_{-\infty}^{x}e^{s-x}\sin\alpha s\,ds-\alpha\int_{x}^{\infty}e^{x-s}\sin\alpha s\,ds.$$

Применяя еще раз интегрирование по частям, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}\cos\alpha s\,ds=2\cos\alpha x-\alpha^2\int_{-\infty}^{x}e^{s-x}\cos\alpha s\,ds-\alpha^2\int_{x}^{\infty}e^{x-s}\cos\alpha s\,ds=2\cos\alpha x-\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-s|}\cos\alpha s\,ds,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}\cos\alpha s\,ds=\frac{2\cos\alpha x}{1+\alpha^2},$$

и, значит,

$$f(x)=\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}.$$

Подставляя теперь $g(s) = -\cos \alpha s$ в формулу (102), получим при $\lambda < \frac{1}{2}$

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-s|} \cos \alpha s\, ds = \frac{\cos \alpha x}{1-2\lambda+\alpha^2}. \tag{103}$$

Формула (103) устанавливается аналогично предыдущему методом интеграции по частям. В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-s|} \cos \alpha s\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(s-x)} \cos \alpha s\, ds + \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(x-s)} \cos \alpha s\, ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{x} \cos \alpha s\, d\left(e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(s-x)}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{x}^{\infty} \cos \alpha s\, d\left(e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(x-s)}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-2\lambda}} \cos \alpha x + \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(s-x)} \sin \alpha s\, ds -$$

$$- \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(x-s)} \sin \alpha s\, ds.$$

Применяя еще раз интегрирование по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-s|} \cos \alpha s\, ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-2\lambda}} \cos \alpha x - \frac{\alpha^2}{1-2\lambda} \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(s-x)} \cos \alpha s\, ds -$$

$$- \frac{\alpha^2}{1-2\lambda} \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{1-2\lambda}\,(x-s)} \cos \alpha s\, ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-2\lambda}} \cos \alpha x - \frac{\alpha^2}{1-2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-s|} \cos \alpha s\, ds,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,|x-s|} \cos \alpha s\, ds = \frac{2\sqrt{1-2\lambda}}{1-2\lambda+\alpha^2} \cos \alpha x,$$

и, значит,

$$y(x) = \frac{\cos \alpha x}{1-2\lambda+\alpha^2}.$$

Формула (103) дает решение интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\, y(s)\, ds = \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} \tag{104}$$

не только для $\lambda < \frac{1}{2}$, но и для $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$, $\lambda \neq \frac{1+\alpha^2}{2}$, как в этом можно убедиться путем подстановки ее в уравнение (104) или, лучше, в диференциальное уравнение (96), которое при $g(s) = -\cos \alpha s$ равносильно с уравнением (104).

Итак, неоднородное интегральное уравнение (104) неразрешимо при $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$, так как для такого значения λ формула (103) лишена смысла. Это исключительное значение параметра λ зависит от правой части интегрального уравнения (104), потому что постоянное α входит только в правую часть. Выбирая α, мы можем этому исключительному значению параметра λ, $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$ придать любое значение $\geqslant \frac{1}{2}$. Кроме этого, можно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\, y(s)\, ds = 0 \tag{105}$$

при каждом значении $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ разрешимо, и, следовательно, всякое такое значение параметра λ есть фундаментальное число уравнения (105). В самом деле, уравнению (105) по предыдущему удовлетворяет каждое ограниченное вместе со своей первой производной решение диференциального уравнения $y'' - (1-2\lambda)y = 0$. Таким образом $\cos(\sqrt{2\lambda-1}\,x)$ и $\sin(\sqrt{2\lambda-1}\,x)$ будут решениями интегрального уравнения (105) при $\lambda > \frac{1}{2}$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ интегральное уравнение (105) имеет в качестве решения, например, единицу, так как ограниченное решение диференциального уравнения $y'' = 0$ будет $y = \text{const}$. Итак, все значения $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ будут фундаментальными числами интегрального уравнения (105); мы имеем, следовательно, пример особого интегрального уравнения, у которого фундаментальные числа заполняют отрезок бесконечной длины. Суммируя полученные выводы, мы видим, что для $\lambda < \frac{1}{2}$ неоднородное уравнение (100) имеет единственное ограниченное вместе со своей первой производной решение, определяемое формулой (102); для $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ при специальном подборе правой части это уравнение может быть неразрешимо; если же уравнение (100) имеет при $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ ограниченное решение, то оно тем самым будет иметь бесчисленное множество таких решений, так как при $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ существуют ограниченные решения однородного уравнения (105), любая линейная комбинация которых может быть прибавлена к решению неоднородного уравнения; получаемое таким образом выражение остается решением неоднородного уравнения.

3. Рассмотренное интегральное уравнение (105) принадлежит к классу уравнений вида

$$y(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} H(|x-s|)\, y(s)\, ds = 0, \tag{106}$$

в которых ядро есть четная функция аргумента $x - s$; для уравнения (106) возможно немедленно указать фундаментальные числа и соответствующие им решения этого уравнения. В самом деле, посредством подстановки убедимся, что уравнению (106) удовлетворяют функции $e^{\alpha x}$ и $e^{-\alpha x}$, если примем

$$\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = \frac{1}{\int\limits_0^{\infty} H(\rho)(e^{\alpha\rho} + e^{-\alpha\rho})\, d\rho}. \tag{107}$$

Действительно, подставляя в уравнение (106) вместо $y(x)$ функцию $e^{\alpha x}$, получим

$$e^{\alpha x} - \lambda \int_{-\infty}^{x} H(x-s)\, e^{\alpha s}\, ds - \lambda \int_{x}^{\infty} H(s-x)\, e^{\alpha s}\, ds = 0,$$

или, изменяя переменные интегрирования в обоих интегралах,

$$e^{\alpha x} - \lambda \int_0^{\infty} H(\rho)\, e^{\alpha(x-\rho)} d\rho - \lambda \int_0^{\infty} H(\rho)\, e^{\alpha(x+\rho)} d\rho = 0,$$

откуда по сокращении на $e^{\alpha x}$ найдем

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^{\infty} H(\rho)(e^{\alpha\rho} + e^{-\alpha\rho})\, d\rho}.$$

При этом мы предполагаем существование интеграла, считая пока α действительным числом.

Наложим на $H(\rho)$ еще следующие ограничения: $H(\rho)$ при $\rho \geqslant 0$ — положительная и непрерывная функция; далее, существует постоянное A $(0 < A \leqslant +\infty)$ такое, что интеграл, входящий в формулу (107), сходится для всех положительных α, $\alpha < A$ и расходится для $\alpha = A$.

Заметив теперь, что второй множитель $e^{\alpha\rho} + e^{-\alpha\rho}$, стоящий под знаком интеграла, рассматриваемый как функция α, монотонно возрастает, мы заключаем, что $\lambda(\alpha)$ монотонно и непрерывно убывает в интервале $0 \leqslant \alpha < A$ от значения $\lambda(0) = \dfrac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho}$ до значения $\lambda(A) = 0$. Таким образом каждому значению λ, $0 < \lambda \leqslant \lambda(0)$ соответствует вполне определенное число α, $\alpha \geqslant 0$. Решение интегрального уравнения (106) при $\lambda = \lambda(\alpha)$ может быть представлено в виде $C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$. В частности,

при $\lambda = \lambda(0) = \dfrac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho}$ решением уравнения (106), кроме $y(x) = \text{const.}$, будет

$$y(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha} = x.$$

Последнее решение мы получим как предел решений $\dfrac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha}$, когда α стремится к нулю. Непосредственной проверкой легко убедиться, что x действительно есть решение уравнения (106). В самом деле, подставляя x в уравнение (106), получим

$$x - \lambda \int_{-\infty}^{x} H(x-s)\, s\, ds - \lambda \int_{x}^{\infty} H(s-x)\, s\, ds = 0,$$

$$x - \lambda \int_0^{\infty} H(\rho)(x-\rho)\, d\rho - \lambda \int_0^{\infty} H(\rho)(x+\rho)\, d\rho = 0,$$

откуда следует

$$x\left[1 - 2\lambda \int_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho\right] = 0,$$

что справедливо при $\lambda = \dfrac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho}$.

Наконец, если $\lambda > \dfrac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho}$, то нужно принять α чисто мнимым.

Действительно,

$$\lambda(\beta i) = \lambda(-\beta i) = \frac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\cos\beta\rho\, d\rho} > \frac{1}{2\int\limits_0^{\infty} H(\rho)\, d\rho}.$$

Значениям $\lambda(\beta i) = \lambda(-\beta i)$ соответствуют действительные решения $\cos(\beta x)$ и $\sin(\beta x)$ интегрального уравнения (106).

Возвращаясь к уравнению (105), мы должны положить $H(\rho) = e^{-\rho}$. В этом случае функция $\lambda(\alpha)$ принимает вид $\frac{1}{2}(1-\alpha^2)$, и, следовательно, $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ и $A = 1$, т. е. значения λ, заполняющие интервал $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$, будут фундаментальными числами. Так как $\lambda(\beta i) = \frac{1}{2}(1+\beta^2)$, то фундаментальными числами будут также значения $\lambda > \frac{1}{2}$ с соответствующими решениями $\cos(\sqrt{2\lambda - 1}\, x)$ и $\sin(\sqrt{2\lambda - 1}\, x)$, как мы это уже нашли ранее.

4. Рассмотрим, наконец, соответствующее уравнению (106) неоднородное интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} H(|x-s|)\,y(s)\,ds=f(x). \tag{108}$$

Предположим, что

$$|f(x)|\leqslant M$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(|x-s|)|\,ds=2\int_{0}^{\infty}|H(\rho)|\,d\rho=K$$

существует. При этих условиях мы покажем, что уравнение (108), подобно регулярному уравнению, имеет единственное ограниченное решение для каждого комплексного значения параметра λ, модуль которого достаточно мал. С этой целью ищем решение уравнения (108) в виде ряда, степенного относительно λ

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,s)f(s)\,ds+\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x,s)f(s)\,ds+\ldots, \tag{109}$$

где $K(x,s)=H(|x-s|)$ и $K_2(x,s)$, $K_3(x,s)$, ... представляют последовательные итерации ядра $K(x,s)$. Согласно условию члены ряда (109) по модулю не превосходят соответствующих членов ряда

$$M+MK|\lambda|+MK^2|\lambda|^2+\ldots \tag{109'}$$

Ряд (109′) сходится, если $K|\lambda|<1$; следовательно, при $|\lambda|<\frac{1}{K}$ ряд (109) сходится абсолютно и равномерно в интервале $(-\infty,+\infty)$. Его сумма $y(x)$ есть ограниченная функция, по модулю меньшая суммы ряда (109′). Путем подстановки ряда (109) в интегральное уравнение (108) легко проверить, что $y(x)$ есть действительно решение этого уравнения. Остается показать, что найденное решение есть единственное ограниченное решение. В самом деле, пусть существует другое ограниченное решение $\overline{y}(x)$ уравнения (108); тогда разность $\delta(x)=y(x)-\overline{y}(x)$ была бы ограниченной функцией $|\delta(x)|\leqslant\Delta$ и удовлетворяла бы однородному уравнению

$$\delta(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,s)\,\delta(s)\,ds=0.$$

Внося $\delta(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,s)\,\delta(s)\,ds$ под знак интеграла, получим

$$\delta(x)=\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x,s)\,\delta(s)\,ds$$

и вообще

$$\delta(x)=\lambda^n\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x,s)\,\delta(s)\,ds. \tag{110}$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty}|K_n(x,s)\,\delta(s)|\,ds\leqslant K^n\cdot\Delta$, то из уравнения (110) следует $|\delta(x)|\leqslant\Delta|\lambda|^nK^n$, где n — любое натуральное число. Вспомнив, что $|\lambda|K<1$, заключаем: $\delta(x)\equiv 0$ и, значит, $\overline{y}(x)\equiv y(x)$. Этим и доказана единственность ограниченного решения для интегрального уравнения (108). Выше мы показали, что для значений λ, заполняющих интервал $0<\lambda<\lambda(0)=\frac{1}{K}$, существуют решения соответствующего однородного уравнения, т. е. что эти значения параметра λ представляют фундаментальные числа. Этот факт не находится в противоречии с только что доказанной единственностью решения неоднородного уравнения (108), как это могло бы показаться сначала. Действительно, соответствующие этим фундаментальным числам решения однородного уравнения, как мы знаем из предыдущего, будут неограниченными функциями; здесь же, говоря о единственности решения уравнения (108), мы существенным образом предполагаем ограниченность рассматриваемых решений.

В частности, эти результаты относятся к интегральному уравнению с ядром $e^{-|x-s|}$. В этом случае $K=2\int_0^{\infty}e^{-\rho}\,d\rho=2$. Следовательно, при $|\lambda|<\frac{1}{2}$ неоднородное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-s|}\,y(s)\,ds+f(x)$$

всегда разрешимо. Полученная граница для λ в этом частном случае весьма хороша, так как уже при $\lambda=\frac{1}{2}$ может случиться [при специальном подборе $f(x)$], что не существует (даже неограниченного) решения этого уравнения.

ЗАДАЧИ

Вычислить $D(\lambda)$ и $D(x,s;\lambda)$ для уравнения Фредгольма

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds$$

со следующими ядрами и пределами интегрирования.

1. $K(x,s)=1$, $a=0$, $b=1$. *Отв.* $D(\lambda)=1-\lambda$; $D(x,s;\lambda)=1$.
2. $K(x,s)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$. *Отв.* $D(\lambda)=1-2\lambda$; $D(x,s;\lambda)=\sin\lambda$.
3. $K(x,s)=2e^xe^s$, $a=0$, $b=1$. *Отв.* $D(\lambda)=1-(e^2-1)\lambda$; $D(x,s;\lambda)=2e^xe^s$.
4. $K(x,s)=x-s$, $a=0$, $b=1$. *Отв.* $D(\lambda)=1+\frac{1}{12}\lambda^2$; $D(x,s;\lambda)=x-s-\lambda\left(xs-\frac{x+s}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

Пользуясь полученными выше функциями $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$, решить следующие интегральные уравнения.

1. $u(x) = \sec^2 x + \lambda \int_0^1 u(s)\, ds$. *Отв.* $\sec^2 x + \frac{\lambda}{1-\lambda} \operatorname{tg} 1$, если $\lambda \neq 1$.

2. $u(x) = \cos x + \lambda \int_0^\pi \sin x \cdot u(s)\, ds$. *Отв.* $\cos x$, если $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

3. $u(x) = e^x + \lambda \int_0^1 2e^x e^s u(s)\, ds$. *Отв.* $\frac{e^x}{1-\lambda(e^2-1)}$, если $\lambda \neq \frac{1}{e^2-1}$.

4. $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (x-s) u(s)\, ds$. *Отв.* $\frac{6(2-\lambda+2\lambda x)}{12+\lambda^2}$, если $\lambda \neq \pm 2\sqrt{3}i$.

Пользуясь полученными выше функциями $D(\lambda)$ и $D(x, s; \lambda)$, решить следующие однородные интегральные уравнения.

1. $u(x) = \lambda \int_0^1 u(s)\, ds$.

Отв. C, если $\lambda = 1$; $u(x) \equiv 0$, если $\lambda \neq 1$.

2. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x\, u(s)\, ds$.

Отв. $C \sin x$, если $\lambda = \frac{1}{2}$; $u(x) \equiv 0$ для $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

3. $u(x) = \lambda \int_0^1 2e^x e^s u(s)\, ds$.

Отв. Ce^x, если $\lambda = \frac{1}{e^2-1}$; $u(x) \equiv 0$ для $\lambda \neq \frac{1}{e^2-1}$.

Решить следующие неоднородные интегральные уравнения, пользуясь третьей теоремой Фредгольма.

1. $u(x) = \cos x + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin x\, u(s)\, ds$. *Отв.* $\cos x + C \sin x$.

2. $u(x) = e^x + \frac{1}{e^2-1} \int_0^1 2e^x e^s u(s)\, ds$. *Отв.* Неразрешимо.

3. Путем подстановки проверить, что уравнение

$$u(x) = \int_0^x s^{x-s} u(s)\, ds$$

имеет бесконечное множество решений $u(x) = Cx^{x-1}$. Почему не выполняется теорема единственности?

Глава III

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ

1. В этой главе будет изложена теория одного специального класса интегральных уравнений Фредгольма, а именно уравнений с так называемым симметрическим ядром. Этот класс интегральных уравнений преимущественно встречается в проблемах математической физики, что служит одним из оснований специального его исследования. Изучение интегральных уравнений с симметрическим ядром покажет нам, что они обладают рядом специфических свойств, не присущих общим уравнениям Фредгольма.

Ядро $K(x, s)$ интегрального уравнения называется *симметрическим*, если $K(x, s) \equiv K(s, x)$. Мы будем считать ядро регулярной функцией в основной области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, т. е. будем излагать теорию регулярных интегральных уравнений Фредгольма с симметрическим ядром.

2. Рассмотрим однородное интегральное уравнение с симметрическим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds. \tag{1}$$

Как было выяснено в предыдущей главе (§ 2), всякое решение $\varphi(x)$ этого уравнения необходимо будет непрерывной функцией, если мы потребуем лишь абсолютной интегрируемости функции $\varphi(x)$ в интервале (a, b).

Далее было установлено, что однородное уравнение (1) имеет решение, отличное от тождественного нуля, только в том случае, когда значение параметра λ есть фундаментальное число, т. е. корень уравнения $D(\lambda) = 0$. Решение $\varphi(x)$ однородного интегрального уравнения (1) мы называли фундаментальной функцией этого уравнения [или ядра $K(x, s)$], соответствующей фундаментальному числу λ.

Если $\bar{\varphi}(x)$ есть функция, удовлетворяющая однородному интегральному уравнению (1), то, как легко видеть, решением этого уравнения будет также $\varphi(x) = c\bar{\varphi}(x)$, где c — произвольный постоянный множитель. Множитель c всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx = 1.$$

Действительно, для этого нужно принять

$$c = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_a^b \varphi^2(x)\,dx}}.$$

Выбранная таким образом функция $\varphi(x)$ называется *нормированным решением*, или *нормированной фундаментальной функцией* интегрального уравнения (1).

3. Основное предложение теории интегральных уравнений с симметрическим ядром заключается в следующем: для всякого симметрического ядра существует по крайней мере одно фундаментальное число. Что касается общих ядер, то, как известно из гл. II, для них это положение, вообще говоря, неверно. Так, существуют ядра без фундаментальных чисел, например ядра типа Вольтерра.

Установив вышеуказанное фундаментальное предложение, мы можем утверждать, что для всякого симметрического ядра существует множество фундаментальных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{2}$$

которое будет состоять из конечного или счетного множества элементов. Более того, мы видели, что в случае бесконечного множества фундаментальных чисел эти последние не могут иметь предельной точки на конечном расстоянии и, следовательно, могут быть перенумерованы в порядке неубывающих модулей. Эти заключения немедленно вытекают из того обстоятельства, что фундаментальные числа являются нулями целой функции $D(\lambda)$. Множество (2) всех фундаментальных чисел называют *спектром* интегрального уравнения, или ядра $K(x, s)$.

Приступая к изложению теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, мы начнем с разбора примера, чтобы на нем подметить те основные моменты, которые должны быть выяснены в дальнейшем при построении общей теории.

§ 1. Интегральное уравнение тригонометрических функций.

1. Во введении была отмечена та роль, которую играют интегральные уравнения Фредгольма II рода во всех задачах колебаний. Поэтому естественно ожидать, что из таких уравнений при надлежащем выборе ядра должны получаться тригонометрические функции. Чтобы получить ядро, для которого фундаментальными функциями служат тригонометрические функции, достаточно на это ядро $K(x, s)$ наложить следующие три условия: 1) $K(x, s)$ — симметрическая функция в основной области $0 \leqslant (x, s) \leqslant 1$, т. е. $K(x, s) \equiv K(s, x)$; 2) ядро K в каждом из обоих треугольников, на которые делится основной квадрат диагональю $x = s$, есть линейная функция относительно x и s; 3) производная функции K относительно x претерпевает конечный, отличный от нуля скачок при $x = s$.

Самая общая удовлетворяющая этим предположениям функция $K(x, s)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} K(x, s) &= axs + bx + cs + d \text{ для } x \leqslant s, \\ K(x, s) &= axs + cx + bs + d \text{ для } x > s, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем $b \neq c$. Образуем однородное интегральное уравнение второго рода с ядром (3)

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0. \tag{4}$$

Диференцируем обе стороны интегрального уравнения (4), предварительно разбив интервал интеграции на части $(0, x)$ и $(x, 1)$; тогда получаем

$$\varphi'(x) - \lambda \int\limits_0^x (as + c)\,\varphi(s)\,ds - \lambda \int\limits_x^1 (as + b)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{4'}$$

так как результаты диференцирования относительно пределов дадут выражения $\pm K(x, x)\,\varphi(x)$, взаимно сокращающиеся.

Продиференцировав еще раз уравнение (4), найдем

$$\varphi''(x) - \lambda(ax + c)\,\varphi(x) + \lambda(ax + b)\,\varphi(x) \equiv \varphi'' + \lambda(b - c)\,\varphi = 0. \tag{4''}$$

Следовательно, решения уравнения (4) нужно искать среди решений диференциального уравнения (4''), т. е. они будут вида

$$\varphi(x) = A\cos\chi x + B\sin\chi x, \tag{5}$$

где

$$\chi = \sqrt{\lambda(b - c)}.$$

Постоянные A и B в формуле (5) не могут быть произвольными, и мы должны наложить на них ограничения, согласно исходному уравнению (4). Положим для сокращения

$$\lambda \int\limits_0^1 s\varphi(s)\,ds = C, \quad \lambda \int\limits_0^1 \varphi(s)\,ds = D.$$

Из интегрального уравнения (4), в котором $K(x, s)$ заменено по формуле (3), получим, полагая $x = 0$ и $x = 1$,

$$\varphi(0) = cC + dD, \quad \varphi(1) = (a + b)\,C + (c + d)\,D \tag{6}$$

и аналогично из (4')

$$\varphi'(0) = aC + bD, \quad \varphi'(1) = aC + cD. \tag{7}$$

Исключая C и D из четырех уравнений (6) и (7), получим граничные условия для неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\left.\begin{aligned} b\varphi(0) - c\varphi(1) - d\varphi'(0) + (c + d)\,\varphi'(1) = 0, \\ a\varphi(0) - a\varphi(1) - c\varphi'(0) + (a + b)\,\varphi'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Само исключение можно, например, произвести так: вычитая из третьего из уравнений (6) и (7) четвертое, получим уравнение для D; посредством вычитания первого и четвертого из второго получим уравнение для C; вычислив из полученных таким образом уравнений C и D, подставим их в первое и третье уравнения.

Итак, решениями интегрального уравнения (4) будут те из решений (5) диференциального уравнения (4″), которые удовлетворяют граничным условиям (8). Подставляя в эти граничные условия (8) решение (5), получим два линейных однородных уравнения относительно A и B, которые будут иметь ненулевые решения только в том случае, если их определитель обращается в нуль; равенство нулю этого определителя дает трансцендентное уравнение для χ, а значит, и для λ. Только для значений λ, являющихся корнями этого трансцендентного уравнения, однородное интегральное уравнение (4) разрешимо. Другими словами, эти исключительные значения параметра λ представляют спектр интегрального уравнения (4).

Произведем вычисления, приняв следующие значения для a, b, c и d:

1) $a = -1,\ b = 1,\ c = d = 0;$

2) $a = c = d = 0,\ b = 1;$

3) $a = b = 1,\ c = d = 0.$

Граничные условия (8) будут в этих трех случаях соответственно следующие:

1) $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 0;$

2) $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(1) = 0;$

3) $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 2\varphi'(1),$

а трансцендентные уравнения, получаемые в результате подстановки (5) в эти граничные условия и исключения A и B, будут

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sin\chi = 0,\\ &2)\ \cos\chi = 0,\\ &3)\ \operatorname{tg}\chi = 2\chi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Обозначая через $\chi_1, \chi_2, \ldots$ корни последнего уравнения, получим решения (5), удовлетворяющие граничным условиям 1), 2), 3):

1) $\sin \pi x,\ \sin 2\pi x,\ \ldots;$

2) $\sin\frac{\pi}{2}x,\ \sin\frac{3\pi}{2}x,\ \ldots;$

3) $\sin\chi_1 x,\ \sin\chi_2 x,\ \ldots$

Соответствующие этим фундаментальным функциям фундаментальные числа λ будут

1) $\pi^2,\ 4\pi^2,\ \ldots;$

2) $\frac{\pi^2}{4},\ \frac{9\pi^2}{4},\ \ldots;$

3) $\chi_1^2,\ \chi_2^2,\ \ldots$

Каждому из этих случаев соответствуют определенные проблемы колебаний, так, например, случаю 1) соответствует колебание струны, закрепленной на обоих концах.

2. Перейдем теперь к рассмотрению соответствующего уравнению (4) неоднородного интегрального уравнения с ядром (3)

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x). \tag{10}$$

Предполагая функцию $f(x)$ дважды диференцируемой, мы видим, что и решение $\varphi(x)$ уравнения (10) будет дважды диференцируемым; выполняя двукратное диференцирование уравнения (10), получим вместо (4″) диференциальное уравнение

$$\varphi'' + \lambda(b - c)\varphi = f''. \tag{11}$$

Решение интегрального уравнения (10) будет совпадать с тем решением диференциального уравнения (11), которое удовлетворяет граничным условиям, получаемым аналогично случаю однородного уравнения. Эти граничные условия в данном случае будут

$$\left.\begin{aligned} &b\varphi(0) - c\varphi(1) - d\varphi'(0) + (c+d)\varphi'(1) =\\ &\qquad = bf(0) - cf(1) - df'(0) + (c+d)f'(1),\\ &a\varphi(0) - a\varphi(1) - c\varphi'(0) + (a+b)\varphi'(1) =\\ &\qquad = af(0) - af(1) - cf'(0) + (a+b)f'(1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В частности, граничные условия (12) совпадают с прежними условиями (8), если данная функция $f(x)$ сама удовлетворяет граничным условиям (8).

Согласно теории Фредгольма искомое решение $\varphi(x)$ может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^1 g(x, s) f(s)\,ds, \tag{13}$$

где $g(x, s)$, резольвента интегрального уравнения (10), зависит только от K и λ, но не зависит от f. Чтобы формула (13) давала решение интегрального уравнения (10), она должна удовлетворять диференциальному уравнению (11) и граничным условиям (12). Так как ядро $K(x, s)$ — симметрическая функция, то и его резольвента $g(x, s)$ должна быть симметрической функцией в основной области $0 \leqslant (x, s) \leqslant 1$. Положим $g(x, s) = g_1(x, s)$ для $x \leqslant s$ и $g(x, s) = g_2(x, s)$ для $x > s$. Чтобы функция $\varphi(x)$ из формулы (13) удовлетворяла граничным условиям (12), выберем $g(x, s)$ выполняющей относительно x граничные условия (8) при каждом значении s. Далее подставим правую часть формулы (13) в диференциальное уравнение (11), предварительно выполнив диференцирования. Первое диференцирование дает

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda\int_0^x g_2'(x, s) f(s)\,ds +$$

$$+ \lambda\int_x^1 g_1'(x, s) f(s)\,ds + \lambda\,[g_2(x, x) - g_1(x, x)]\,f(x).$$

Предполагая $g(x, s)$ всюду непрерывной функцией в области $0 \leqslant (x, s) \leqslant 1$, мы имеем

$$g_2(x, x) = g_1(x, x),$$

а потому последнее слагаемое исчезает. Продиференцировав еще раз, получим

$$\varphi''(x) = f''(x) + \lambda \int_0^1 g''(x, s) f(s)\, ds + \lambda \left[g_2'(x, x) - g_1'(x, x)\right] f(x).$$

Подставляя φ'' и φ в диференциальное уравнение (11), найдем

$$\int_0^1 \left[g''(x, s) + \lambda (b - c) g(x, s)\right] f(s)\, ds +$$
$$+ \left[g_2'(x, x) - g_1'(x, x)\right] f(x) + (b - c) f(x) = 0.$$

Чтобы удовлетворить последнему равенству, подчиним $g(x, s)$ следующим условиям: $g(x, s)$, рассматриваемая как функция x, удовлетворяет однородному диференциальному уравнению ($4''$) в треугольниках $x < s$ и $x > s$; первая производная функции $g(x, s)$ относительно x на диагонали $x = s$ претерпевает скачок, равный $c - b$, т. е.

$$g_2'(x, x) - g_1'(x, x) = c - b.$$

Остается построить функцию $g(x, s)$, удовлетворяющую всем этим условиям. Так как $g(x, s)$ относительно x удовлетворяет однородному диференциальному уравнению ($4''$) в треугольниках $x < s$ и $x > s$, то она должна быть вида

$$\left.\begin{aligned} g(x, s) &= A_1 \cos \chi x + B_1 \sin \chi x \equiv g_1(x, s) \text{ для } x \leqslant s, \\ g(x, s) &= A_2 \cos \chi x + B_2 \sin \chi x \equiv g_2(x, s) \text{ для } x > s. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Четыре коэфициента A_1, A_2, B_1, B_2, зависящие от s и χ (или λ), должны быть выбраны так, чтобы функция g относительно x удовлетворяла двум граничным условиям (8); далее, при $x = s$ оба выражения g_1 и g_2 должны совпадать и, наконец, первая производная относительно x функции g должна при $x = s$ иметь скачок, равный $c - b$.

Произведем вычисления до конца при граничных условиях вида 1). В этом случае из граничных условий находим

$$A_1 = 0, \quad A_2 \cos \chi + B_2 \sin \chi = 0.$$

Условие непрерывности на диагонали $x = s$ даст

$$(B_1 - B_2) \sin \chi s = A_2 \cos \chi s.$$

Наконец, условие прерывности первой производной на диагонали $x = s$ примет вид

$$\chi (B_1 - B_2) \cos \chi s + \chi A_2 \sin \chi s = 1.$$

Разрешив эти четыре уравнения и внося найденные значения A_1, A_2, B_1, B_2 в формулу (14), получим

$$\left.\begin{aligned} g_1(x, s) &= \frac{\sin \chi (1 - s) \sin \chi x}{\chi \sin \chi}, \\ g_2(x, s) &= \frac{\sin \chi (1 - x) \sin \chi s}{\chi \sin \chi}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из формулы (15) для резольвенты мы усматриваем известные из общей теории гл. II свойства: резольвента g, как и ядро K, есть симметрическая функция в основной области; она не существует, т. е. изображается дробью с исчезающим знаменателем для значений параметра χ (или λ), служащих корнями уравнения $\sin \chi = 0$; эти исключительные значения параметра λ (называемые фундаментальными числами ядра K) замечательны тем, что для них однородное интегральное уравнение (4) разрешимо, а неоднородное в общем случае не разрешимо.

Физическое значение этих случаев приводит к понятиям „собственные колебания", „вынужденные колебания" и „резонанс".

3. Ограничиваясь случаем 1), когда $a = -1$, $b = 1$, $c = d = 0$, рассмотрим ядро $K(x, s)$:

$$\left.\begin{aligned} K(x, s) &= x(1 - s) \text{ для } x \leqslant s; \\ K(x, s) &= s(1 - x) \text{ для } x > s. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Разложим это ядро, рассматриваемое как функция от x, в ряд Фурье в интервале (0, 1) по его фундаментальным функциям $\sin n\pi x$. Коэфициентом при $\sin n\pi x$ будет

$$b_n = 2(1 - s) \int_0^s x \sin n\pi x\, dx + 2s \int_s^1 (1 - x) \sin n\pi x\, dx = \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi s.$$

Окончательное выражение для b_n получается после выполнения квадратур. Мы приходим к представлению ядра (16) в виде одной формулы

$$K(x, s) = \frac{2}{\pi^2} \sin \pi s \sin \pi x + \frac{2}{4\pi^2} \sin 2\pi s \sin 2\pi x + \ldots,$$

или

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi s \sin n\pi x. \tag{17}$$

Ряд (17) сходится абсолютно и равномерно для всех x и s.

4. Также резольвента (15) может быть разложена в ряд синусов, с коэфициентами

$$\frac{2 \sin \chi (1 - s)}{\chi \sin \chi} \int_0^s \sin \chi x \sin n\pi x\, dx + \frac{2 \sin \chi s}{\chi \sin \chi} \int_s^1 \sin \chi (1 - x) \sin n\pi x\, dx.$$

После достаточно длинных вычислений, впрочем, вполне элементарных, получим для этих коэфициентов значения

$$\frac{2 \sin n\pi s}{n^2\pi^2 - \chi^2} = \frac{2 \sin n\pi s}{n^2\pi^2 - \lambda},$$

и, значит,

$$g(x, s) = \frac{2\sin\pi s\sin\pi x}{\pi^2-\lambda} + \frac{2\sin 2\pi s\sin 2\pi x}{4\pi^2-\lambda} + \ldots,$$

или

$$g(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi s\sin n\pi x}{n^2\pi^2-\lambda}. \tag{18}$$

Из формулы (18) для резольвенты мы усматриваем, что она представляет собой мероморфную функцию параметра λ, простыми полюсами которой являются фундаментальные числа $\lambda = n^2\pi^2$.

5. Внося найденное выражение $g(x, s)$ в формулу (13), получим решение неоднородного интегрального уравнения, разложенное по фундаментальным функциям:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{n^2\pi^2-\lambda}\sin n\pi x, \tag{19}$$

где k_n обозначают коэфициенты Фурье для функции f, т. е.

$$k_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Формула (19) показывает, что если λ не равно никакому фундаментальному числу, то неоднородное интегральное уравнение (10) имеет единственное решение, определяемое по этой формуле; когда $\lambda = m^2\pi^2$, т. е. есть фундаментальное число, то формула (19), вообще говоря, теряет смысл, и уравнение (10) неразрешимо.

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы неоднородное интегральное уравнение (10) было разрешимо при $\lambda = m^2\pi^2$, как показывает формула (19), будет $k_m = 0$ или

$$\int_0^1 f(x)\sin m\pi x\,dx = 0.$$

При выполнении этого условия неоднородное интегральное уравнение имеет решение и при λ, равном фундаментальному числу $m^2\pi^2$, определяемое той же формулой (19), в которой член с k_m будет отсутствовать. Само собой разумеется, что в этом случае неоднородное интегральное уравнение будет иметь бесконечное множество решений, которые все получатся, если к решению $\varphi(x)$, определяемому формулой (19), прибавить $A\sin m\pi x$, т. е. решение соответствующего однородного интегрального уравнения.

6. Детальный разбор примера интегрального уравнения с симметрическим ядром, произведенный в этом параграфе, позволил нам установить следующие его свойства.

1) *Фундаментальные числа все действительны.*

2) *Фундаментальные функции образуют ортогональную систему в основном интервале* (0, 1).

3) *Ядро разлагается в ряд по фундаментальным функциям.*

4) *Резольвента разлагается в ряд по фундаментальным функциям с явным выделением фундаментальных чисел, которые служат простыми полюсами этой резольвенты, если ее рассматривать как функцию параметра.*

5) *Решение неоднородного интегрального уравнения изображается рядом по фундаментальным функциям с явным выделением фундаментальных чисел.*

6) *Условие, необходимое и достаточное для разрешимости неоднородного интегрального уравнения в случае, когда значение параметра совпадает с фундаментальным числом, заключается в ортогональности правой части к соответствующей этому числу фундаментальной функции.*

В дальнейшем при изложении общей теории интегральных уравнений с симметрическим ядром мы увидим, что все эти свойства остаются справедливыми для любых симметрических ядер.

§ 2. Ортогональность фундаментальных функций. 1. Интегральное уравнение с симметрическим ядром $K(x, s)$ не отличается от своего присоединенного уравнения с ядром $K(s, x)$, так как $K(x, s) \equiv K(s, x)$. Этот факт приводит к упрощениям. Так, в § 13 гл. II мы доказали, что решение однородного интегрального уравнения является ортогональным к решению его присоединенного уравнения, если эти решения соответствуют разным значениям параметра λ. Как непосредственное следствие этого предложения, мы имеем теорему.

Два решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ однородного интегрального уравнения с симметрическим ядром, соответствующие двум разным фундаментальным числам λ' и λ'', ортогональны между собой.

Ввиду важности этого предложения для всей теории интегральных уравнений с симметрическим ядром воспроизведем доказательство этой простой теоремы.

Итак, пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две фундаментальные функции ядра $K(x, s)$, соответствующие двум разным фундаментальным числам λ' и λ'', т. е. $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda'\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \\ \psi(x) &= \lambda''\int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Покажем, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ортогональны между собой на отрезке $[a, b]$. С этой целью умножим первое из равенств (20) на $\frac{1}{\lambda'}\psi(x)$, второе — на $\frac{1}{\lambda''}\varphi(x)$ и вычтем затем второе из первого; тогда получим

$$\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda''}\right)\varphi(x)\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,ds - \int_a^b K(x, s)\psi(s)\varphi(x)\,ds.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от a до b, получим

$$\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda''}\right)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\psi(x)\,dx\,ds-$$
$$-\int_a^b\int_a^b K(x, s)\psi(s)\varphi(x)\,dx\,ds.$$

Переставляя переменные интеграции во втором двойном интеграле, мы усматриваем вследствие симметричности ядра, что он равен первому двойному интегралу; следовательно, правая часть последнего равенства обращается в нуль.

Заметив, что множитель при интеграле в левой части отличен от нуля, так как $\lambda' \neq \lambda''$, мы заключаем:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0,$$

что и доказывает ортогональность фундаментальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

§ 3. Отсутствие мнимых фундаментальных чисел. 1. Пользуясь только что доказанным предложением, легко показать невозможность мнимых фундаментальных чисел у интегрального уравнения с действительным симметрическим ядром. Иными словами, докажем теорему:

Действительное симметрическое ядро не может иметь мнимых фундаментальных чисел.

В самом деле, предположим, что функция Фредгольма $D(\lambda)$ симметрического ядра $K(x, s)$ имеет мнимый корень $\lambda'=\alpha+i\beta$; так как $D(\lambda)$ имеет действительные коэфициенты, то корнем этой функции будет также сопряженное число $\lambda''=\alpha-i\beta$. Мы знаем, что однородное интегральное уравнение имеет по крайней мере одно решение $\varphi(x)=$ $=p(x)+iq(x)$, когда параметр λ равен фундаментальному числу λ'; это решение есть непрерывная функция, не равная тождественно нулю. Заменяя i на $-i$ в уравнении

$$\varphi(x)=\lambda'\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

мы видим, что функция $\psi(x)=p(x)-iq(x)$ есть решение того же уравнения, соответствующее фундаментальному числу $\lambda''=\alpha-i\beta$, отличному, по предположению, от λ'. Вследствие теоремы, доказанной в § 2 настоящей главы, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть ортогональны между собой, т. е.

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=\int_a^b [p^2(x)+q^2(x)]\,dx=0.$$

Последний интеграл от неотрицательной непрерывной функции $p^2(x)+$ $+q^2(x)$ может быть равен нулю только в том случае, когда эта функция — тождественный нуль, т. е. $p(x)\equiv q(x)\equiv 0$, а тогда и $\varphi(x)\equiv 0$. Мы пришли к противоречию, допустив, что фундаментальное число мнимое, и, следовательно, мы доказали, что интегральное уравнение с действительным симметрическим ядром не может иметь мнимых фундаментальных чисел.

2. Разумеется, из того, что интегральное уравнение не имеет мнимых фундаментальных чисел, не следует, что оно обязательно имеет действительные фундаментальные числа. Можно указать очень простой пример непрерывного действительного ядра без фундаментальных чисел. Достаточно принять $K(x, s)\equiv \sin x\cos s$ в области $0\leqslant (x, s)\leqslant 2\pi$, чтобы сразу усмотреть, что тогда $D(\lambda)\equiv 1$, потому что все члены разложения $D(\lambda)$ в этом случае обращаются в нуль, кроме первого.

Другой очень важный пример в этом отношении представляет уравнение Вольтерра. Мы знаем, что это уравнение имеет при всяком значении параметра λ единственное непрерывное решение при условии, что его правая часть $f(x)$ — непрерывная функция. В частности, однородное уравнение Вольтерра не может иметь других решений, кроме тождественного нуля. Это показывает, что ядра Вольтерра не имеют фундаментальных чисел. Тот же результат мы усматриваем из вида знаменателя резольвенты уравнения Вольтерра, который был получен в § 15 гл. II:

$$D(\lambda)=e^{-\lambda\int_a^b K(x, x)\,dx}.$$

Функция $D(\lambda)$ не имеет нулей, т. е. уравнение Вольтерра не имеет фундаментальных чисел. После этих замечаний исключительно важное значение приобретает теорема о том, что всякое симметрическое ядро имеет по крайней мере одно фундаментальное число. Это предложение является главным во всей теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. Его доказательство мы сейчас изложим.

§ 4. Существование фундаментального числа. 1. Задачей настоящего параграфа является доказательство главного предложения теории интегральных уравнений Фредгольма с симметрическим ядром.

Для всякого симметрического ядра существует по крайней мере одно фундаментальное число.

Будем, естественно, предполагать, что данное симметрическое ядро не есть тождественный нуль. Мы докажем тогда, что никакое итерированное ядро не может быть тождественным нулем. В самом деле, отправляясь от формулы

$$K_{n+p}(x, s)=\int_a^b K_n(x, t)\,K_p(t, s)\,dt, \tag{21}$$

мы усматриваем, во-первых, что все итерации симметрического ядра будут симметрическими функциями. Действительно,

$$K_2(x, s)=\int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt,$$

и воспользовавшись симметрией данного ядра $K(x, t)$, получим

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(s, t) K(t, x)\, dt = K_2(s, x).$$

Доказав симметрию K_2, с помощью формулы (21), приняв в ней $n=2$, $p=1$, докажем симметрию $K_3(x, s)$ и т. д. Во-вторых, из той же формулы (21) следует, что если какое-либо итерированное ядро $K_n(x, s)$ есть тождественный нуль, то и все следующие за ним итерации K_{n+p} будут тождественно равны нулю. Пусть теперь K_{2m} есть первое из итерированных ядер четного индекса, равное тождественно нулю. По формуле (21) имеем

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b K_m(x, t) K_m(t, x)\, dt,$$

а вследствие симметрии K_m можем переписать последнюю формулу так:

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b [K_m(x, t)]^2\, dt. \tag{22}$$

Таким образом, если $K_{2m} \equiv 0$, то, как показывает формула (22), ядро $K_m(x, t)$ должно быть тождественным нулем; заметив же, что m не может быть равно единице, мы приходим к заключению: K_{2m} не будет первым итерированным ядром четного ранга, тождественно равным нулю. Полученное противоречие показывает, что ни одна итерация не равна нулю тождественно, если начальное ядро $K(x, s)$ не есть тождественный нуль. Воспользуемся теперь формулой (60″) из § 10 гл. II:

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_{n+1}, \tag{23}$$

где положено

$$U_n = \int_a^b K_n(s, s)\, ds.$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (23), сходится для достаточно малых по модулю значений параметра λ. Покажем, что он не всюду сходится в случае симметрического ядра; это будет означать, что левая часть формулы (23) не есть целая функция. Так как $D(\lambda)$ и $D'(\lambda)$ суть целые функции, то отсюда будет следовать, что $D(\lambda)$ обращается в нуль по крайней мере для одного значения параметра λ; иными словами, будет доказано, что ядро имеет по крайней мере одно фундаментальное число.

2. Для исследования сходимости ряда (23) воспользуемся неравенством Шварца (см. введение, § 9):

$$\left[\int_a^b\int_a^b K_{n-1}(x, s) K_{n+1}(x, s)\, dx\, ds\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b\int_a^b [K_{n-1}(x, s)]^2\, dx\, ds \cdot \int_a^b\int_a^b [K_{n+1}(x, s)]^2\, dx\, ds,$$

и формулой (21), которая вследствие симметрии итерированных ядер примет на диагонали $x=s$ вид

$$K_{n+p}(x, x) = \int_a^b K_n(x, s) K_p(x, s)\, ds.$$

Предыдущее неравенство на основании этой последней формулы даст

$$\left[\int_a^b K_{2n}(x, x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b K_{2n-2}(x, x)\, dx \cdot \int_a^b K_{2n+2}(x, x)\, dx$$

или

$$U_{2n}^2 \leqslant U_{2n-2} U_{2n+2}. \tag{24}$$

С другой стороны, так как никакое из итерированных ядер $K_n(x, s)$ не есть тождественный нуль, то

$$U_{2n} = \int_a^b K_{2n}(x, x)\, dx = \int_a^b\int_a^b [K_n(x, s)]^2\, dx\, ds$$

— положительное число при всяком значении $n \geqslant 1$. Неравенство (24) можно поэтому представить так:

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqslant \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} > 0; \tag{24′}$$

отсюда вытекает, что

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqslant \frac{U_4}{U_2}.$$

3. Обращаясь теперь к ряду (23), образуем отношение $\lambda^2 \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$ двух его последовательных членов с нечетными степенями, которое по модулю будет равно $|\lambda|^2 \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$. Так как $\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqslant \frac{U_4}{U_2}$, то при $|\lambda| > \sqrt{\frac{U_2}{U_4}}$ вышеупомянутое отношение будет больше единицы, и, следовательно, при таких значениях параметра λ общий член ряда (23) с нечетной степенью λ не стремится к нулю, когда его номер неограниченно возрастает. Следовательно, мы видим, что ряд (23) расходится для значений λ с $|\lambda| > \sqrt{\frac{U_2}{U_4}}$. Отсюда вытекает, что данное ядро имеет по крайней мере одно фундаментальное число, заключенное в интервале

$$-\sqrt{\frac{U_2}{U_4}} \leqslant \lambda \leqslant +\sqrt{\frac{U_2}{U_4}}.$$

4. Изложенное доказательство дает, сверх того, способ вычисления фундаментального числа, наименьшего по своей абсолютной величине. В самом деле, обозначая это фундаментальное число через λ_1, мы знаем, что λ_1^2 будет наименьшим фундаментальным числом итерированного ядра $K_2(x, s)$ (§ 16 гл. II). С другой стороны, для функции Фред-

гольма $D_2(\mu)$ ядра $K_2(x, s)$ будет иметь место равенство, аналогичное равенству (23):

$$-\frac{D_2'(\mu)}{D_2(\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n U_{2n+2}.$$

Вопрос сводится к определению радиуса сходимости μ_0 этого последнего ряда. В силу неравенства (24′) отношение $\frac{U_{2n}}{U_{2n+2}}$, оставаясь положительным, не возрастает, т. е. стремится к определенному пределу μ_0; этот предел и будет радиусом сходимости последнего ряда.

Итак, имеем

$$\lambda_1^2 = \mu_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{2n}}{U_{2n+2}}.$$

5. Можно вывести рассмотренное здесь главное предложение теории симметрического ядра также из принципов вариационного исчисления. Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, u(x)\, u(s)\, dx\, ds, \tag{25}$$

где $u(x)$ — любая непрерывная в интервале (a, b) функция, удовлетворяющая условию

$$\int_a^b u^2(x)\, dx = 1. \tag{26}$$

Покажем, что функция $u(x)$, минимизирующая интеграл (25) при условии (26), будет фундаментальной функцией ядра $K(x, s)$.

Задача отыскания наименьшего значения интеграла (25) при условии (26) является проблемой вариационного исчисления на условный экстремум. Она сводится к отысканию безусловного минимума интеграла вида

$$I - \lambda \int_a^b u^2(x)\, dx,$$

где λ — неизвестная постоянная. Вычислив вариацию этого интеграла, приравняем ее нулю; таким образом находим

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, [u(x)\, \delta u(s) + u(s)\, \delta u(x)]\, dx\, ds - 2\lambda \int_a^b u(x)\, \delta u(x)\, dx = 0.$$

Разлагая первый интеграл на два и принимая во внимание симметричность ядра, находим

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, u(s)\, \delta u(x)\, dx\, ds - \lambda \int_a^b u(x)\, \delta u(x)\, dx = 0.$$

Объединяя интеграцию по x под общим знаком интеграла, перепишем последнее равенство в виде

$$\int_a^b \delta u(x) \left[\int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds - \lambda u(x) \right] dx = 0.$$

Так как это соотношение должно быть справедливым при любом $\delta u(x)$, то выражение, заключенное в квадратные скобки, будет тождественно равно нулю, т. е. имеет место соотношение

$$\int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds - \lambda u(x) = 0,$$

откуда вытекает

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, s)\, u(s)\, ds.$$

Таким образом мы видим, что минимизирующая функция для интеграла (25) при условии (26) есть фундаментальная функция ядра $K(x, s)$, соответствующая фундаментальному числу $\frac{1}{\lambda}$.

Только что приведенное доказательство предполагает существование экстремума для вышеуказанной проблемы вариационного исчисления.

§ 5. Спектр фундаментальных чисел. 1. Мы доказали, что для всякого симметрического ядра существует по крайней мере одно фундаментальное число. Рассмотрим множество всех фундаментальных чисел данного интегрального уравнения с симметрическим ядром. Это множество представляет собой конечную или бесконечную совокупность действительных чисел; в последнем случае это бесконечное множество чисел не имеет предельного числа на конечном расстоянии и, следовательно, может быть перенумеровано в порядке возрастания абсолютных величин. Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{27}$$

— последовательность всех фундаментальных чисел данного интегрального уравнения, которую будем в дальнейшем называть *спектром* этого уравнения. Если каждому фундаментальному числу соответствует одна фундаментальная функция (с точностью до произвольного постоянного множителя), то написанному спектру (27) будет соответствовать последовательность фундаментальных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{28}$$

которые мы можем считать нормированными, выбирая надлежащим образом постоянные множители. Кроме того, фундаментальные функции (28) ортогональны между собой на основном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, как это было доказано в § 2. В рассматриваемом случае последовательность (28) содержит все фундаментальные функции данного уравнения и называется поэтому *полной нормированной ортогональной системой функций* данного ядра, или данного интегрального уравнения.

Кроме рассмотренного возможен случай, когда фундаментальному числу λ соответствует несколько линейно независимых фундаментальных функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$. Вообще говоря, функции $\psi_i(x)$, как принадлежащие одному и тому же фундаментальному числу, не будут ортогональны между собой. Но согласно § 11 введения мы можем всегда заменить систему q линейно независимых функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ их линейными комбинациями с постоянными коэфициентами (мы обозначим эти линейные комбинации через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$) так, чтобы последние представляли нормированную ортогональную систему. Выполнив такое преобразование системы функций ψ в систему функций φ, заметим, что новые функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ будут оставаться решениями данного однородного интегрального уравнения с рассматриваемым значением параметра λ, потому что каждая из них является линейной комбинацией с постоянными коэфициентами от функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$. Иными словами, функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ будут нормированы и ортогональны между собой и будут фундаментальными функциями для данного ядра с соответствующим фундаментальным числом λ.

Очевидно, каждая функция φ будет ортогональной с любой фундаментальной функцией того же ядра, соответствующей другому фундаментальному числу.

2. Докажем теперь, независимо от сказанного в п. 7 § 11 гл. II, что q — число конечное. Будем исходить из равенства

$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda} = \int_a^b K(x, s)\,\varphi_i(s)\,ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Правая часть этого равенства представляет собой коэфициент Фурье ядра $K(x, s)$, если рассматривать это ядро как функцию от s. Применяя к этим коэфициентам неравенство Бесселя (введение, § 13), получим

$$\frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda^2} + \frac{\varphi_2^2(x)}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\varphi_q^2(x)}{\lambda^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, s)\,ds.$$

Интегрируя это неравенство относительно x в пределах от a до b и принимая во внимание, что система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)$ нормирована, получим

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^2} \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds,$$

или

$$\frac{q}{\lambda^2} \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds,$$

откуда

$$q \leqslant \lambda^2 \int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds.$$

Так как правая часть последнего неравенства есть определенное число, не зависящее от q, то q должно быть конечным числом.

3. Условимся под спектром (27) интегрального уравнения понимать последовательность всех фундаментальных чисел, выписанную в возрастающем порядке абсолютных величин, причем, если какому-нибудь фундаментальному числу λ отвечает q фундаментальных функций, то это число λ мы будем повторять в нашей последовательности (27) q раз, относя каждому из них одну фундаментальную функцию.

Тогда спектру (27) будет взаимно однозначно соответствовать последовательность фундаментальных функций (28), образующая нормированную ортогональную систему в интервале $[a, b]$. Эта последовательность (28) содержит все фундаментальные функции данного ядра и поэтому называется *полной системой* данного ядра, или данного интегрального уравнения.

Примечание. Число q линейно независимых фундаментальных функций, соответствующих одному и тому же фундаментальному числу λ симметрического ядра, равно кратности этого числа λ как корня уравнения Фредгольма $D(\lambda) = 0$ (см. стр. 139).

§ 6. Полюсы резольвенты. 1. Мы видели (§ 10, гл. II), что каждое фундаментальное число какого-либо ядра есть полюс резольвенты этого ядра. Этот полюс может быть простым или кратным. Сначала на примере покажем возможность кратности полюса резольвенты. Рассмотрим ядро $K(x, s) \equiv Ax + Bs$, где A и B — постоянные.

Выпишем из § 2 гл. II формулы Фредгольма (32) и (33):

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m,$$

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, x \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, s\end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m,$$

где положено

$$K\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(\alpha_1, \alpha_1) & K(\alpha_1, \alpha_2) & \ldots & K(\alpha_1, \alpha_m) \\ K(\alpha_2, \alpha_1) & K(\alpha_2, \alpha_2) & \ldots & K(\alpha_2, \alpha_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(\alpha_m, \alpha_1) & K(\alpha_m, \alpha_2) & \ldots & K(\alpha_m, \alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Вносяв эти формулы выражение $K(x, s) \equiv Ax + Bs$, мы видим, что все детерминанты, имеющие больше двух столбцов, будут нули, в чем непосредственно убеждаемся, вычитая элементы первых столбцов из соответствующих элементов других столбцов. Таким образом $D(\lambda)$ будет целой функцией второй степени относительно λ, а $D(x, s; \lambda)$ — первой степени

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(\alpha_1, \alpha_1)\,d\alpha_1 + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2\end{pmatrix} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix}\alpha_1, x \\ \alpha_1, s\end{pmatrix} d\alpha_1.$$

Если примем, например, $a=0$, $b=1$, то получим после элементарных вычислений

$$D(\lambda)=1-\frac{A+B}{2}\lambda-\frac{AB}{12}\lambda^2,$$

$$D(x,s;\lambda)=Ax+Bs-\lambda AB\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}s-xs-\frac{1}{3}\right).$$

Отсюда видно, что резольвента

$$R(x,s;\lambda)=\frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

имеет, вообще говоря, два различных полюса, которые приводятся к одному двойному полюсу при $B=-3A$, так как в этом случае ее знаменатель

$$D(\lambda)=1+A\lambda+\frac{A^2\lambda^2}{4}=\left(1+\frac{A}{2}\lambda\right)^2.$$

В рассмотренном примере ядро $K(x, s)$ не есть симметрическое.

2. Докажем, что *в случае симметрического ядра фундаментальное число является всегда простым полюсом резольвенты.*

С этой целью произведем вычисления, аналогичные выполненным в § 11 гл. II при доказательстве второй теоремы Фредгольма.

Для всех значений параметра λ, достаточно близких к фундаментальному числу λ', резольвента может быть представлена в виде

$$R(x,s;\lambda)=\frac{\varphi_r(x,s)}{(\lambda-\lambda')^r}+\frac{\varphi_{r-1}(x,s)}{(\lambda-\lambda')^{r-1}}+\ldots+\frac{\varphi_1(x,s)}{\lambda-\lambda'}+\varphi_0(x,s;\lambda),$$

где $\varphi_0(x, s; \lambda)$ есть голоморфная функция относительно λ вблизи значения $\lambda=\lambda'$, а $r\geqslant 1$.

С другой стороны, как и в § 11 гл. II, воспользуемся интегральным уравнением резольвенты, выведенным в § 5 гл. II:

$$R(x,s;\lambda)-K(x,s)=$$
$$=(\lambda-\lambda')\int_a^b K(x,t)R(t,s;\lambda)\,dt+\lambda'\int_a^b K(x,t)R(t,s;\lambda)\,dt.$$

Предполагая $r>1$, подставим сюда вместо $R(x, s; \lambda)$ ее вышенаписанное выражение и отождествим коэфициенты при $(\lambda-\lambda')^{-r+1}$ в левой и правой частях полученной формулы. Тогда найдем

$$\varphi_{r-1}(x,s)=\lambda'\int_a^b K(x,t)\varphi_{r-1}(t,s)\,dt+\int_a^b K(x,t)\varphi_r(t,s)\,dt.$$

Отождествляя же коэфициенты при $(\lambda-\lambda')^{-r}$, мы получим, как и в § 11 гл. II,

$$\varphi_r(x,s)=\lambda'\int_a^b K(x,t)\varphi_r(t,s)\,dt. \qquad (29)$$

Умножим первое из последних двух тождеств на $\varphi_r(x, s)$, а второе — на $\varphi_{r-1}(x, s)$, проинтегрируем их затем относительно x в пределах от a до b и, наконец, вычтем; в результате получим

$$0=\lambda'\int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi_r(t,s)\varphi_{r-1}(x,s)\,dx\,dt-$$
$$-\lambda'\int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi_{r-1}(t,s)\varphi_r(x,s)\,dx\,dt-$$
$$-\int_a^b\varphi_r(x,s)\left[\int_a^b K(x,t)\varphi_r(t,s)\,dt\right]dx.$$

Переставляя переменные интеграции x и t во втором двойном интеграле, мы не изменим величины этого интеграла; с другой стороны, он примет вид первого двойного интеграла, в котором $K(x, t)$ заменено через $K(t, x)$. Следовательно, вследствие симметрии ядра эти два интеграла равны, и от последней формулы остается следующая:

$$0=-\int_a^b\varphi_r(x,s)\left[\int_a^b K(x,t)\varphi_r(t,s)\,dt\right]dx.$$

Заменяя здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, согласно равенству (29) через $\frac{\varphi_r(x,s)}{\lambda'}$, перепишем последнюю формулу так:

$$\int_a^b[\varphi_r(x,s)]^2\,dx=0,$$

откуда следует

$$\varphi_r(x,s)\equiv 0.$$

Итак, предположив $r>1$, мы пришли к противоречию с начальным условием, что $\varphi_r(x, s)$ не есть тождественный нуль. Теорема доказана. Заметим, что отсюда ни в коем случае нельзя заключить, что знаменатель $D(\lambda)$ резольвенты

$$R(x,s;\lambda)=\frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

имеет только простые корни.

Напротив, порядок кратности q корня λ' знаменателя $D(\lambda)$ равен, как показал Гильберт, числу соответствующих ему линейно независимых фундаментальных функций. Таким образом фундаментальное число λ' будет простым корнем уравнения $D(\lambda)=0$ только в том случае, когда ему соответствует одна фундаментальная функция.

§ 7. Разложение ядра. 1. Пусть $K(x, s)$ — симметрическое ядро и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — спектр его фундаментальных чисел, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ — полная система фундаментальных функций этого ядра, которые, как известно, образуют нормированную ортогональную систему в интервале $[a, b]$. Задачей настоящего параграфа является выяснение вопроса о разложении ядра в ряд по фундаментальным функциям. Рассмотрим сначала частный случай, когда число фундаментальных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а следовательно, и фундаментальных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ конечно.

Рассматривая ядро $K(x, s)$ как функцию переменной s, вычислим его коэфициенты Фурье относительно фундаментальных функций. Имеем

$$A_k = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s)\,ds \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

С другой стороны, в силу определения фундаментальных функций, имеем

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s)\,ds,$$

или

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s)\,ds, \tag{30}$$

и, следовательно,

$$A_k = \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}.$$

Итак, мы видим, что ядру $K(x, s)$ соответствует ряд Фурье

$$K(x, s) \sim \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{31}$$

Пусть $\Phi(x, s)$ есть сумма ряда (31), т. е. положим

$$\Phi(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{32}$$

Обозначим через $Q(x, s)$ разность между ядром и суммой его ряда Фурье, т. е.

$$Q(x, s) = K(x, s) - \Phi(x, s).$$

Докажем теперь, что $Q(x, s) \equiv 0$, т. е. $K(x, s) \equiv \Phi(x, s)$.

Действительно, $Q(x, s)$ есть симметрическая функция относительно x и s как разность двух симметрических функций $K(x, s)$ и $\Phi(x, s)$; поэтому, если она не есть тождественный нуль, то, рассматривая ее в качестве ядра, мы должны признать, что для этого ядра существуют по крайней мере одно фундаментальное число μ и соответствующая этому числу фундаментальная функция $\psi(x)$, непрерывная в интервале (a, b) и не равная тождественно нулю.

Итак, имеем

$$\psi(x) = \mu \int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds. \tag{33}$$

Покажем теперь, что $\psi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(x)$. В самом деле,

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_k(x)\,dx = \mu \int_a^b\int_a^b Q(x, s)\psi(s)\varphi_k(x)\,dx\,ds,$$

откуда

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_k(x)\,dx = \mu \int_a^b \psi(s)\left[\int_a^b K(x, s)\varphi_k(x)\,dx - \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]ds,$$

так как

$$\int_a^b \Phi(x, s)\varphi_k(x)\,dx = \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k},$$

в силу ортогональности функций φ и их нормированности. Выражение, заключенное в квадратные скобки, есть нуль вследствие формулы (30) и симметрии ядра $K(x, s)$, а потому

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_k(x)\,dx = 0, \tag{34}$$

что и доказывает ортогональность функции $\psi(x)$ ко всем функциям $\varphi_k(x)$.

Далее,

$$\int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds = \int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}\right]\psi(s)\,ds,$$

откуда в силу соотношений (34) получим

$$\int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds = \int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds.$$

Умножая это равенство на μ и принимая во внимание (33), найдем

$$\psi(x) = \mu \int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds = \mu \int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds.$$

Следовательно, $\psi(x)$ будет решением однородного интегрального уравнения с ядром $K(x, s)$ и как таковое может быть линейно представлено с постоянными коэфициентами посредством фундаментальных функций ядра $K(x, s)$, отвечающих тому же фундаментальному числу μ, т. е.

$$\psi(x) = \alpha_1\varphi_{n_1}(x) + \alpha_2\varphi_{n_1+1}(x) + \ldots + \alpha_q\varphi_{n_1+q-1}(x).$$

Умножая последнее равенство на $\varphi_{n_1+p}(x)$ и интегрируя относительно x в пределах от a до b, получим на основании (34)

$$0 = \int_a^b \psi(x)\varphi_{n_1+p}(x)\,dx = \alpha_p \quad (p=1, 2, \ldots, q),$$

откуда следует $\psi(x) \equiv 0$, что противоречит нашему предположению.

Итак, предположив $Q(x, s)$ не равным тождественно нулю, мы пришли к противоречию, а потому $Q(x, s) \equiv 0$, и, следовательно,

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{35}$$

2. Из предыдущего мы видим, что всякое симметрическое ядро $K(x, s)$ с конечным спектром может быть представлено в виде

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\,\alpha_k(s).$$

В § 1 гл. II мы имели предложение, обратное только что сформулированному. Таким образом условие, необходимое и достаточное для того, чтобы симметрическое ядро $K(x, s)$ могло быть представлено в виде

$$K(x, s) = \alpha_1(x)\,\alpha_1(s) + \alpha_2(x)\,\alpha_2(s) + \ldots + \alpha_n(x)\,\alpha_n(s),$$

заключается в том, что число его фундаментальных значений конечно.

С другой стороны, очевидно, что ядра этого вида будут исключительными. Поэтому симметрическое ядро имеет, вообще говоря, бесконечное множество фундаментальных чисел.

Пусть теперь ядру $K(x, s)$ соответствует бесконечный спектр фундаментальных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, а потому и бесконечная ортогональная последовательность нормированных фундаментальных функций. Образуем соответствующий ядру $K(x, s)$ ряд Фурье, который в данном случае будет бесконечным

$$K(x, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{36}$$

Если мы предположим ряд (36) равномерно сходящимся, то мы можем его почленно интегрировать. Но тогда в отношении этого ряда целиком применимы все те рассуждения, которые мы только что привели в случае конечного ряда. Следовательно, при указанном условии

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{37}$$

В общем случае произвольного симметрического ядра его ряд Фурье (36) не будет сходящимся. Чтобы иметь возможность определить ядро, отправляясь от ряда (36), мы должны обобщить самое понятие сходимости ряда. Этот вопрос о представлении общего симметрического ядра посредством его ряда Фурье мы рассмотрим в следующей главе этой книги.

§ 8. Спектр итераций ядра. 1. Пусть $\varphi(x)$ есть фундаментальная функция, соответствующая фундаментальному числу λ' симметрического ядра $K(x, s)$, т. е.

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Внося под знак интеграла вместо $\varphi(s)$ выражение, определяемое этой формулой, получим

$$\varphi(x) = \lambda'^2 \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,\varphi(s)\,ds\,dt,$$

или

$$\varphi(x) = \lambda'^2 \int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

и вообще

$$\varphi(x) = \lambda'^p \int_a^b K_p(x, s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{38}$$

Таким образом, если λ' есть фундаментальное число ядра $K(x, s)$, то λ'^p будет фундаментальным числом его итерации порядка $p-1$, т. е. $K_p(x, s)$; фундаментальные функции ядра $K(x, s)$, соответствующие этому фундаментальному числу, будут фундаментальными функциями и ядра $K_p(x, s)$.

Обратно, если μ есть фундаментальное число ядра $K_p(x, s)$, то ядро $K(x, s)$ будет иметь фундаментальным числом по крайней мере один из корней p-й степени числа μ. В самом деле, обозначим через $h_1, h_2, \ldots, h_p$ корни уравнения $h^p = \mu$ и построим функции $\psi_\nu(x)$, определив их равенствами

$$p\psi_\nu(x) = \varphi(x) + h_\nu \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + h_\nu^2 \int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds + \ldots$$
$$\ldots + h_\nu^{p-1} \int_a^b K_{p-1}(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{39}$$

где $\varphi(x)$ есть фундаментальная функция ядра $K_p(x, s)$, соответствующая фундаментальному числу μ. Полагая последовательно в этом равенстве $\nu = 1, 2, \ldots, p$ и сложив затем найденные выражения, получим, приняв во внимание соотношения

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_p = 0,$$

$$h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2 = 0, \ \ldots, \ h_1^{p-1} + h_2^{p-1} + \ldots + h_p^{p-1} = 0,$$

следующее равенство:

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots + \psi_p(x) = \varphi(x). \tag{40}$$

Отсюда следует, что среди функций ψ_ν имеется по крайней мере одна, не равная тождественно нулю. С другой стороны, легко показать справедливость равенств

$$\psi_\nu(x) = h_\nu \int_a^b K(x, s)\,\psi_\nu(s)\,ds \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p). \tag{40'}$$

Действительно, имеем следующее тождество:

$$p\left[\psi_\nu(x) - h_\nu \int_a^b K(x, s)\,\psi_\nu(s)\,ds\right] = \varphi(x) - h_\nu^p \int_a^b K_p(x, s)\,\varphi(s)\,ds,$$

которое легко получить, если в левой части заменить $p\psi_\nu$ по формуле (39). Замечая, что $h_\nu^p = \mu$ есть фундаментальное число ядра $K_p(x, s)$

с фундаментальной функцией $\varphi(x)$, получаем из последнего тождества равенства (40'), так как

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b K_p(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0.$$

Равенства (40') доказывают наше утверждение, потому что среди функций $\psi_\nu(x)$ есть по крайней мере одна, не равная тождественно нулю. Таким образом мы доказали, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — фундаментальные числа ядра $K(x, s)$, то итерированное ядро $K_p(x, s)$ будет иметь фундаментальные числа

$$\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p, \ldots$$

и никаких других.

2. Из предыдущего мы видим, что все фундаментальные функции ядра $K(x, s)$ останутся фундаментальными же функциями для ядра $K_p(x, s)$. Остается открытым вопрос, не будет ли итерированное ядро $K_p(x, s)$ иметь другие фундаментальные функции, линейно независимые от уже известных. На этот вопрос можно ответить отрицательно, и тем самым будет доказано, что полная система фундаментальных функций ядра $K(x, s)$ останется полной системой и относительно любой его итерации. Действительно, возвращаясь к равенствам (40'), мы видим, что если h_ν — какой-либо мнимый корень уравнения $h^p = \mu$, то $\psi_\nu(x) \equiv 0$, так как симметрическое действительное ядро не может иметь мнимых фундаментальных чисел. Следовательно, нас могут интересовать те из корней h_ν, которые имеют действительные значения. Соответственно этому рассмотрим отдельно два случая: когда p нечетное и четное. В первом случае обозначим через $h_1 = \sqrt[p]{\mu}$ единственный действительный корень. Тогда h_1 будет фундаментальным числом ядра $K(x, s)$ с фундаментальной функцией $\psi_1(x)$. Легко видеть, что $\psi_1(x) = \varphi(x)$, так как $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_p$ — тождественные нули, а $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots \ldots + \psi_p(x) = \varphi(x)$. Итак, в этом случае фундаментальная функция $\varphi(x)$ ядра $K_p(x, s)$ есть вместе с тем фундаментальная функция ядра $K(x, s)$. В случае четного p число μ положительно, так как иначе все h_ν были бы мнимы, что невозможно. Следовательно, в этом случае мы будем иметь два действительных корня: $h_1 = +\sqrt[p]{\mu}$ и $h_2 = -\sqrt[p]{\mu}$ и две соответствующие им фундаментальные функции: $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ ядра $K(x, s)$. Из равенства (40) находим $\varphi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, потому что все остальные $\psi_\nu(x)$ тождественно равны нулю. В частности, одна из функций ψ_1 или ψ_2 может оказаться равной тождественно нулю, но обе одновременно не могут быть равны нулю; если $\psi_1(x) \equiv 0$, то $\varphi(x) \equiv \psi_2(x)$; если $\psi_2(x) \equiv 0$, то $\varphi(x) \equiv \psi_1(x)$. Вообще же говоря,

$$\varphi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x).$$

Итак, при четном p каждая фундаментальная функция ядра $K_p(x, s)$ будет либо фундаментальной же функцией первоначального ядра $K(x, s)$, либо суммой двух его фундаментальных функций. Будучи фундаментальными для ядра $K(x, s)$, функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ останутся фундаментальными и для ядра $K_p(x, s)$, с фундаментальным числом μ. Поэтому

$\varphi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ не представляет новой фундаментальной функции. Итак, мы доказали, что совокупность всех фундаментальных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ядра $K(x, s)$, соответствующая спектру фундаментальных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, будет полной системой также и для каждого итерированного ядра $K_p(x, s)$ с соответствующим ей спектром фундаментальных чисел $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots$

§ 9. Разложение итераций ядра. 1. Применяя результат § 7 о разложении ядра $K(x, s)$ и пользуясь заключением предыдущего параграфа, мы видим, что если ряд

$$\frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(s)}{\lambda_1^p} + \frac{\varphi_2(x)\,\varphi_2(s)}{\lambda_2^p} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(s)}{\lambda_n^p} + \ldots \tag{41}$$

равномерно сходится, то он изображает $K_p(x, s)$. В этом параграфе мы покажем, что ряд (41) абсолютно и равномерно сходится для $p \geqslant 3$.

2. Это заключение остается верным и для $p = 2$, что мы обнаружим иным методом впоследствии. Рассматриваемый здесь вопрос требует своего разрешения, очевидно, только в случае, когда множество фундаментальных чисел бесконечно. Но в этом случае их абсолютные величины неограниченно возрастают вместе с n, так как λ_n являются нулями целой функции Фредгольма $D(\lambda)$. Следовательно, возможно найти число m такое, что при $n > m$ будет $|\lambda_n| > 1$. Тогда для $n > m$ и $p \geqslant 3$ будем иметь

$$\sum_{i=n}^{n+N} \left| \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i^p} \right| \leqslant \frac{1}{2\,|\lambda_n|} \sum_{i=n}^{n+N} \frac{\varphi_i^2(x) + \varphi_i^2(s)}{\lambda_i^2}, \tag{42}$$

воспользовавшись неравенством $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ и условием, что последовательность $|\lambda_i|$ есть неубывающая.

Заметив, что $\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}$ являются коэфициентами Фурье относительно s функции $K(x, s)$, и применяя неравенство Бесселя (введение, § 13), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leqslant \int_a^b [K(x, s)]^2\, ds \leqslant L, \tag{42'}$$

где L — положительное постоянное.

Неравенство (42') позволяет представить (42) в виде

$$\sum_{i=n}^{n+N} \left| \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i^p} \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda_n|} L \quad \text{при} \quad p \geqslant 3, \quad n > m.$$

При неограниченном возрастании n правая часть последнего неравенства стремится к нулю вместе с $\frac{1}{|\lambda_n|}$. Вследствие критерия Коши о сходимости рядов ряд (41) будет абсолютно и равномерно сходящимся. Итак, при $p \geqslant 3$ имеем

$$K_p(x, s) = \frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(s)}{\lambda_1^p} + \frac{\varphi_2(x)\,\varphi_2(s)}{\lambda_2^p} + \ldots, \tag{43}$$

где ряд, стоящий в правой части, абсолютно и равномерно сходится.

3. Заметим, что ряд

$$\frac{1}{\lambda_1^p}+\frac{1}{\lambda_2^p}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n^p}+\ldots \tag{43'}$$

абсолютно сходится при каждом значении p, $p \geqslant 2$. Очевидно, достаточно это доказать для $p=2$. С этой целью воспользуемся неравенством (42′), из которого находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}\leqslant\int_a^b [K(x, s)]^2\,ds,$$

каково бы ни было n; отсюда, интегрируя относительно x в пределах от a до b и вспомнив, что функции $\varphi_i(x)$ нормированы, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b [K(x, s)]^2\,dx\,ds.$$

Так как это неравенство имеет место при любом n, то ряд (43′) абсолютно сходится и, кроме того, при $p=2$ его сумма не больше значения интеграла

$$\int_a^b\int_a^b [K(x, s)]^2\,dx\,ds.$$

§ 10. Замкнутое ядро. 1. Нормированная ортогональная система непрерывных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется *замкнутой*, если не существует никакой непрерывной функции, кроме тождественного нуля, которая была бы ортогональной ко всем функциям данной системы. В противном случае система называется *незамкнутой* или *открытой*.

Иными словами, открытая нормированная ортогональная система функций характеризуется наличием по крайней мере одной непрерывной функции $\omega(x)$, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{44}$$

Таким образом открытую нормированную ортогональную систему функций всегда возможно дополнить, присоединяя непрерывную функцию $\omega(x)$, ортогональную ко всем функциям данной системы; нормируя функцию $\omega(x)$, — что всегда возможно сделать, так как эта функция определяется с точностью до постоянного множителя, — мы получим расширенную нормированную ортогональную систему функций. Наоборот, замкнутая нормированная ортогональная система функций характеризуется отсутствием такой непрерывной функции $\omega(x)$, которая была бы ортогональна ко всем функциям этой системы. Это значит, что в случае замкнутой нормированной ортогональной системы из равенств (44) необходимо должно следовать $\omega(x)\equiv 0$. Таким образом замкнутую нормированную ортогональную систему функций нельзя расширить путем присоединения к ней новых элементов.

Очевидно, в теории разложения функций в ряды Фурье особо важное значение имеют замкнутые нормированные ортогональные системы. В этой теории, естественно, возникает фундаментальный вопрос, будет ли функция однозначно определена посредством своего ряда Фурье, т. е. будут ли двум различным функциям соответствовать всегда разные ряды Фурье. На этот вопрос получается утвердительный ответ, если данная нормированная ортогональная система функций будет замкнутой, и отрицательный, если система незамкнутая. В самом деле, предположив, что функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствует один и тот же ряд Фурье, мы видим, что у их разности $f_1(x)-f_2(x)=\omega(x)$ все коэфициенты Фурье будут равны нулю, т. е. $\omega(x)$ будет ортогональной ко всем функциям данной нормированной ортогональной системы. Отсюда следует, что если данная нормированная ортогональная система функций есть замкнутая, то необходимо $\omega(x)\equiv 0$ и, значит, $f_1(x)\equiv f_2(x)$; наоборот, если данная система открытая, то $\omega(x)$ может быть не равной тождественно нулю; выбирая за $\omega(x)$ функцию, ортогональную ко всем функциям данной системы, мы видим, что $f_2(x)$ и $f_1(x)=f_2(x)+C\omega(x)$, где C — произвольное постоянное число, имеют один и тот же ряд Фурье.

Выяснив исключительную роль замкнутых нормированных ортогональных систем, естественно спросить себя, при каких условиях симметрическое ядро имеет в качестве своей полной совокупности фундаментальных функций замкнутую нормированную ортогональную систему функций.

2. Условимся симметрическое ядро $K(x, s)$ называть *замкнутым*, если не существует никакой непрерывной функции $\omega(s)$, кроме тождественного нуля, удовлетворяющей тождеству

$$\int_a^b K(x, s)\,\omega(s)\,ds=0.$$

Докажем теперь, что полная система фундаментальных функций замкнутого симметрического ядра представляет замкнутую нормированную ортогональную систему функций, и, обратно, ядро будет замкнутым, если его полная фундаментальная система есть замкнутая система нормированных ортогональных функций. Это предложение вытекает из следующей теоремы.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы непрерывная функция $\omega(x)$ удовлетворяла тождеству

$$\int_a^b K(x, s)\,\omega(s)\,ds=0, \tag{45}$$

состоит в том, что для любого i должно иметь место равенство

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx=0, \tag{46}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ — *полная система фундаментальных функций симметрического ядра* $K(x, s)$.

В самом деле, предположив тождество (45) выполненным, имеем

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx = \lambda_i \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s)\,\varphi_i(s)\,ds\right]\omega(x)\,dx =$$

$$= \lambda_i \int_a^b \varphi_i(s)\left[\int_a^b K(x, s)\,\omega(x)\,dx\right]ds = 0,$$

каково бы ни было i. Здесь мы воспользовались определением фундаментальных функций $\varphi_i(x)$, т. е. равенствами

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, s)\,\varphi_i(s)\,ds,$$

и симметрией данного ядра. Обратно, будем отправляться от соотношений (46). Так как ряд (43) равномерно сходится при $p = 4$ (и его сумма равна $K_4(x, s)$), то его можно почленно интегрировать, умножив предварительно на $\omega(x)\,\omega(s)$. Таким образом получаем

$$\int_a^b\int_a^b K_4(x, s)\,\omega(x)\,\omega(s)\,dx\,ds = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^4}\int_a^b \varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx \int_a^b \varphi_i(s)\,\omega(s)\,ds = 0.$$

Заменяя здесь $K_4(x, s)$ его выражением $\int_a^b K_2(x, t)\,K_2(t, s)\,dt$, найдем

$$0 = \int_a^b\int_a^b\left[\int_a^b K_2(x, t)\,K_2(t, s)\,dt\right]\omega(x)\,\omega(s)\,dx\,ds =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b K_2(x, t)\,\omega(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_a^b K_2(t, s)\,\omega(s)\,ds\right]dt =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b K_2(x, t)\,\omega(x)\,dx\right]^2 dt.$$

Для того чтобы интеграл от квадрата выражения, заключенного в скобку, был равен нулю, нужно чтобы само выражение, возводимое в квадрат, было равно тождественно нулю, т. е.

$$\int_a^b K_2(x, t)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Умножая на $\omega(t)$ и интегрируя относительно t в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b\int_a^b K_2(x, t)\,\omega(x)\,\omega(t)\,dx\,dt = 0.$$

Заменяя здесь $K_2(x, t)$ его выражением $\int_a^b K(x, s)\,K(s, t)\,ds$, найдем

$$0 = \int_a^b\int_a^b\left[\int_a^b K(x, s)\,K(s, t)\,ds\right]\omega(x)\,\omega(t)\,dx\,dt,$$

или

$$0 = \int_a^b\left[\int_a^b K(x, s)\,\omega(x)\,dx\right]\left[\int_a^b K(s, t)\,\omega(t)\,dt\right]ds =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b K(x, s)\,\omega(x)\,dx\right]^2 ds;$$

отсюда следует, что

$$\int_a^b K(x, s)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Последнее тождество, вследствие симметрии ядра, равносильно тождеству (45).

3. Замкнутое ядро, очевидно, имеет всегда бесконечное множество различных фундаментальных чисел. Действительно, в противном случае существовало бы лишь конечное число фундаментальных функций, которые должны образовывать замкнутую нормированную ортогональную систему. Но, с другой стороны, возможно всегда построить функцию, ортогональную к конечному числу данных функций. В самом деле, пусть $\omega(x)$ — произвольная непрерывная функция, линейно независимая от данных функций. Введем обозначения

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\omega(x)\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

в силу предположения относительно $\omega(x)$, по крайней мере одно c_i не равно нулю. Положим

$$F(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) - \omega(x).$$

Очевидно, имеем

$$\int_a^b F(x)\,\varphi_i(x)\,dx = c_i - \int_a^b \omega(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0,$$

каково бы ни было $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. функция $F(x)$ ортогональна ко всем данным функциям $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и не равна тождественно нулю, потому что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \omega$ линейно независимы.

§ 11. Теорема Гильберта — Шмидта. 1. Известно, что функция $f(x)$, представимая в виде

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds, \tag{47}$$

есть непрерывная функция, если ядро $K(x, s)$ регулярно и $h(s)$ — интегрируемая вместе со своим квадратом функция. Такую функцию $f(x)$ будем называть *представимой посредством ядра* $K(x, s)$.

Докажем, что *всякая функция, представимая посредством ядра, т. е. функция вида* (47), *разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям этого ядра.*

В этом заключается предложение, известное под названием *теоремы Гильберта — Шмидта.*

Приступая к ее доказательству, образуем ряд Фурье функции $f(x)$ относительно нормированной ортогональной системы фундаментальных функций ядра $K(x, s)$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \int_a^b f(s) \varphi_i(s)\, ds. \tag{48}$$

Выражение общего члена этого ряда может быть преобразовано, если воспользоваться формулой (47). В самом деле, имеем

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s) h(s)\, ds \right] \varphi_i(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s) \varphi_i(x)\, dx \right] h(s)\, ds.$$

Заметив, что

$$\int_a^b K(x, s) \varphi_i(x)\, dx = \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i},$$

находим

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b h(s) \varphi_i(s)\, ds.$$

Вследствие этого ряд (48) может быть представлен так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_a^b h(s) \varphi_i(s)\, ds \tag{48'}$$

или

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s)\, ds \cdot \int_a^b h(s) \varphi_i(s)\, ds. \tag{49}$$

Докажем, во-первых, что ряд (49) сходится абсолютно и равномерно, и, во-вторых, что его сумма совпадает с $f(x)$. Положим

$$\int_a^b h(s) \varphi_i(s)\, ds = h_i,$$

$$\int_a^b K(x, s) \varphi_i(s)\, ds = \alpha_i(x)$$

и заметим, что h_i и $\alpha_i(x)$ являются коэфициентами Фурье функций $h(s)$ и $K(x, s)$. Ряд (49) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i \alpha_i(x). \tag{49'}$$

Очевидно, применяя неравенство Шварца для сумм, имеем

$$I^2 = \left(\sum_{i=n}^{n+p} |h_i \alpha_i(x)| \right)^2 \leqslant \sum_{i=n}^{n+p} h_i^2 \cdot \sum_{i=n}^{n+p} [\alpha_i(x)]^2.$$

Применяя к последней сумме неравенство Бесселя (введение, § 13). найдем

$$I^2 \leqslant \sum_{i=n}^{n+p} h_i^2 \cdot \int_a^b [K(x, s)]^2\, ds.$$

Так как функция $K(x, s)$ ограничена по абсолютному значению, то интеграл в последнем неравенстве можно считать меньшим некоторого положительного числа M, каково бы ни было x. Итак, мы получили

$$\sum_{i=n}^{n+p} |h_i \alpha_i(x)| = I \leqslant \sqrt{M \sum_{i=n}^{n+p} h_i^2}.$$

Так как числовой ряд $\sum h_i^2$, в силу неравенства Бесселя, сходится, то правая часть последнего неравенства (а, значит, и левая) может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа ε, если n достаточно велико, а p любое. А это заключение вследствие признака Коши обнаруживает абсолютную и равномерную сходимость ряда (48).

2. Переходя теперь ко второй части доказательства теоремы Гильберта — Шмидта, мы введем в рассмотрение непрерывную функцию

$$\omega(x) \equiv f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \int_a^b f(s) \varphi_i(s)\, ds,$$

представляющую разность между данной функцией $f(x)$ и суммой ее ряда Фурье, равномерная сходимость которого была только что доказана. Мы покажем, что $\omega(x) \equiv 0$, откуда и получится полное решение нашей задачи. Прежде всего обнаружим, что $\omega(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_i(x)$. В самом деле, каково бы ни было n, имеем

$$\int_a^b \omega(x) \varphi_n(x)\, dx = \int_a^b f(x) \varphi_n(x)\, dx - \int_a^b f(s) \varphi_n(s)\, ds \cdot \int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = 0,$$

потому что функции φ_i образуют нормированную ортогональную систему. Вследствие предложения, доказанного в предыдущем параграфе, функция

ω должна удовлетворять тождеству

$$\int_a^b K(x, s)\,\omega(s)\,ds = 0. \tag{50}$$

С другой стороны, имеем

$$\int_a^b \omega^2(x)\,dx = \int_a^b \omega(x) f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \omega(x)\varphi_i(x)\,dx \int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds.$$

Второй член правой части есть нуль, так как $\omega(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_i(x)$; что касается первого члена, то вследствие формулы (47) он равен выражению

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds\right]\omega(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s)\,\omega(x)\,dx\right] h(s)\,ds,$$

что равно нулю вследствие равенства (50) и симметрии ядра.

Итак, $\int_a^b \omega^2(x)\,dx = 0$, откуда $\omega(x) \equiv 0$.

Таким образом всякая функция вида

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds$$

может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд фундаментальных функций, т. е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds \cdot \varphi_i(x), \tag{51}$$

или

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b h(s)\varphi_i(s)\,ds}{\lambda_i} \cdot \varphi_i(x). \tag{52}$$

3. Внося в (52) вместо $f(x)$ ее выражение (47), умножая на произвольную интегрируемую вместе со своим квадратом функцию $\bar{h}(x)$ и затем интегрируя относительно x в пределах от a до b, получим следующую замечательную формулу Гильберта:

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,\bar{h}(x)\,dx\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b h(s)\varphi_i(s)\,ds \cdot \int_a^b \bar{h}(x)\varphi_i(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s)\,h(x)\,\bar{h}(s)\,dx\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i \cdot \bar{h}_i}{\lambda_i}, \tag{53}$$

где h_i и $\bar{h}_i$ суть коэфициенты Фурье функций $h(x)$ и $\bar{h}(x)$ относительно нормированной ортогональной системы фундаментальных функций. В формуле (53) $h(x)$ и $\bar{h}(x)$ — две произвольные интегрируемые вместе с их квадратами функции.

§ 12. Разложение первой итерации ядра. 1. В § 9 настоящей главы было показано, что каждое итерированное ядро $K_p(x, s)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям, причем доказательство было проведено в предположении $p \geqslant 3$. Случай $p = 2$ остался нерассмотренным. Применяя теорему Гильберта — Шмидта, мы обнаружим, что первая итерация $K_2(x, s)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд фундаментальных функций.

Действительно, $K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt$ есть функция относительно x, представимая посредством ядра $K(x, t)$, и следовательно, по теореме Гильберта — Шмидта может быть разложена в абсолютно и равномерно относительно x сходящийся ряд фундаментальных функций. Применяя формулу (52), получим

$$K_2(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b K(t, s)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i} \varphi_i(x),$$

откуда, так как

$$\int_a^b K(t, s)\varphi_i(t)\,dt = \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i},$$

получим

$$K_2(x, s) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1^2} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(s)}{\lambda_2^2} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n^2} + \ldots \tag{54}$$

2. Полученный ряд (54) сходится равномерно относительно x, а вследствие симметрии — и относительно s. Можно доказать, что его сходимость будет равномерной также относительно совокупности переменных x, s. С этой целью, заметив, что

$$|\varphi_n(x)\varphi_n(s)| \leqslant \frac{1}{2}[\varphi_n^2(x) + \varphi_n^2(s)],$$

мы сводим вопрос к доказательству равномерной сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}.$$

Этот ряд сходится к непрерывной функции $K_2(x, x)$ и состоит из непрерывных положительных слагаемых. Легко видеть, что всякий ряд $\sum u_i(x)$, члены которого — непрерывные и положительные функции, сходящийся к непрерывной функции, необходимо должен сходиться равномерно (теорема Дини).

В самом деле, остаточные члены такого ряда $r_n(x)$ представляют последовательность непрерывных функций, которая при всяком x, монотонно убывая, стремится к нулю. Обозначим через μ_n максимум $r_n(x)$ в рассматриваемом интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Очевидно, числа $\mu_n = r_n(x_n)$ не возрастают и стремятся к нулю. Действительно,

$$\mu_{n+1} = r_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant r_n(x_{n+1}) \leqslant \mu_n,$$

т. е. $\mu_n \geqslant \mu_{n+1}$ при всяком n. С другой стороны, $\mu_n \to 0$, так как в противном случае все μ_n были бы больше некоторого положительного числа α. Обозначая через x_0 предельную точку множества точек x_n, мы имели бы при некотором достаточно большом n $r_n(x_0) < \frac{\alpha}{2}$, а значит, и $r_n(x_N) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ для некоторого достаточно большого N вследствие непрерывности функции $r_n(x)$. В таком случае $r_N(x_N) \leqslant r_n(x_N) \leqslant \leqslant \frac{\alpha}{2}$, т. е. $\mu_N \leqslant \frac{\alpha}{2}$, что противоречит гипотезе, что

$$\mu_n > \alpha \text{ при всяком } n.$$

Доказанная сходимость к нулю максимума остаточного члена равносильна утверждению о равномерной сходимости рассматриваемого ряда.

§ 13. Разложение решения уравнения Фредгольма по фундаментальным функциям. Третья теорема Фредгольма. 1. Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds \tag{55}$$

с симметрическим ядром $K(x, s)$. Согласно теоремам Фредгольма уравнение (55) имеет единственное решение, если λ не есть фундаментальное число ядра $K(x, s)$. Это решение вследствие (55) можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

где положено

$$g(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds.$$

На основании теоремы Гильберта — Шмидта (§ 11 этой главы) функцию $g(x)$ можем разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд фундаментальных функций

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),$$

и, следовательно, имеем

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x).$$

Остается только определить c_i. Для этого в данное интегральное уравнение (55) внесем найденный равномерно сходящийся ряд; тогда получим

$$f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda^2 c_i \int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\,ds\right].$$

Заменяя здесь $\int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\,ds$ через $\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\varphi_i(x) = \int_a^b K(x, s) f(s)\,ds. \tag{56}$$

Применяя вторично теорему Гильберта — Шмидта к функции $\int_a^b K(x, s) f(s)\,ds$, найдем

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds}{\lambda_i} \varphi_i(x),$$

после чего равенство (56) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(c_i \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i} - \frac{f_i}{\lambda_i}\right)\varphi_i(x) \equiv 0, \tag{57}$$

где $f_i = \int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds$ служат коэфициентами Фурье функции $f(s)$.

Так как последний ряд сходится равномерно к нулю и функции $\varphi_i(x)$ образуют нормированную ортогональную систему, то все коэфициенты ряда должны быть нулями. Таким образом имеем

$$c_i \frac{\lambda_i - \lambda}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i} f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

так как λ не есть фундаментальное число, то получаем

$$c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}.$$

Итак, искомое решение уравнения Фредгольма (55) можно представить в виде равномерно сходящегося ряда фундаментальных функций

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda - \lambda_i} \varphi_i(x). \tag{58}$$

В формуле (58) λ есть любое значение параметра, не равное фундаментальному числу, f_i обозначают коэфициенты Фурье функции $f(x)$. Выражение (58) для решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения (55) имеет преимущество перед формулой Фредгольма в том отношении, что здесь явно выделены все полюсы относительно λ с соответствующими им главными частями. В частности, мы видим, что все полюсы будут простыми, что согласуется с результатом § 6.

2. Заметим, что соотношение (57) мы получили, предполагая, что данное интегральное уравнение имеет непрерывное решение. Пусть λ равно фундаментальному числу λ', которому соответствует конечное число фундаментальных функций $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$, ..., $\varphi_{n+q}(x)$; тогда $\lambda' = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_{n+q}$. Тождество (57), вообще говоря, не будет иметь места, так как коэфициенты при $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_{n+q}$ сводятся к независящим от c_i величинам

$$-\frac{f_i}{\lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds \quad (i = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+q), \tag{59}$$

которые в общем случае не равны нулю. Отсюда следует, что необходимое условие для разрешимости неоднородного уравнения (55) в случае, когда λ равно фундаментальному числу λ', заключается в равенстве нулю всех выражений (59), т. е. в выполнении равенств

$$\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds = 0 \quad (i = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+q). \tag{60}$$

Предполагая равенства (60) выполненными, мы видим, что возможно выбрать $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n+q}$ произвольными постоянными, другие же c_i определить как прежде, так что будем иметь решение

$$\varphi(x) = f(x) + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + \ldots + c_{n+q}\varphi_{n+q}(x) - \\ -\left(\sum_{i=1}^{n} + \sum_{i=n+q+1}^{\infty}\right)\left[\frac{\lambda' f_i}{\lambda' - \lambda_i}\varphi_i(x)\right]. \tag{61}$$

Иными словами, равенства (60) представляют также достаточные условия для разрешимости неоднородного интегрального уравнения в случае, когда λ равно фундаментальному числу λ', причем в этом случае мы получаем бесконечное множество решений с q произвольными постоянными, определяемое формулой (61). Итак, условия, необходимые и достаточные для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (55) с симметрическим ядром при λ, равном фундаментальному числу λ', заключаются в ортогональности данной функции $f(x)$ ко всем фундаментальным функциям, соответствующим этому числу λ'. В этом заключается полное выражение так называемой третьей теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с симметрическим ядром (ср. § 14, гл. II). При выполнении этих условий (60) решения определяются формулой (61), где c_i представляют собой q произвольных постоянных.

§ 14. Разложение резольвенты по фундаментальным функциям. 1. Мы показали ранее (§ 3, гл. I), что резольвента интегрального уравнения Фредгольма может быть разложена в ряд по степеням λ

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \ldots \tag{62}$$

Это разложение (62) будет абсолютно и равномерно сходящимся при значениях λ, достаточно малых по модулю. Заменяя в этом ряде итерированные ядра $K_2(x, s)$, $K_3(x, s)$, ... их рядами по фундаментальным функциям, — рядами, которые сходятся абсолютно и равномерно (§§ 9 и 12), — мы получим

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n^2} + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n^3} + \ldots \tag{63}$$

Группируя члены с одинаковыми индексами n, что законно вследствие легко проверяемой сходимости ряда из модулей членов всех рядов (при достаточно малом λ), находим

$$R(x, s; \lambda) = \\ = K(x, s) + \varphi_1(x)\varphi_1(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\lambda_1^{k+1}} + \varphi_2(x)\varphi_2(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\lambda_2^{k+1}} + \ldots \tag{64}$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\lambda_n^{k+1}} = \frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

перепишем выражение (64) в виде

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}. \tag{65}$$

Ряд (65), как легко видеть, сходится абсолютно и равномерно при каждом значении параметра λ, не равном никакому фундаментальному числу. В самом деле, сравним наш ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}$ с рядом для

$K_2(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n^2}$, абсолютная и равномерная сходимость которого была доказана (§ 12 этой главы). Отношение общих членов этих рядов

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

не зависит от x и s и стремится к единице, когда n неограниченно возрастает. Отсюда следует эквивалентность этих рядов в отношении их абсолютной и равномерной сходимости. Таким образом ряд (65) определяет $R(x, s; \lambda)$ как мероморфную функцию параметра λ во всей плоскости, за исключением простых полюсов $\lambda = \lambda_n$. С другой стороны, вследствие самого способа получения этого ряда (65) функция $R(x, s; \lambda)$ совпадает с резольвентой (62) при значениях λ, достаточно малых по модулю. Отсюда по теореме единственности аналитических функций мероморфная функция (65) должна быть тождественной с резольвентой Фредгольма, определяемой начальным элементом (62).

Полученное разложение (65) для резольвенты дает, таким образом, аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного параметра λ ее выражения (62), справедливого лишь в окрестности нулевой точки. Оно имеет преимущество перед общей формулой Фредгольма в том отношении, что в нем выделены все полюсы резольвенты с соответствующими им главными частями. В частности, формула (65) показывает, что все полюсы резольвенты будут простыми, что согласуется с результатом § 6 настоящей главы.

2. Если внести выражение (65) резольвенты в формулу Фредгольма

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds, \tag{66}$$

то мы должны получить разложение решения интегрального уравнения по фундаментальным функциям, выведенное независимо в предыдущем параграфе. В самом деле, внося выражение (65) в формулу (66) и выполняя элементарные преобразования, находим

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds+\lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}\varphi_n(x).$$

Выражая $\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds$ по теореме Гильберта — Шмидта (§ 11 настоящей главы), получим

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

после чего формула для $\varphi(x)$ примет вид

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)+\lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}\varphi_n(x),$$

или

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x),$$

что совпадает с формулой (58) из § 13 этой главы.

Примечание. Положим в формуле (65) $x=s$ и проинтегрируем в пределах от a до b; тогда получим

$$\int_a^b R(s, s; \lambda)\, ds=\int_a^b K(s, s)\, ds+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}.$$

Но, согласно формуле (60′) § 10 гл. II,

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b R(s, s; \lambda)\, ds,$$

где $D(\lambda)$ — определитель Фредгольма для ядра $K(x, s)$. Поэтому

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b K(s, s)\, ds+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}.$$

Вычисляя вычеты функции $\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ относительно полюсов λ_n, заключаем.

Каждое фундаментальное число λ' является корнем уравнения Фредгольма $D(\lambda)=0$ кратности q, где q — число линейно независимых фундаментальных функций, соответствующих фундаментальному числу λ'.

§ 15. Классификация симметрических ядер. 1. В конце § 11 этой главы была выведена формула (53) Гильберта следующего вида:

$$\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, h(x)\, \bar{h}(s)\, dx\, ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n\bar{h}_n}{\lambda_n}, \tag{67}$$

где h_n и $\bar{h}_n$ — коэфициенты Фурье произвольных интегрируемых вместе с их квадратами функций $h(x)$ и $\bar{h}(x)$. В частном случае, когда $h(x)=\bar{h}(x)$, эта формула (67) примет более простой вид

$$I=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, h(x)\, h(s)\, dx\, ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{\lambda_n}. \tag{68}$$

Формулу (68), в которой под $h(x)$ будем понимать произвольную непрерывную функцию, положим в основу классификации симметрических ядер. Из этой формулы мы сразу усматриваем, что если все фундаментальные числа λ_n положительные, то I не может быть отрицательным, т. е. $I\geqslant 0$, какова бы ни была непрерывная функция $h(x)$. Но и обратно, если $I\geqslant 0$ при любой непрерывной функции $h(x)$, то все λ_n положительны. В самом деле, приняв $h(x)=\varphi_m(x)$, получим

$$I=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, \varphi_m(x)\, \varphi_m(s)\, dx\, ds=\int_a^b\frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m}\, dx=\frac{1}{\lambda_m}>0.$$

Такие ядра $K(x, s)$ с положительными фундаментальными числами назовем *положительными ядрами*. Положительное ядро характеризуется условием $I\geqslant 0$ для любой непрерывной функции $h(x)$. Аналогично можно определить отрицательное ядро.

2. Особый интерес представляют те ядра $K(x, s)$, для которых $I>0$ при всякой непрерывной функции $h(x)$, не равной тождественно нулю; такие ядра будем называть *существенно положительными*. Аналогично определяется существенно отрицательное ядро. Докажем, что существенно положительное ядро необходимо есть замкнутое. Действительно, если бы ядро $K(x, s)$ было не замкнутым, то существовала бы непрерывная функция $h(x)$, не равная тождественно нулю, которая была бы ортогональной ко всем фундаментальным функциям этого ядра, потому что в этом случае фундаментальные функции образуют открытую нормированную ортогональную систему. Подставляя эту функцию $h(x)$ в формулу (68) и замечая, что все $h_n=0$, получим $I=0$, что невозможно.

Обратно, замкнутое положительное ядро необходимо должно быть существенно положительным. В самом деле, в противном случае существовала бы непрерывная функция $h(x)$, не равная тождественно нулю, для которой $I=0$. Так как все λ_n положительны, то из формулы (68) вытекает, что для такой функции $h(x)$ должны быть равны нулю все ее коэфициенты Фурье h_n, что невозможно вследствие замкнутости системы фундаментальных функций.

§ 16. Ядро вида $K(x, s)\,p(s)$. Легко показать, что всякое ядро вида $K(x, s)\,p(s)$, где $K(x, s)$ есть регулярная симметрическая функция, а $p(s)$ — непрерывная неотрицательная, приводится к случаю симметрического ядра. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\,p(s)\,\varphi(s)\,ds=f(x).$$

Умножим обе части этого уравнения на выражение $+\sqrt{p(x)}$, которое представляет однозначную и действительную функцию. Тогда получим

$$\varphi(x)\sqrt{p(x)}-\lambda\int_a^b K(x, s)\sqrt{p(x)\,p(s)}\cdot\varphi(s)\sqrt{p(s)}\,ds=f(x)\sqrt{p(x)}.$$

Принимая за неизвестную функцию $\Phi(x)=\varphi(x)\sqrt{p(x)}$, получаем уравнение с симметрическим ядром $K(x, s)\sqrt{p(x)\,p(s)}$. Это обобщение результатов теории симметрических ядер на ядра вида $K(x,s)\,p(s)$ имеет важное значение для приложений, так как ядра рассматриваемого здесь вида часто встречаются.

§ 17. Теорема Мерсера. 1. В § 7 этой главы мы показали, что имеет место разложение

$$K(x, s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(s)}{\lambda_n}, \tag{69}$$

если ряд, стоящий в правой части, сходится равномерно относительно переменных x, s. Естественно возникает обратный вопрос: при каких условиях регулярное ядро может быть представлено равномерно сходящимся рядом фундаментальных функций? В силу самой постановки задачи мы должны считать ядро $K(x, s)$ непрерывной функцией относительно совокупности аргументов x, s. Однако далеко не всякое непрерывное симметрическое ядро представляется равномерно сходящимся рядом фундаментальных функций. Таким образом необходимо ввести дополнительное ограничение на непрерывное симметрическое ядро, которое гарантировало бы равномерную сходимость относительно совокупности переменных x, s ряда фундаментальных функций, соответствующего этому ядру. Таким ограничением может служить предположение, что все фундаментальные числа ядра положительны. Другими словами, докажем теорему Мерсера.

Всякое симметрическое непрерывное ядро $K(x, s)$ с положительными фундаментальными числами разлагается по фундаментальным функциям в ряд, абсолютно и равномерно сходящийся относительно совокупности переменных x, s.

2. Из § 15 этой главы мы знаем, что симметрическое ядро с положительными фундаментальными числами называется положительным и характеризуется условием

$$I=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,h(x)\,h(s)\,dx\,ds\geqslant 0,$$

какова бы ни была непрерывная функция $h(x)$.

Теорема Мерсера может быть формулирована так.

Всякое симметрическое непрерывное положительное ядро $K(x, s)$ может быть представлено в виде ряда (69), который абсолютно и равномерно сходится относительно совокупности переменных x, s.

Приступая к доказательству этого предложения, прежде всего установим, что $K(x, x)\geqslant 0$, т. е. ядро, удовлетворяющее указанным выше условиям, не может на диагонали $x=s$ принимать отрицательных значений. В этом можно убедиться способом от противного. Допустим, что в какой-либо точке (x_0, x_0) диагонали $K(x, s)$ отрицательно. Тогда в силу непрерывности ядро будет отрицательным также в окрестности D_ε этой точки $x_0-\varepsilon<(x, s)<x_0+\varepsilon$. Определим непрерывную функцию $h(x)$ следующим образом: $h(x)$ положительна при $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ и равна нулю при остальных значениях x. Тогда интеграл I приведется к виду

$$I=\iint_{D_\varepsilon} K(x, s)\,h(x)\,h(s)\,dx\,ds$$

и будет отрицательным. Мы пришли к противоречию с гипотезой положительности ядра, что и доказывает высказанное положение.

Рассмотрим теперь разность

$$K(x, s)-\sum_{n=1}^{p}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(s)}{\lambda_n}. \tag{70}$$

Выражение (70) представляет симметрическую непрерывную функцию, которая, будучи рассматриваема как ядро, имеет лишь положительные фундаментальные числа, а потому для нее по доказанному имеем

$$K(x, x)-\sum_{n=1}^{p}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}\geqslant 0. \tag{71}$$

Неравенство (71) справедливо при всяком p, а, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}$, все члены которого положительны, будет сходящимся для любого x, $a\leqslant x\leqslant b$. В силу неравенства Шварца

$$\left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}}+\ldots+\frac{\varphi_{n+m}(x)}{\sqrt{\lambda_{n+m}}}\cdot\frac{\varphi_{n+m}(s)}{\sqrt{\lambda_{n+m}}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}+\ldots+\frac{\varphi_{n+m}^2(x)}{\lambda_{n+m}}\right)\cdot\left(\frac{\varphi_n^2(s)}{\lambda_n}+\ldots+\frac{\varphi_{n+m}^2(s)}{\lambda_{n+m}}\right),$$

а потому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$ также сходится абсолютно и притом при заданном x равномерно относительно s, а при заданном s — равномерно относительно x. Следовательно, функция

$$K^*(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$$

при заданном x непрерывна относительно s и наоборот. Покажем, что $K^*(x, s) \equiv K(x, s)$. Для этого вспомним, что, согласно § 12 настоящей главы,

$$\lim_{p\to\infty}\left(K_2(x, x) - \sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\right) = 0;$$

последнее же, как нетрудно видеть, означает, что имеет место соотношение

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}\right]^2 ds = 0. \qquad (72)$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$ при фиксированном значении x сходится равномерно относительно s и представляет при заданном x непрерывную функцию $K^*(x, s)$ от s, то, выполняя в равенстве (72) предельный переход под знаком интеграла, получим

$$\int_a^b [K(x, s) - K^*(x, s)]^2 ds = 0,$$

откуда следует, что $K - K^* = 0$, или $K(x, s) \equiv K^*(x, s)$.

Итак, разложение (69) установлено, причем доказана абсолютная сходимость ряда, стоящего в правой части, и его равномерная сходимость относительно каждого переменного x и s в отдельности. Остается убедиться еще в том, что этот ряд (69) сходится также равномерно относительно обоих переменных одновременно. Для этого достаточно на основании приведенной выше оценки доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n}$.

По только что доказанному,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n} = K(x, x)$$

и $K(x, x)$ — непрерывная функция согласно условию. Последний же ряд сходится равномерно, потому что все его члены — непрерывные положительные функции и сумма — тоже непрерывная функция (см. § 12 настоящей главы).

Этим теорема Мерсера полностью доказана.

Замечание. Наличие конечного числа отрицательных фундаментальных чисел не может ничего изменить в сходимости ряда (69), так как ядро после отделения членов $\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$, соответствующих отрицательным фундаментальным числам, становится положительным. Таким образом теорема Мерсера справедлива и в том случае, когда ядро имеет конечное число отрицательных фундаментальных чисел.

ЗАДАЧИ

Определить фундаментальные числа и фундаментальные функции для следующих симметрических ядер и интервалов.

1. $K(x, s) = 1$; $(0, 1)$. *Отв.* $\lambda = 1$; $u(x) = 1$.
2. $K(x, s) = xs$; $(0, 1)$. *Отв.* $\lambda = 3$; $u(x) = x$.
3. $K(x, s) = x + s$; $(0, 1)$.

Отв. Корни уравнения $\lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$; $u(x) = x \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $K(x, s) = x^2 + s^2$; $(0, 1)$.

Отв. Корни уравнения $4\lambda^2 + 30\lambda - 45 = 0$; $u(x) = x \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. $K(x, s) = x^2 + xs + s^2$; $(0, 1)$.

Отв. Корни уравнения $1 - \lambda - \frac{7}{60}\lambda^2 + \frac{1}{2160}\lambda^3 = 0$,

$$u_i(x) = x^2 + \frac{6 + \lambda_i}{12 - \lambda_i}x + \frac{\lambda_i^2 + 48\lambda_i - 72}{6\lambda_i(\lambda_i - 12)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где λ_i — фундаментальные числа.

Пользуясь разложением решения по фундаментальным функциям, разрешить следующие интегральные уравнения.

1. $u(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 (x + s)\, u(s)\, ds.$

Отв. $u(x) = \frac{(6\lambda - 12)x - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}$, если $\lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{3}$.

2. $u(x) = x + (-6 \pm 4\sqrt{3}) \int\limits_0^1 (x + s)\, u(s)\, ds.$

Отв. Неразрешимо.

3. $u(x) = (1 - \sqrt{3}x) + (-6 + 4\sqrt{3}) \int\limits_0^1 (x + s)\, u(s)\, ds.$

Отв. $u(x) = (1 - \sqrt{3}x) + C(1 + \sqrt{3}x) - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)$.

4. $u(x) = (1 + \sqrt{3}x) + (-6 - 4\sqrt{3}) \int\limits_0^1 (x + s)\, u(s)\, ds.$

Отв. $u(x) = (1 + \sqrt{3}x) + C(1 - \sqrt{3}x) - \left(1 + \frac{3}{2}x\right)$.

Глава IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ

1. Задача этой небольшой заключительной главы состоит в том, чтобы показать необходимость использования для решения некоторых проблем теории интегральных уравнений понятия интеграла в смысле Лебега. Самое существенное во всех этих исследованиях заключается в том, что для них необходимым и удобным аппаратом является интеграл в смысле Лебега, а не интеграл в смысле Римана. Здесь, таким образом, мы будем иметь замечательные примеры логического исследования, из которого будут вытекать результаты, немедленно используемые в теории интегральных уравнений. В этой главе интегралы мы будем брать в смысле Лебега; функцию, интегрируемую в смысле Лебега, будем называть *суммируемой*. Особое значение будет представлять класс Ω измеримых функций ссуммируемым квадратом в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Заметим здесь же, что вместе с любой парой функций в этом классе содержится и их сумма, кроме того, произведение любых двух функций этого класса суммируемо.

§ 1. Сходимость в среднем. 1. Пусть дана некоторая последовательность функций класса Ω

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

Условимся называть эту последовательность *сходящейся в среднем* к функции $f(x)$, принадлежащей тому же классу Ω, если имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что понятие средней сходимости по самому его определению может применяться только в отношении функций с суммируемым квадратом, т. е. принадлежащих к классу Ω. Далее ясно, что всякая последовательность функций, равномерно сходящаяся к предельной функции $f(x)$, будет сходиться в среднем к той же функции. Говорят, что последовательность функций сходится (в обычном смысле) *почти всюду* в интервале $[a, b]$, если она сходится во всякой точке этого интервала, за исключением, быть может, точек множества меры нуль.

Заметим, что последовательность функций, сходящаяся в среднем, может быть не сходящейся почти всюду и даже нигде не сходящейся.

2. Если какая-либо последовательность функций (1) сходится в среднем к функции $f(x)$, то эта предельная функция единственна, если пренебрегать ее значениями на множестве точек меры нуль. Другими словами, всякая иная функция $\varphi(x)$, к которой последовательность функций (1) сходится в среднем, необходимо должна совпадать с $f(x)$ во всех точках интервала $a \leqslant x \leqslant b$, кроме, быть может, точек множества меры нуль. Действительно, допустим, что одновременно существуют предельные равенства

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx \to 0\\ \text{и}\quad &\int_a^b [\varphi(x)-f_n(x)]^2\,dx \to 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим выражение

$$\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]^2\,dx = \int_a^b \{[\varphi(x)-f_n(x)]+[f_n(x)-f(x)]\}^2\,dx. \tag{4}$$

Выполняя элементарные преобразования над подинтегральным выражением правой части, находим

$$\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]^2\,dx = \int_a^b [\varphi(x)-f_n(x)]^2\,dx + {}$$

$$+ 2\int_a^b [\varphi(x)-f_n(x)]\,[f_n(x)-f(x)]\,dx + \int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx.$$

Первый и третий интегралы правой части в силу условий (3) стремятся к нулю при неограниченном возрастании n. Что касается второго интеграла правой части, то, применяя к нему неравенство Шварца (введение, § 9), находим

$$\left|\int_a^b [\varphi(x)-f_n(x)]\,[f_n(x)-f(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b [\varphi(x)-f_n(x)]^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx},$$

откуда явствует, что вследствие условий (3) он тоже имеет пределом нуль. Таким образом мы приходим к выводу, что интеграл (4) стремится к нулю когда n неограниченно возрастает. Но так как интеграл (4) не зависит от n, то он должен быть равен нулю, т. е.

$$\int_a^b [\varphi(x)-f(x)]^2\,dx = 0.$$

Заметив, что подинтегральная функция неотрицательна, заключаем: подинтегральная функция равна нулю почти всюду в интервале $[a, b]$, откуда $\varphi(x) \equiv f(x)$ почти всюду в интервале $[a, b]$.

§ 2. Критерий сходимости в среднем. 1. Для средней сходимости имеет место критерий, аналогичный признаку Коши для обычной сходимости. Этот критерий заключается в следующем.

Необходимое и достаточное условие сходимости в среднем последовательности функций (1) *класса* Ω *будет*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_{n+p}(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0, \tag{5}$$

причем стремление к пределу равномерно относительно p, *где* p — *любое натуральное число.*

Необходимость этого условия легко показать. В самом деле, пусть последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем к функции $f(x)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0. \tag{6}$$

Тогда, очевидно, можем также написать

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-f_{n+p}(x)]^2\,dx = 0, \tag{6'}$$

причем стремление к пределу равномерно относительно p. Заметив, что

$$\int_a^b [f_{n+p}(x)-f_n(x)]^2\,dx = \int_a^b \{[f_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-f_n(x)]\}^2\,dx$$

и повторяя выкладки предыдущего параграфа, получим

$$\int_a^b [f_{n+p}(x)-f_n(x)]^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b [f_{n+p}(x)-f(x)]^2\,dx + \int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx +$$

$$+2\sqrt{\int_a^b [f_{n+p}(x)-f(x)]^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx},$$

откуда вследствие условий (6) и (6′) вытекает искомый признак

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_{n+p}(x)-f_n(x)]^2\,dx = 0,$$

причем стремление к пределу равномерно относительно p.

2. Покажем, что выполнение этого критерия одновременно является и достаточным для сходимости в среднем, т. е., предполагая его выполненным, мы построим функцию $f(x)$ класса Ω, к которой наша последовательность функций будет сходиться в среднем. Доказательство существования предельной функции $f(x)$ для последовательности, удовлетворяющей условию (5), целиком основано на привлечении результатов теории меры множеств. Сначала мы докажем, что из данной последовательности функций (1) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в интервале $[a, b]$ к функции $f(x)$ класса Ω, а затем обнаружим, что вся данная последовательность функций сходится в среднем к этой предельной функции $f(x)$.

Для этого рассмотрим сходящийся числовой ряд с положительными членами

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu+\ldots$$

и выберем последовательность функций

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ \ldots,\ f_{n_\nu}(x),\ \ldots \quad (n_1<n_2<n_3<\ldots)$$

так, чтобы имели место неравенства

$$\int_a^b [f_{n_\nu+p}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2\,dx < \varepsilon_\nu^2 \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $p>0$ — произвольное целое число. Легко видеть, что так выбранная последовательность $f_{n_\nu}(x)$ сходится почти всюду в $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, т. е. $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)=f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. В самом деле, ряд из положительных функций

$$|f_{n_1}(x)|+|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|+\ldots+|f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)|+\ldots$$

сходится почти всюду на $[a, b]$, так как, проинтегрировав его почленно, мы получим числовой ряд с общим членом

$$\int_a^b |f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b [f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2dx} < \sqrt{b-a}\,\varepsilon_\nu,$$

сходящийся согласно выбору чисел ε_ν. Здесь мы применили известное предложение теории интеграла Лебега [1]).

Отсюда немедленно заключаем, что ряд

$$f_{n_1}(x)+[f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)]+\ldots+[f_{n_{\nu+1}}(x)-f_{n_\nu}(x)]+\ldots$$

и подавно будет сходиться почти всюду на $[a, b]$, что равносильно утверждению о сходимости почти всюду на $[a, b]$ последовательности функций $f_{n_\nu}(x)$.

---

[1]) См., например, Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. I, стр. 280.

3. Покажем теперь, что построенная функция

$$f(x) = \lim_{\nu \to \infty} f_{n_\nu}(x) \tag{7}$$

принадлежит классу Ω и что данная последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем к функции $f(x)$. Для этого, пользуясь обычными обозначениями

$$F_N = F(x) \text{ в точках, где } F(x) \leqslant N,$$
$$F_N = N \text{ в точках, где } F(x) > N,$$

получим

$$\int_a^b (f_n - f)_N^2 \, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_a^b (f_n - f_{n_\nu})_N^2 \, dx \leqslant \varlimsup_{\nu \to \infty} \int_a^b (f_n - f_{n_\nu})^2 \, dx. \tag{8}$$

Отсюда, беря $N \to \infty$, находим

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \, dx \leqslant \varlimsup_{\nu \to \infty} \int_a^b (f_n - f_{n_\nu})^2 \, dx.$$

Но, согласно условию для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n и n_ν,

$$\int_a^b (f_n - f_{n_\nu})^2 \, dx < \varepsilon;$$

следовательно, в силу предыдущего соотношения при достаточно большом n

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \, dx \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем к функции $f(x)$. Кроме того, $f(x)$ принадлежит классу Ω как сумма двух функций $f - f_n$ и f_n, принадлежащих этому классу.

4. Как мы видели в предыдущем параграфе, эта предельная функция является единственной. Кроме того, из вышеизложенного мы усматриваем, что из всякой последовательности функций, сходящейся в среднем к функции $f(x)$, всегда можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в обычном смысле к этой функции $f(x)$ почти всюду в интервале $[a, b]$.

§ 3. Почленное интегрирование ряда, сходящегося в среднем.

1. Условимся ради краткости письма факт сходимости в среднем последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ к некоторой функции $f(x)$ символически записывать в виде

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Докажем, что если $f_n \rightrightarrows f$, то

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x) \, dx \to \int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$ обозначает любую функцию из класса Ω; в частности, приняв $\varphi(x) \equiv 1$, будем иметь

$$\int_a^b f_n(x) \, dx \to \int_a^b f(x) \, dx.$$

Чтобы доказать формулу (9), рассмотрим разность левой и правой частей этой формулы и обнаружим, что предел этой разности равен нулю. Имеем

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx = \int_a^b \varphi(x) [f_n(x) - f(x)] \, dx.$$

Покажем теперь, что правая, а, следовательно, и левая часть последнего равенства имеет пределом нуль, когда n неограниченно возрастает. В самом деле, применяя неравенство Шварца, находим

$$\left[\int_a^b \varphi(x) [f_n(x) - f(x)] \, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \cdot \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx.$$

Интеграл, стоящий вторым множителем в правой части, вследствие условия $f_n \rightrightarrows f$ имеет пределом нуль, а потому $\int_a^b \varphi(f_n - f) \, dx \to 0$, что и доказывает высказанное предложение.

2. Будем говорить, что ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ сходится в среднем к функции $f(x)$, если последовательность сумм этого ряда сходится в среднем к этой функции, т. е.

$$s_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

Применяя доказанное предложение к функциям $s_n(x)$, получим

$$\int_a^b \varphi(x) s_n(x) \, dx \to \int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx,$$

или

$$\int_a^b \varphi(x) u_1(x) \, dx + \int_a^b \varphi(x) u_2(x) \, dx + \ldots + \int_a^b \varphi(x) u_n(x) \, dx \to$$
$$\to \int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx,$$

т. е. ряд

$$\int_a^b \varphi(x) u_1(x) \, dx + \int_a^b \varphi(x) u_2(x) \, dx + \ldots$$

сходится и имеет суммой

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) \, dx.$$

Считая $\varphi(x) \equiv 1$, мы видим, что всякий ряд функций, сходящийся в среднем, можно почленно интегрировать.

§ 4. Минимальное свойство коэфициентов Фурье. Формула и неравенство Бесселя. 1. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ есть произвольная нормированная ортогональная система функций в интервале $a \leqslant x \leqslant b$; все функции этой системы мы предполагаем принадлежащими классу Ω и обозначаем через $f(x)$ любую функцию этого класса. Коэфициентами Фурье функции $f(x)$ относительно данной ортогональной системы называют числа

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

(введение, § 12).

Выберем из данной ортогональной системы некоторое конечное число функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и образуем сумму $S(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$, где C_i обозначают произвольные постоянные.

Мы поставим следующую задачу: выбрать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы сумма $S(x)$ давала возможно наилучшее приближение к данной функции $f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов, т. е. так, чтобы среднее значение

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - S(x)]^2\,dx$$

было возможно меньшим. Решая эту задачу, мы покажем, что она имеет только одно решение.

Посредством прямых элементарных вычислений получаем

$$\int_a^b [f(x) - S(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu c_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^2,$$

откуда

$$\int_a^b [f(x) - S(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} (C_\nu - c_\nu)^2. \quad (10)$$

Эта формула дает нам решение поставленной задачи; она показывает, что среднее значение квадрата разности $f(x) - S(x)$ будет наименьшим, если за постоянные C_ν мы примем коэфициенты Фурье c_ν. Действительно, в этом и только в этом случае последний член формулы (единственный член, в который входят постоянные C_ν) получает свое наименьшее возможное значение — нуль.

Это минимальное свойство ясно показывает значение коэфициентов Фурье. Замечательным является тот факт, что решение поставленной задачи однозначно и что значение, которое нужно дать отдельному постоянному C_ν, зависит только от соответствующей функции $\varphi_\nu(x)$ и не зависит от остальных функций системы.

Подставляя в формулу (10) вместо C_ν коэфициенты Фурье c_ν, получаем *формулу Бесселя*

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu(x)\right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2. \quad (11)$$

Так как здесь выражение в левой части, очевидно, не может быть отрицательным, то отсюда вытекает как следствие *неравенство Бесселя* (введение, § 13)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \quad (12)$$

Так как в неравенстве (12) n — число произвольное, то из этого неравенства можно видеть, что какова бы ни была функция $f(x)$ с суммируемым квадратом, ряд $\sum c_\nu^2$ из квадратов коэфициентов Фурье этой функции относительно данной нормированной ортогональной системы сходится.

§ 5. Сходимость в среднем ряда Фурье. Равенство замкнутости нормированной ортогональной системы. 1. Пусть даны произвольная нормированная ортогональная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ и какая-нибудь функция $f(x)$; все функции мы считаем принадлежащими классу Ω. Образуем ряд Фурье функции $f(x)$ относительно данной нормированной ортогональной системы:

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\varphi_\nu(x),$$

где

$$c_\nu = \int_a^b f(x)\varphi_\nu(x)\,dx.$$

Вообще говоря, ряд Фурье функции $f(x)$ не сходится в обычном смысле. Докажем, что ряд Фурье функции $f(x)$ всегда сходится в среднем. Для этого применим к нашему ряду $\sum c_\nu\varphi_\nu(x)$ признак сходимости в среднем (§ 2). Имеем

$$\int_a^b [c_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p}(x)]^2\,dx = c_{n+1}^2 + \ldots + c_{n+p}^2 \to 0,$$

при неограниченно возрастающем n равномерно относительно p. Последнее заключение мы сделали на основании сходимости ряда из квадратов коэфициентов Фурье (§ 4). Итак, ряд Фурье всегда сходится в среднем. Обозначим через $f^*(x)$ ту функцию, к которой сходится в среднем наш ряд Фурье, т. е.

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) \rightrightarrows f^*(x).$$

Если данный ряд и функцию $f^*(x)$ мы умножим на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем почленно относительно x в пределах от a до b, то полученный интеграцией числовой ряд будет сходиться и иметь сумму, равную $\int_a^b f^*(x)\varphi_k(x)\,dx$ (§ 3). Выполнив эти вычисления, получим

$$c_k = \int_a^b f^*(x)\varphi_k(x)\,dx \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

т. е. c_k будут одновременно коэфициентами Фурье как функции $f(x)$, так и функции $f^*(x)$. Вообще говоря, функции $f(x)$ и $f^*(x)$ будут существенно различны, т. е. не равны между собой на множестве точек меры, большей нуля.

2. Будем называть нормированную ортогональную систему функцией $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... *замкнутой*, если нельзя ее дополнить, т. е. если не существует никакой функции $\omega(x)$ с суммируемым квадратом, которая была бы ортогональна ко всем функциям данной системы. Выражая эту мысль иначе, мы можем сказать, что система функций замкнутая, если каждая функция класса Ω, ортогональная ко всем функциям системы, равна нулю почти всюду в интервале $[a, b]$ (ср. § 10 гл. III). При ближайшем рассмотрении связи функции $f(x)$ с ее рядом Фурье естественно возникает фундаментальный вопрос, будет ли функция однозначно определена посредством ее ряда Фурье, т. е. будут ли двум существенно различным функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ всегда соответствовать различные ряды Фурье. Утвердительный ответ на этот вопрос получается в случае рядов Фурье относительно замкнутой нормированной ортогональной системы и отрицательный — в противном случае. Действительно, если двум функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ класса Ω соответствует один и тот же ряд Фурье, то

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\varphi_k(x)\,dx,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно,

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

В предположении замкнутости данной нормированной ортогональной системы функция $\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$, как ортогональная ко всем функциям этой системы, должна быть равна нулю почти всюду в интервале $[a, b]$, что равносильно утверждению: $f(x) = \varphi(x)$ почти всюду в интервале $[a, b]$; наоборот, в случае открытой нормированной ортогональной системы существует функция $\omega(x)$, ортогональная ко всем ее элементам; очевидно, все функции вида $f(x) + C\omega(x)$ будут иметь один и тот же ряд Фурье, каково бы ни было произвольное постоянное C.

3. В начале этого параграфа мы показали, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в среднем к функции $f^*(x)$, причем эти функции имеют одинаковые коэфициенты Фурье. Отсюда, если данная нормированная ортогональная система функций есть замкнутая, то функции $f(x)$ и $f^*(x)$ должны совпадать между собой почти во всех точках интервала $[a, b]$.

Другими словами, ряд Фурье функции $f(x)$ относительно замкнутой нормированной ортогональной системы сходится в среднем к функции $f(x)$, для которой он образован.

4. Обращаясь к формуле Бесселя (11), мы видим, что в случае замкнутости данной системы левая часть этой формулы стремится к нулю при неограниченном возрастании n, а потому получаем

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2. \tag{13}$$

Равенство (13) в случае замкнутой нормированной ортогональной системы имеет место, какова бы ни была функция $f(x)$ класса Ω, и носит название *равенства замкнутости*. Легко видеть, что, обратно, если равенство (13) выполняется для любой функции $f(x)$ класса Ω, то система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... есть замкнутая. В самом деле, предположив, что $f(x)$ ортогональна ко всем функциям данной системы, т. е. $c_\nu = 0$ при любом ν, мы получим из формулы (13) $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$, откуда $f(x) = 0$ почти всюду в интервале $[a, b]$, что доказывает замкнутость системы. Итак, мы пришли к другому, эквивалентному с первоначальным, определению замкнутости: *нормированная ортогональная система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется замкнутой, если она удовлетворяет равенству* (13), *какова бы ни была функция $f(x)$ класса Ω.*

§ 6. Теорема Фишера — Рисса. 1. *Пусть даны замкнутая нормированная ортогональная система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... класса Ω и последовательность постоянных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что ряд $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$ сходится. Существует функция $f(x)$ с суммируемым квадратом и притом единственная которая имеет числа a_n своими коэфициентами Фурье относительно данной системы функций.*

В этом заключается содержание предложения, доказанного одновременно Е. Фишером и Ф. Риссом. Для доказательства рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, имеем

$$\int_a^b [f_{n+p}(x) - f_n(x)]^2\,dx = a_{n+1}^2 + \ldots + a_{n+p}^2,$$

и, следовательно,

$$\int_a^b [f_{n+p}(x) - f_n(x)]^2\,dx \to 0,$$

когда n неограниченно возрастает, равномерно относительно p. Согласно § 2 последовательность функций $f_n(x)$ сходится в среднем в интервале $[a, b]$ и определяет функцию $f(x)$ с суммируемым квадратом; функция $f(x)$ и есть искомая. Чтобы это показать, нужно обнаружить справедливость равенств

$$a_p = \int_a^b f(x)\varphi_p(x)\,dx \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно сказанному в § 3, из условий $f_n \rightrightarrows f$ вытекает

$$\int_a^b f_n(x)\varphi_p(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\varphi_p(x)\,dx.$$

С другой стороны, $\int_a^b f_n(x)\varphi_p(x)\,dx = a_p$ при $n \geqslant p$, а потому

$$a_p = \int_a^b f(x)\varphi_p(x)\,dx,$$

что и нужно было найти. Очевидно, функция $f(x)$ является единственной при условии замкнутости данной системы. В самом деле, если бы существовала вторая функция $\varphi(x)$, то разность $\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$ была бы ортогональной ко всем функциям $\varphi_n(x)$, что невозможно благодаря замкнутости данной системы.

§ 7. Уравнение Фредгольма I рода. 1. Интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{14}$$

где $K(x, s)$ — данное регулярное ядро, $f(x)$ — известная непрерывная функция в интервале $[a, b]$ и $\varphi(x)$ — искомая функция, представляет трудности для изучения, существенно отличные от тех, с которыми мы встречались до сих пор в теории интегральных уравнений II рода.

Чтобы иметь общий случай, где решение задачи существовало бы и было единственным, недостаточно более ограничивать область решений совокупностью непрерывных функций; необходимы другие условия. Это ограничение области, где мы ищем решение, делаемое a priori, представляет новый и наиболее важный элемент задачи. Областью, где ищется решение уравнения (14), будет служить класс Ω функций с суммируемым квадратом, метод исследования будет основан на понятии сходимости в среднем, тесно связанном с общей теорией интеграла Лебега.

Приступая к исследованию вопроса о существовании решения интегрального уравнения (14), мы прежде всего отметим, что, вообще говоря, такого решения не существует, поскольку данная функция $f(x)$ есть любая непрерывная функция в интервале $[a, b]$. В самом деле, считая, например, ядро $K(x, s)$ многочленом относительно x и s, мы видим, что $f(x)$ должна необходимо быть многочленом относительно x.

Таким образом при существовании решения уравнения (14) должно выполняться некоторое условие, зависящее от ядра и данной функции $f(x)$.

2. После этих предварительных замечаний обратимся к доказательству следующей теоремы Пикара.

Интегральное уравнение I рода (14) имеет решение и притом единственное в классе Ω, если ряд

$$\lambda_1^2 f_1^2 + \lambda_2^2 f_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 f_n^2 + \ldots \tag{15}$$

сходится. Симметрическое ядро $K(x, s)$ предполагается замкнутым. Условие (15) — необходимое и достаточное.

В этом предложении постоянные λ_n обозначают фундаментальные числа ядра $K(x, s)$ и f_n — коэфициенты Фурье функции $f(x)$ относительно фундаментальных функций этого ядра. Ядро $K(x, s)$ мы называем замкнутым в классе Ω, если каждая функция $\omega(x)$ этого класса, удовлетворяющая тождеству $\int_a^b K(x, s)\,\omega(s)\,ds = 0$, необходимо равна нулю почти всюду в интервале $[a, b]$ (ср. § 10 гл. III). Замкнутое ядро характеризуется тем, что порождаемые им фундаментальные функции образуют замкнутую в классе Ω нормированную ортогональную систему.

Чтобы доказать теорему Пикара, вычислим коэфициенты Фурье f_n функции $f(x)$ относительно фундаментальных функций $\varphi_n(x)$ ядра $K(x, s)$. Предполагая, что в классе Ω существует решение $\varphi(x)$ уравнения (14), будем иметь

$$f_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)\varphi(s)\,dx\,ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b \varphi(s)\varphi_n(s)\,ds. \tag{16}$$

Здесь мы воспользовались равенством (14) и определением функций $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, s)\varphi_n(s)\,ds,$$

откуда вследствие симметрии ядра так же

$$\int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(s).$$

Равенство (16) может быть записано в виде

$$\int_a^b \varphi(s)\varphi_n(s)\,ds = \lambda_n f_n. \tag{16'}$$

Таким образом числа $\lambda_n f_n$ являются коэфициентами Фурье функции $\varphi(x)$, принадлежащей классу Ω; ряд (15) из квадратов этих коэфициентов необходимо должен быть сходящимся (§ 4).

3. Предположим, обратно, что ряд (15) сходится.

По теореме Фишера-Рисса (§ 6) существует функция $\varphi(s)$, и притом единственная в классе Ω, удовлетворяющая всем равенствам (16′). Эта функция удовлетворяет данному интегральному уравнению. Действительно, вследствие самого образования функции $\varphi(x)$ непрерывные функции $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$ и $f(x)$ имеют одни и те же коэфициенты Фурье относительно замкнутой системы $\varphi_n(x)$; следовательно, функции $f(x)$ и $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$ тождественны (§ 5).

4. Анализируя проведенное доказательство, мы усматриваем, что гипотеза замкнутости ядра существенна не только для единственности решения интегрального уравнения (14), но и вообще для его разрешимости.

Если ядро $K(x, s)$ незамкнутое, то и последовательность функций $\varphi_n(x)$ открытая, и предыдущее рассуждение, которым мы воспользовались в конце доказательства, позволяет нам только написать

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) + K(x), \tag{17}$$

где $K(x)$ будет непрерывной функцией, ортогональной ко всем $\varphi_n(x)$. Всякое другое уравнение вида

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds = f(x) + K(x) + K_1(x), \tag{18}$$

где $K_1(x)$ обозначает любую другую непрерывную функцию, ортогональную ко всем $\varphi_n(x)$, не разрешимо в классе Ω. Действительно, вычитанием равенств (18) и (17) получаем

$$\int_a^b K(x, s)\,[\psi(s) - \varphi(s)]\,ds = K_1(x),$$

что невозможно благодаря теореме Гильберта — Шмидта (§ 11 гл. III), согласно которой непрерывная функция $K_1(x)$, как представимая посредством ядра $K(x, s)$, должна разлагаться в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям $\varphi_n(x)$ и потому не может быть ортогональной ко всем функциям $\varphi_n(x)$.

Итак, если симметрическое ядро $K(x, s)$ не есть замкнутое, то среди уравнений вида $\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) + K(x)$, где $f(x)$ — определенная непрерывная функция, не ортогональная ко всем $\varphi_n(x)$, а $K(x)$ — любая непрерывная функция, ортогональная ко всем $\varphi_n(x)$ в классе Ω, можно найти неразрешимые уравнения. Само собой разумеется, что предполагается сходимость ряда (15).

§ 8. Существование фундаментального числа. 1. В § 4 гл. III мы доказали основное предложение теории симметрических ядер: всякое симметрическое ядро имеет по крайней мере одно фундаментальное число. Доказательство этого предложения было проведено в предположении регулярности ядра и основывалось на рассмотрении „следов“ итерированных ядер, т. е. чисел $U_n = \int_a^b K_n(s, s)\,ds$. В некоторых приложениях симметрического ядра приходится вводить ядра нерегулярные, и поэтому важно распространить основную теорему на возможно более широкий класс симметрических ядер. Будем предполагать симметрическое ядро $K(x, s) \equiv K(s, x)$ функцией с суммируемым квадратом относительно совокупности переменных x, s в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Очевидно тогда, что все итерированные ядра

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt,$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\,K(t, s)\,dt, \ldots$$

будут также функциями с суммируемым квадратом в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$.

При гипотезе, сделанной выше относительно ядра, докажем основное предложение.

Всякое симметрическое ядро имеет по крайней мере одно фундаментальное число или, что то же, всякое симметрическое ядро без фундаментальных чисел почти всюду равно нулю.

Прежде всего заметим, что доказательство, приведенное в § 4 гл. III для регулярного ядра, не может быть распространено на рассматриваемый здесь общий случай. Мы покажем, что наша теорема может быть доказана путем некоторого видоизменения доказательства, данного Е. Шмидтом для регулярного ядра.

2. Для доказательства рассмотрим интегралы

$$\int_a^b K_n(s, s)\,ds = U_n \qquad (n \geqslant 2). \tag{19}$$

Легко видеть, что „следы“ (19) итерированных ядер существуют. В самом деле, согласно условию двойной интеграл $\int_a^b\int_a^b K(x,s)\,K(s,x)\,dx\,ds$ существует. Следовательно, на основании известного свойства двойных интегралов в смысле Лебега [1]), мы можем заключить, что $\int_a^b K(x,s)\,K(s,x)\,ds$

[1]) Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, стр. 108.

почти всюду в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ имеет конечные значения и выражает суммируемую функцию $K_2(x, x)$.

Далее, для произвольных целых положительных h и q мы можем написать

$$U_{h+q} = \int_a^b \int_a^b K_h(x, s) K_q(s, x) \, ds \, dx \tag{20}$$

и, в частности, принимая во внимание симметричность итерированных ядер,

$$U_{2h} = \int_a^b \int_a^b [K_h(x, s)]^2 \, dx \, ds. \tag{21}$$

Вследствие неравенства Шварца мы находим из формулы (20)

$$U_{h+q}^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b [K_h(x, s)]^2 \, dx \, ds \cdot \int_a^b \int_a^b [K_q(x, s)]^2 \, dx \, ds,$$

или, принимая во внимание равенство (21),

$$U_{h+q}^2 \leqslant U_{2h} \cdot U_{2q}.$$

Это неравенство имеет место при любых целых положительных h и q. Полагая, в частности, $h = n-1$ и $q = n+1$, мы получаем

$$U_{2n}^2 \leqslant U_{2n-2} \cdot U_{2n+2}. \tag{22}$$

Покажем, что все $U_{2n} > 0$ и что, следовательно, мы имеем право делить на U_{2n}.

Действительно,

$$U_2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) \, dx \, ds > 0.$$

Далее, имеем

$$U_4 = \int_a^b \int_a^b K_2^2(x, s) \, dx \, ds.$$

Предположим, что $U_4 = 0$. Тогда итерированное ядро $K_2(x, s) \equiv 0$ почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Докажем, что в этом случае и исходное ядро $K(x, s) \equiv 0$ почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, откуда и будет следовать, что $U_4 > 0$. Замечая, что

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \, dt,$$

умножим обе части на $v(x) v(s)$, где v — любая функция с суммируемым квадратом в интервале $[a, b]$, и проинтегрируем по области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Так как по условию $K_2(x, s) \equiv 0$, то получим

$$0 = \int_a^b \left[\int_a^b K(t, s) v(s) \, ds \right]^2 dt,$$

откуда следует, что

$$\int_a^b K(x, s) v(s) \, ds = 0$$

почти для всех значений x, $a \leqslant x \leqslant b$. Умножая на $u(x)$, где $u(x)$ — любая функция с суммируемым квадратом в интервале $[a, b]$, и интегрируя в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b \int_a^b K(x, s) u(x) v(s) \, dx \, ds = 0. \tag{23}$$

Но возможно построить выражения вида $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(s)$, сходящиеся в среднем по области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ к функции $K(x, s)$. Для этого достаточно рассмотреть последовательность сумм Фурье, образованную для функции $K(x, s)$ относительно некоторой замкнутой нормированной и ортогональной системы полиномов в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$.

Итак, пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(s) \rightrightarrows K(x, s)$. Умножая обе части этого соотношения на $K(x, s)$, интегрируя по области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ и переходя к пределу, мы в силу (23) получим

$$0 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) \, dx \, ds,$$

откуда вытекает, что $K(x, s) \equiv 0$ почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Полученное противоречие убеждает нас в справедливости неравенства $U_4 > 0$. Следовательно, $U_2 > 0$, $U_4 > 0$, а значит, вследствие неравенства (22) так же все $U_{2n} > 0$.

Таким образом мы получаем из неравенства (22) цепь неравенств

$$0 < \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leqslant \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqslant \frac{U_{2n+4}}{U_{2n+2}} \leqslant \ldots \tag{22'}$$

Сходимость возрастающей последовательности положительных чисел $\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}}$ будет доказана, если только мы покажем, что все эти дроби остаются меньше некоторого постоянного числа.

Для этого применим неравенство Шварца к интегральному выражению ядра $K_{h+q}(x, s)$

$$[K_{h+q}(x, s)]^2 \leqslant \int_a^b [K_h(x, t)]^2 \, dt \int_a^b [K_q(t, s)]^2 \, dt.$$

Интегрируя обе части по переменным x, s в пределах от a до b и принимая во внимание формулу (21), находим

$$U_{2(h+q)} \leqslant U_{2h} \cdot U_{2q} \tag{23}$$

и, в частности,

$$U_{2n+2} \leqslant U_{2n} U_2,$$

или

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leqslant U_2, \tag{23'}$$

что означает, что все элементы нашей числовой последовательности остаются не бо́льшими чем U_2. Тем самым доказана сходимость последовательности (22'), и мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} = \frac{1}{Q}.$$

Для дальнейшего еще необходимо установить, что

$$\lim_{n\to\infty} U_{2n}Q^n = L \tag{24}$$

существует. Это сразу вытекает из того, что $U_{2n}Q \leqslant U_{2n-2}$, так как отсюда следует, что

$$U_{2(n-1)}Q^{n-1} \geqslant U_{2n}Q^n \geqslant U_{2(n+1)}Q^{n+1} \geqslant \ldots$$

есть монотонно убывающая последовательность положительных чисел, чем утверждение (24) и доказано. Кроме того, еще

$$L \geqslant 1. \tag{25}$$

В самом деле, из неравенства (23) вытекает, что

$$U_{2q} \geqslant \frac{U_{2n+2q}}{U_{2n+2q-2}} \cdot \frac{U_{2n+2q-2}}{U_{2n+2q-4}} \cdots \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqslant \left(\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}\right)^q,$$

причем мы снова воспользовались неравенствами (22'). При неограниченно возрастающем n правая часть стремится к $\left(\frac{1}{Q}\right)^q$. Мы имеем, следовательно, $U_{2q}Q^q \geqslant 1$, что доказывает также неравенство (25). Докажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} K_{2n}(x, s)Q^n = l(x, s) \tag{26}$$

существует почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ и $l(x, s)$ — функция с суммируемым квадратом в этой области. Действительно,

$$K_{2n+2q}(x, s)Q^{n+q} - K_{2n}(x, s)Q^n =$$
$$= Q\int_a^b\int_a^b K(x, t)K(\tau, s)\left[Q^{n+q-1}K_{2n+2q-2}(t, \tau) - Q^{n-1}K_{2n-2}(t, \tau)\right]dt\,d\tau.$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$[K_{2n+2q}(x, s)Q^{n+q} - K_{2n}(x, s)Q^n]^2 \leqslant$$
$$\leqslant Q^2\int_a^b\int_a^b [K(x, t)K(\tau, s)]^2\,dt\,d\tau \int_a^b\int_a^b [Q^{n+q-1}K_{2n+2q-2}(t, \tau) -$$
$$- Q^{n-1}K_{2n-2}(t, \tau)]^2\,dt\,d\tau,$$

или, возвышая в последнем интеграле подинтегральное выражение в квадрат и принимая во внимание формулы (20) и (21),

$$[K_{2n+2q}(x, s)Q^{n+q} - K_{2n}(x, s)Q^n]^2 \leqslant$$
$$\leqslant [Q^{2n+2q-2}U_{2(2n+2q-2)} - 2Q^{2n+q-2}U_{2(2n+q-2)} +$$
$$+ Q^{2n-2}U_{2(2n-2)}] \cdot Q^2\int_a^b\int_a^b [K(x, t)K(\tau, s)]^2\,dt\,d\tau. \tag{26'}$$

Последний множитель правой части конечен почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$, а первый множитель, не содержащий x и s, как легко получается из соотношения (24), стремится при $n\to\infty$ к нулю. Тем самым доказано утверждение (26). Функция $l(x, s)$, симметричная относительно x и s, является предельной для последовательности (26) в смысле сходимости в среднем [1]) и потому есть функция с суммируемым квадратом в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Теперь нетрудно видеть, что функция $\psi(x) = l(x, s_0)$ для почти всякого s_0, лежащего в интервале $[a, b]$, представляет собой собственную функцию ядра $K_2(x, s)$, принадлежащую фундаментальному числу Q. В самом деле,

$$Q^{n+1}K_{2n+2}(x, s_0) = Q\int_a^b K_2(x, t)\,Q^nK_{2n}(t, s_0)\,dt,$$

и вследствие доказанной сходимости в среднем последовательности (26) мы имеем право произвести предельный переход (26) также под знаком интеграла [2]). Мы получаем тогда

$$l(x, s_0) = Q\int_a^b K_2(x, t)\,l(t, s_0)\,dt. \tag{27}$$

Функция $\Phi(x) = l(x, s_0)$ — по крайней мере при подходящем выборе s_0 — действительно является фундаментальной функцией, ибо функция $l(x, s)$ не может быть равна нулю почти всюду в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$. Это следует из соотношения

$$\int_a^b\int_a^b l^2(x, s)\,dx\,ds = \lim\int_a^b\int_a^b K_{2n}^2(x, s)\,Q^{2n}\,dx\,ds = \lim U_{4n}Q^{2n} = L \geqslant 1.$$

Отсюда легко перейти к фундаментальному числу и фундаментальной функции ядра $K(x, s)$. Действительно, положим

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x) + \sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\,\Phi(s)\,ds\right],$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x) - \sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\,\Phi(s)\,ds\right].$$

[1]) Это немедленно вытекает из неравенства (26'), если мы его проинтегрируем по области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$.

[2]) Если последовательность функций сходится в среднем относительно каждого переменного в отдельности и, сверх того, сходится в среднем по области, то определяемые в обоих случаях предельные функции совпадают почти всюду.

Очевидно, функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ одновременно не могут быть тождественными нулями, так как $\Phi(x)$ не есть тождественный нуль. С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1(x)&=\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\Psi_1(s)\,ds\\ \text{и}\qquad&\\ \Psi_2(x)&=-\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\Psi_2(s)\,ds.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

В самом деле, внося вместо $\Psi_1(x)$ его выражение, получим

$$\Phi(x)+\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\Phi(s)\,ds=$$

$$=\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\left[\Phi(s)+\sqrt{Q}\int_a^b K(s, t)\Phi(t)\,dt\right]ds,$$

или

$$\Phi(x)+\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\Phi(s)\,ds=$$

$$=\sqrt{Q}\int_a^b K(x, s)\Phi(s)\,ds+Q\int_a^b K_2(x, t)\Phi(t)\,dt,$$

что приводится к равенству (27)

$$\Phi(x)=Q\int_a^b K_2(x, t)\Phi(t)\,dt.$$

Аналогично проверим справедливость второго из равенств (28).

Так как функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ одновременно не могут быть нулями, то равенства (28) показывают, что по крайней мере одно из чисел $\pm\sqrt{Q}$ есть фундаментальное для ядра $K(x, s)$.

§ 9. Сходимость в среднем к ядру $K(x, s)$ соответствующего разложения по фундаментальным функциям. 1. В § 7 гл. III было доказано, что соответствующий регулярному ядру $K(x, s)$ ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$, расположенный по фундаментальным функциям этого ядра, имеет своей суммой ядро $K(x, s)$, если он сходится равномерно.

В общем случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$ [1]) должен сходиться в среднем

[1]) Этот ряд является рядом Фурье для функции $K(x, s)$ относительно системы нормированных и ортогональных в области $a\leqslant(x, s)\leqslant b$ функций $\varphi_n(x)\varphi_n(s)$ $(n=1, 2,\ldots)$.

относительно области $a\leqslant(x, s)\leqslant b$ к некоторой функции с суммируемым квадратом в этой области. Обозначим ее $K^*(x, s)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}\rightrightarrows K^*(x, s).\tag{29}$$

Кроме того, наш ряд, будучи рядом Фурье, сходится в среднем относительно каждого переменного x и s и определяет ту же предельную функцию $K^*(x, s)$.

Покажем, что $K^*(x, s)\equiv K(x, s)$, т. е. ядро $K(x, s)$ может быть аппроксимировано в среднем с любой степенью точности посредством частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}.\tag{30}$$

2. Рассмотрим разность $Q(x, s)=K^*(x, s)-K(x, s)$ и покажем, что

$$Q(x, s)\equiv 0\tag{31}$$

(причем здесь $\equiv$ понимается в смысле равенства почти всюду).

Этим будет обнаружено совпадение $K^*(x, s)$ с ядром $K(x, s)$. Предполагая $Q(x, s)$ не равным почти всюду нулю, мы можем принять вследствие теоремы § 8, что эта функция, рассматриваемая в качестве ядра, должна иметь по крайней мере одно фундаментальное число μ с соответствующей ему фундаментальной функцией $\psi(x)$, так как она будет симметрической функцией своих аргументов, удовлетворяющей условиям теоремы § 8. Таким образом имеем

$$\psi(x)=\mu\int_a^b Q(x, s)\psi(s)\,ds.\tag{32}$$

Покажем сначала, что функция $\psi(x)$ ортогональна ко всем фундаментальным функциям $\varphi_n(x)$ ядра $K(x, s)$. В самом деле, умножим равенство (32) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем относительно x в пределах от a до b; тогда получим

$$\int_a^b\psi(x)\varphi_n(x)\,dx=\mu\int_a^b\int_a^b[K^*(x, s)-K(x, s)]\,\psi(s)\varphi_n(x)\,ds\,dx,$$

или

$$\int_a^b\psi(x)\varphi_n(x)\,dx=$$

$$=\mu\int_a^b\psi(s)\left[\int_a^b K^*(x, s)\varphi_n(x)\,dx-\int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)\,dx\right]ds.\tag{33}$$

Далее, так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}\rightrightarrows K^*(x, s),\quad\text{то}\quad\frac{\varphi_n(s)}{\lambda_n}=\int_a^b K^*(x, s)\varphi_n(x)\,dx$$

(§ 3), а потому равенству (33) можно придать следующий вид:

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = \mu \int_a^b \psi(s)\left[\frac{\varphi_n(s)}{\lambda_n} - \int_a^b K(x, s)\varphi_n(x)\,dx\right] ds.$$

Выражение, заключенное в скобки, тождественно равно нулю по определению функций $\varphi_n(s)$, откуда получаем

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

что и доказывает ортогональность функции $\psi(x)$ ко всем функциям $\varphi_n(x)$. После этого легко обнаружить, что $\psi(x)$ ортогональна к функции $K^*(x, s)$. Действительно, вследствие сказанного в § 3, имеем

$$\int_a^b K^*(x, s)\psi(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\int_a^b \psi(s)\varphi_n(s)\,ds \equiv 0.$$

Теперь равенство (32) принимает вид

$$\psi(x) = \mu\int_a^b [K^*(x, s) - K(x, s)]\psi(s)\,ds = -\mu\int_a^b K(x, s)\psi(s)\,ds.$$

Последнее соотношение показывает, что $\psi(x)$ является фундаментальной функцией ядра $K(x, s)$ и, следовательно, есть линейная комбинация с постоянными коэфициентами некоторых фундаментальных функций $\varphi_{n_1+1}(x), \varphi_{n_1+2}(x), \ldots, \varphi_{n_1+q}(x)$, так как функции $\varphi_n(x)$ образуют по условию полную фундаментальную систему ядра $K(x, s)$:

$$\psi(x) = c_1\varphi_{n_1+1}(x) + c_2\varphi_{n_1+2}(x) + \ldots + c_q\varphi_{n_1+q}(x).$$

Так как, с другой стороны, функция $\psi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_n(x)$, то имеем

$$0 = \int_a^b \psi(x)\varphi_{n_1+i}(x)\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

откуда $\psi(x) \equiv 0$. Полученное противоречие убеждает нас в том, что $Q(x, s) \equiv 0$, а следовательно,

$$K^*(x, s) \equiv K(x, s).$$

Итак, в этом параграфе мы доказали, что ряд Фурье любого симметрического ядра $K(x, s)$ (замкнутого или незамкнутого) всегда сходится в среднем к этому ядру. При этом мы имели случай убедиться в том, что для получения результата, относящегося к регулярному ядру, необходимо было воспользоваться обобщенной теоремой § 8 настоящей главы о существовании фундаментального числа.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава I

ОБЩИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. В § 2 введения мы рассматривали вопрос о колебании тяжелого упругого стержня и видели, что определение амплитуды его свободного гармонического колебания с частотой χ приводится к разрешению следующей краевой задачи:

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \chi^2\frac{\mu(x)}{EI}u, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \ x = b, \tag{2}$$

где E — модуль упругости Юнга, I — момент инерции поперечного сечения стержня, а $\mu(x)$ — масса в сечении x, рассчитанная на единицу длины.

Проведенные там рассуждения показали нам, что эта задача эквивалентна задаче разрешения интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda\int_a^b G(x, s)\mu(s)u(s)\,ds, \qquad \lambda = \chi^2, \tag{3}$$

в котором $G(x, s)$ есть непрерывная симметрическая функция своих аргументов, точное выражение которой было там дано, называемая функцией Грина краевой задачи (1), (2).

2. К интегральному уравнению (3) с ядром вида $G(x, s)\mu(s)$, где $G(x, s)$ — регулярная (в частности непрерывная) симметрическая функция, а $\mu(s)$ — непрерывная положительная функция, применима вся теория Гильберта — Шмидта интегральных уравнений с симметрическим ядром, как это было отмечено в § 16 гл. III ч. I. Действительно, переписав уравнение (3) в виде

$$u(x)\sqrt{\mu(x)} = \lambda\int_a^b G(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,u(s)\sqrt{\mu(s)}\,ds, \tag{3'}$$

мы получаем интегральное уравнение с симметрическим ядром $K(x, s) = G(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)}$ и неизвестной функцией $u(x)\sqrt{\mu(x)}$.

Поэтому, применяя результаты гл. III ч. I к уравнению (3′), заключаем.

1) *Существуют фундаментальные числа уравнения* (3′)

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

и все они действительные.

2) *Фундаментальные функции*

$$u_1(x)\sqrt{\mu(x)}, \quad u_2(x)\sqrt{\mu(x)}, \quad \ldots, \quad u_n(x)\sqrt{\mu(x)}, \quad \ldots$$

образуют нормированную ортогональную систему в основном интервале $[a, b]$.

3) *Ядру* $K(x, s)$ *соответствует разложение по фундаментальным функциям*

$$G(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\sqrt{\mu(x)}\,u_n(s)\sqrt{\mu(s)}}{\lambda_n},$$

которое сходится в среднем к этому ядру (ч. I, гл. III, § 7; гл. IV, § 9).

4) *Последовательные итерации ядра* $K(x, s)$ *будут иметь выражения*

$$K_2(x, s) = \sqrt{\mu(x)\mu(s)} \int_a^b G(x, t)\,G(t, s)\,\mu(t)\,dt = \sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,H_2(x, s),$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\,K(t, s)\,dt = \sqrt{\mu(x)\mu(s)} \int_a^b H_2(x, t)\,G(t, s)\,\mu(t)\,dt = \sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,H_3(x, s)$$

и вообще

$$K_p(x, s) = \sqrt{\mu(x)\mu(s)} \int_a^b H_{p-1}(x, t)\,G(t, s)\,\mu(t)\,dt = \sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,H_p(x, s).$$

Они разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды фундаментальных функций:

$$K_p(x, s) = \sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,H_p(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\sqrt{\mu(x)}\,u_n(s)\sqrt{\mu(s)}}{\lambda_n^p}$$

(ч. I, гл. III, §§ 9 и 12).

5) *Всякая функция, представимая при помощи ядра в виде*

$$\int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds = \sqrt{\mu(x)} \int_a^b G(x, s)\,\mu(s)\,H(s)\,ds \quad \left(h(s) = H(s)\sqrt{\mu(s)}\right),$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n u_n(x)\sqrt{\mu(x)}}{\lambda_n},$$

где $H_n = \int_a^b h(s)\sqrt{\mu(s)}\,u_n(s)\,ds = \int_a^b \mu(s)\,H(s)\,u_n(s)\,ds$ (ч. I, гл. III, § 11).

6) *Решение неоднородного интегрального уравнения*

$$u(x) - \lambda \int_a^b G(x, s)\,\mu(s)\,u(s)\,ds = f(x) \tag{4}$$

разлагается в ряд, абсолютно и равномерно сходящийся по фундаментальным функциям уравнения

$$u(x)\sqrt{\mu(x)} - \lambda \int_a^b G(x, s)\sqrt{\mu(x)\mu(s)}\,u(s)\sqrt{\mu(s)}\,ds = f(x)\sqrt{\mu(x)}. \tag{4′}$$

Это разложение будет

$$u(x)\sqrt{\mu(x)} = f(x)\sqrt{\mu(x)} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n}\,u_n(x)\sqrt{\mu(x)}, \tag{5}$$

где λ *не равно никакому фундаментальному числу, а*

$$f_n = \int_a^b f(s)\,\mu(s)\,u_n(s)\,ds \tag{6}$$

(ч. I, гл. III, § 13).

7) *Если* $\lambda = \lambda' = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_{p+q}$ *есть фундаментальное число, то условие, необходимое и достаточное для разрешимости интегрального уравнения* (4′), *заключается в выполнении равенств*

$$\int_a^b f(x)\,\mu(x)\,u_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ p+q),$$

т. е. в ортогональности правой части уравнения (4′) *ко всем фундаментальным функциям этого уравнения, соответствующим данному фундаментальному числу* λ'. *Решение будет зависеть от* q *произвольных постоянных и выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом*

$$u(x)\sqrt{\mu(x)} = f(x)\sqrt{\mu(x)} + C_{p+1}u_{p+1}(x)\sqrt{\mu(x)} + \ldots$$
$$\ldots + C_{p+q}u_{p+q}(x)\sqrt{\mu(x)} - \left(\sum_{n=1}^{p} + \sum_{n=p+q+1}^{\infty}\right)\left[\frac{\lambda' f_n}{\lambda' - \lambda_n}\,u_n(x)\sqrt{\mu(x)}\right] \tag{7}$$

(ч. I, гл. III, § 13).

3. Возвращаясь от уравнений (3′) и (4′) к уравнениям (3) и (4), мы можем перечисленные результаты формулировать следующим образом.

1) *Существуют фундаментальные числа уравнения* (3)

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

и все они действительные.

2) *Фундаментальные функции уравнения* (3)

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x), \quad \ldots$$

образуют нормированную ортогональную систему в основном интервале $[a, b]$ *с весом* $\mu(x)$, *т. е. удовлетворяют соотношениям*

$$\int_a^b \mu(x)\, u_n(x)\, u_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \qquad (8)$$

3) *Ядру* $G(x, s)\,\mu(s)$ *соответствует разложение по фундаментальным функциям уравнения* (3)

$$G(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(s)}{\lambda_n}, \qquad (9)$$

которое сходится в среднем с весом $\mu(s)$:

$$\int_a^b \mu(s) \left[G(x, s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(x)\, u_i(s)}{\lambda_i} \right]^2 ds \to 0,$$

когда n неограниченно возрастает.

4) *Полагая* $H_2(x, s) = \int_a^b G(x, t)\, G(t, s)\, \mu(t)\, dt$ *и вообще*

$$H_p(x, s) = \int_a^b H_{p-1}(x, t)\, G(t, s)\, \mu(t)\, dt,$$

имеем разложения этих функций в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды по фундаментальным функциям данного интегрального уравнения

$$H_p(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\, u_n(s)}{\lambda_n^p} \qquad (p = 2, 3, \ldots). \qquad (10)$$

5) *Всякая функция вида*

$$F(x) = \int_a^b G(x, s)\, \mu(s)\, H(s)\, ds, \qquad (11)$$

где $H(s)$ — *интегрируемая вместе со своим квадратом функция, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям уравнения* (3)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{\lambda_n} u_n(x), \qquad (12)$$

где

$$H_n = \int_a^b \mu(s)\, H(s)\, u_n(s)\, ds. \qquad (13)$$

6) *Решение неоднородного интегрального уравнения* (4) *разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по его фундаментальным функциям*

$$u(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} u_n(x), \qquad (14)$$

где λ *не равно никакому фундаментальному числу, а*

$$f_n = \int_a^b \mu(s)\, f(s)\, u_n(s)\, ds. \qquad (15)$$

7) *Если* $\lambda = \lambda' = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_{p+q}$ *есть фундаментальное число, то условие, необходимое и достаточное для разрешимости интегрального уравнения* (4), *заключается в выполнении равенств*

$$\int_a^b \mu(x)\, f(x)\, u_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = p+1,\ p+2, \ldots, p+q),$$

т. е. в ортогональности относительно веса $\mu(x)$ *правой части уравнения* (4) *ко всем фундаментальным функциям этого уравнения, соответствующим рассматриваемому фундаментальному числу* λ'. *Решение в этом случае будет зависеть от q произвольных постоянных и выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом*

$$u(x) = f(x) + c_{p+1} u_{p+1}(x) + \ldots + c_{p+q} u_{p+q}(x) - \\ - \left(\sum_{n=1}^{p} + \sum_{n=p+q+1}^{\infty} \right) \left[\frac{\lambda' f_n}{\lambda' - \lambda_n} u_n(x) \right]. \qquad (16)$$

4. Все здесь сказанное справедливо в отношении любого интегрального уравнения с ядром вида $G(x, s)\,\mu(s)$, где $G(x, s)$ есть симметрическая регулярная функция в области $a \leqslant (x, s) \leqslant b$ и $\mu(s)$ — положительная непрерывная функция. В частности, все эти результаты имеют место для уравнения (3), эквивалентного краевой задаче (1), (2). В этом случае фундаментальные числа

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

будут представлять квадраты частот свободных гармонических колебаний упругого стержня, а фундаментальные функции

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x), \quad \ldots$$

будут амплитудами этих колебаний. Можно чисто математическим путем доказать, что все фундаментальные числа краевой задачи (1), (2) положительны, независимо от их физического значения как квадратов частот.

В самом деле, если λ_n есть фундаментальное число, а $u_n(x)$ — соответствующая фундаментальная функция, то имеем

$$\lambda_n = \lambda_n \int_a^b \mu(x)\, u_n^2(x)\, dx = \int_a^b EIu_n(x)\, \frac{d^4u_n}{dx^4}\, dx.$$

Производя два раза интеграцию по частям и пользуясь краевыми условиями (2), получим отсюда

$$\lambda_n = EI \int_a^b \left(\frac{d^2u_n}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Эта последняя формула показывает, что $\lambda_n > 0$, потому что $\frac{d^2u_n}{dx^2}$ не может быть равно тождественно нулю. В самом деле, из $\frac{d^2u_n}{dx^2} \equiv 0$ следовало бы $u_n(x) = Ax + B$, и значит, в силу краевых условий (2), $u_n(x) \equiv 0$, что невозможно.

Построив гармонические колебания свободного упругого стержня, удовлетворяющие краевым условиям (2), в виде

$$u_n(x)\, [A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t],$$

мы можем поставить задачу в общей форме.

Определить свободное колебание упругого стержня при краевых условиях (2), если в начальный момент $t = 0$ известны форма прогиба его оси $u(x, 0) = F(x)$ и скорость $\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \Phi(x)$.

В самом деле, искомое колебание получается путем суммирования гармонических колебаний и будет представлено формулой

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, [A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t],$$

где постоянные A_n и B_n должны быть определены по начальным условиям

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x) \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\, u_n(x). \tag{17}$$

Если мы предположим ряды (17) равномерно сходящимися, то коэфициенты A_m и B_m можно найти из этих рядов почленным интегрированием после предварительного умножения на $\mu(x)\, u_m(x)$. Действительно, получаем

$$\int_a^b \mu(x)\, F(x)\, u_m(x)\, dx = A_m, \quad \int_a^b \mu(x)\, \Phi(x)\, u_m(x)\, dx = B_m \sqrt{\lambda_m},$$

так как функции $u_n(x)$ образуют нормированную ортогональную систему в интервале $[a, b]$ относительно веса $\mu(x)$.

В связи с этим возникает следующая математическая проблема.

Каким условиям должна удовлетворять данная функция $F(x)$, чтобы ее можно было представить равномерно сходящимся рядом Фурье фундаментальных функций той или иной краевой задачи?

В дальнейшем эта проблема будет разрешена в общем виде для краевых задач, выражаемых линейными диференциальными уравнениями второго порядка.

5. Определение амплитуды вынужденного колебания упругого стержня приводится к разрешению неоднородного интегрального уравнения (4), как это было показано в § 2 введения. Когда частота внешней силы отлична от частот свободного колебания стержня, то амплитуда вынужденного колебания представляется формулой (14), в которой $f(x) = \int_a^b G(x, s)\, v(s)\, ds$, где $v(s)$ обозначает амплитуду внешней силы, λ — квадрат частоты внешней силы, λ_n — квадраты частот свободных колебаний, $u_n(x)$ — амплитуды свободных колебаний и f_n — коэфициенты Фурье функции $f(x)$ относительно нормированной ортогональной системы $u_n(x)$ с весом $\mu(x)$, выражающим массу стержня в точке x, рассчитанную на единицу длины.

Если частота внешней силы совпадает с одной из частот свободных колебаний стержня, то, вообще говоря, неоднородное интегральное уравнение (4) не разрешимо, что соответствует физически явлению резонанса. Для того чтобы в этом случае имелось решение, необходимо и достаточно потребовать ортогональность амплитуды внешней силы к соответствующим этой частоте амплитудам свободных колебаний, ибо в данном случае условие $\int_a^b f(x)\, u_i(x)\, \mu(x)\, dx = 0$ можно переписать так:

$$\int_a^b \int_a^b G(x, s)\, v(s)\, u_i(x)\, \mu(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b v(x)\, u_i(x)\, dx = 0.$$

При выполнении этого условия амплитуда колебания упругого стержня выражается формулой (16), в которой часть членов с произвольными постоянными зависит от свободных колебаний рассматриваемой частоты, а совокупность остальных членов обусловлена внешней силой.

После этих предварительных замечаний перейдем к подробному математическому анализу краевых задач для обыкновенных линейных диференциальных уравнений второго порядка с точки зрения теории Гильберта — Шмидта интегральных уравнений с симметрическим ядром.

§ 1. Постановка задачи. 1. Рассмотрим общее однородное диференциальное уравнение второго порядка с параметром λ, входящим линейно в коэфициент при u

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\, \frac{du}{dx} + [Q(x) - \lambda R(x)]\, u = 0, \tag{18}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ — непрерывные функции в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Это уравнение всегда можно привести к виду

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=\lambda r(x)u, \tag{19}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — непрерывные функции в заданном интервале, причем $p(x)$, сверх того, положительна и имеет непрерывную производную. Уравнение вида (19) носит название *самосопряженного линейного диференциального уравнения второго порядка.* Для того чтобы общее уравнение (18) привести к виду (19), надо положить

$$\frac{p'}{p}=P, \quad \frac{q}{p}=Q, \quad \frac{r}{p}=R,$$

откуда получим

$$p=e^{\int P dx}, \quad q=Qe^{\int P dx}, \quad r=Re^{\int P dx}.$$

Формулированные выше ограничения в отношении функции p будут всегда выполняться, как это видно из полученного для этой функции выражения.

2. Для сокращения письма будем в дальнейшем употреблять обозначение

$$L(u)\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu. \tag{20}$$

Тогда уравнение (19) примет вид

$$L(u)=\lambda ru. \tag{21}$$

Мы рассмотрим краевую задачу, т. е. проблему определения всех тех решений диференциального уравнения (21), имеющих непрерывные производные двух первых порядков [1]), которые удовлетворяли бы заданным граничным условиям вида

$$\left.\begin{aligned} R_0(u)&\equiv\alpha_1u(a)+\alpha_2u'(a)+\alpha_3u(b)+\alpha_4u'(b)=0,\\ R_1(u)&\equiv\beta_1u(a)+\beta_2u'(a)+\beta_3u(b)+\beta_4u'(b)=0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Условия (22) предполагаются различными между собой, причем постоянные α, равно как постоянные β, не равны одновременно нулю.

Уравнение (21) имеет в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ два линейно независимых решения u_1 и u_2, которые обладают непрерывными вторыми производными. Каждое решение уравнения (21), обладающее непрерывной второй производной, будет выражаться линейно через u_1 и u_2: $u=C_1u_1+ +C_2u_2$. Краевая задача при всяком λ имеет тривиальное решение $u\equiv 0$. Каждое значение параметра λ, для которого наша краевая задача имеет, кроме того, еще нетривиальные решения, называется *фундаментальным числом*, а нетривиальные решения с непрерывными вторыми производными, соответствующие этим значениям параметра λ, носят название *фундаментальных функций* данной краевой задачи.

---

[1]) Из непрерывности $u(x)$ и $u'(x)$ вытекает непрерывность $u''(x)$, коль скоро $u(x)$ есть решение диференциального уравнения (19).

В ближайших параграфах мы будем пользоваться следующим условием (потом будут указаны способы освободиться от него):

$\lambda=0$ *не является фундаментальным числом,* (A)

т. е. краевая задача $L(u)=0, R_0(u)=0, R_1(u)=0$ не имеет других решений с непрерывными вторыми производными, кроме тривиального

$$u\equiv 0.$$

§ 2. Формула Грина. 1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две функции с непрерывными вторыми производными; тогда имеет место следующее тождество:

$$uL(v)-vL(u)=\frac{d}{dx}p(uv'-vu'). \tag{23}$$

Это тождество известно под названием *формулы Грина* и проверяется подстановкой вместо $L(u)$ и $L(v)$ их выражений

$$uL(v)-vL(u)=u\frac{d}{dx}(pv')-v\frac{d}{dx}(pu')=\frac{d}{dx}p(uv'-vu').$$

2. Считая u и v линейно независимыми решениями диференциального уравнения $L(u)=0$, получим как следствие формулы Грина равенство

$$p(uv'-vu')=C,$$

где C — постоянное, отличное от нуля.

Действительно, если бы $C=0$, то мы имели бы

$$uv'-u'v\equiv 0.$$

Подставляя вместо переменного x какое-либо его фиксированное значение x_0 из данного интервала, мы получили бы

$$u_0v_0'-u_0'v_0=0 \quad \text{или} \quad v_0=ku_0,\ v_0'=ku_0'.$$

Отсюда согласно теореме о единственности решения диференциального уравнения $L(u)=0$ при заданных значениях решения и его производной в точке x_0 вытекало бы $v\equiv ku$, т. е. u и v были бы линейно зависимыми, что противоречит условию.

§ 3. Функция Грина. 1. Для каждой краевой задачи вида (21), (22) при выполнении условия (A) существует одна и только одна функция $G(x, s)$, обладающая в качестве функции от x при любом фиксированном значении s из интервала $[a, b]$ следующими свойствами:

1) *G непрерывна в интервале $a \leqslant x \leqslant b$.*

2) *В каждом из подинтервалов $a \leqslant x \leqslant s$ и $s \leqslant x \leqslant b$ функция G имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет уравнению $L(G)=0$.*

3) *Функция G удовлетворяет граничным условиям, т. е. $R_0(G)=0$, $R_1(G)=0$.*

4) *Первая производная функции G имеет при $x=s$ скачок, равный $\frac{1}{p(s)}$, т. е.*

$$G'(s+0, s)-G'(s-0, s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Эта функция называется функцией Грина, принадлежащей данной краевой задаче.

Для построения функции Грина заметим, что для того чтобы $G(x, s)$ удовлетворяла в некотором интервале уравнению $L(G)=0$, имея там непрерывную вторую производную, она должна в этом интервале линейно выражаться через два линейно независимых решения u и v уравнения $L(u)=0$. Поэтому имеем

$$G(x, s)=A_1 u+B_1 v \text{ при } a \leqslant x \leqslant s,$$
$$G(x, s)=A_2 u+B_2 v \text{ при } s \leqslant x \leqslant b,$$

где u и v суть функции от x, а A_1, B_1, A_2 и B_2 не зависят от x и являются функциями от s, подлежащими определению.

Потребуем сначала, чтобы функция $G(x, s)$ удовлетворяла условиям 1) и 4). Эти условия дают нам

$$A_2 u(s)+B_2 v(s)=A_1 u(s)+B_1 v(s),$$
$$A_2 u'(s)+B_2 v'(s)=A_1 u'(s)+B_1 v'(s)+\frac{1}{p(s)},$$

или

$$(A_2-A_1) u(s)+(B_2-B_1) v(s)=0,$$
$$(A_2-A_1) u'(s)+(B_2-B_1) v'(s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Из этой системы двух уравнений мы однозначно определим разности A_2-A_1 и B_2-B_1, ибо определитель этой системы

$$uv'-u'v=\frac{C}{p}$$

отличен от нуля. Теперь остается удовлетворить условию 3). Оно дает

$$R_0(G)=R_{0a}(A_1 u+B_1 v)+R_{0b}(A_2 u+B_2 v)=0,$$
$$R_1(G)=R_{1a}(A_1 u+B_1 v)+R_{1b}(A_2 u+B_2 v)=0,$$

где R_{0a} обозначает первое слагаемое в выражении R_0, содержащее значения функции и производной при $x=a$, а именно

$$R_{0a}(u)=\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a),$$

и аналогично определяются R_{0b}, R_{1a}, R_{1b}. В силу линейности всех этих выражений предыдущие формулы можно записать так:

$$R_0(A_1 u+B_1 v)+R_{0b}[(A_2-A_1) u+(B_2-B_1) v]=0,$$
$$R_1(A_1 u+B_1 v)+R_{1b}[(A_2-A_1) u+(B_2-B_1) v]=0,$$

или

$$A_1 R_0(u)+B_1 R_0(v)=-R_{0b}[(A_2-A_1) u+(B_2-B_1) v],$$
$$A_1 R_1(u)+B_1 R_1(v)=-R_{1b}[(A_2-A_1) u+(B_2-B_1) v].$$

В правых частях стоят известные функции, ибо разности A_2-A_1 и B_2-B_1 нами уже определены. Следовательно, из этой системы мы сможем однозначно определить A_1 и B_1, если только покажем, что определитель

$$\begin{vmatrix} R_0(u) & R_0(v) \\ R_1(u) & R_1(v) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Действительно, допустим противное, т. е. что этот определитель равен нулю. Тогда существуют такие две постоянные C_1 и C_2, не равные одновременно нулю, что

$$C_1 R_0(u)+C_2 R_0(v)=0,$$
$$C_1 R_1(u)+C_2 R_1(v)=0.$$

Последние равенства в силу линейности выражений R запишем в следующей форме:

$$R_0(C_1 u+C_2 v)=0,$$
$$R_1(C_1 u+C_2 v)=0.$$

Функция $C_1 u+C_2 v$ не равна тождественно нулю, так как функции u и v линейно независимы, и является решением уравнения $L(u)=0$, имеющим непрерывную вторую производную и удовлетворяющим краевым условиям $R_0=0$ и $R_1=0$. Но это противоречит условию (A).

Таким образом из сказанного выше следует, что A_1, B_1, A_2 и B_2 однозначно определяются условиями 1), 2), 3) и 4) как непрерывные функции от s в интервале $[a, b]$. Значит, доказаны существование и единственность функции Грина для краевой задачи

$$L(u)=\lambda r u, \quad R_0(u)=0, \quad R_1(u)=0$$

при выполнении условия (A).

2. Построенная функция Грина определяется формулами

$$G(x, s)=A_1(s) u(x)+B_1(s) v(x) \text{ при } a \leqslant x \leqslant s,$$
$$G(x, s)=A_2(s) u(x)+B_2(s) v(x) \text{ при } s \leqslant x \leqslant b,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 будут в силу своего определения непрерывными функциями с непрерывными производными в интервале $[a, b]$.

Отсюда легко получить следующие свойства $G(x, s)$, рассматриваемой в качестве функции от s.

1) *Функция $G(x, s)$ всюду непрерывна.*

Это очевидно для $a \leqslant s < x$ и $x < s \leqslant b$; при $s=x$ непрерывность сохраняется, так как $A_1(x) u(x)+B_1(x) v(x)=A_2(x) u(x)+B_2(x) v(x)$ вследствие первого уравнения системы, определяющей разности A_2-A_1, B_2-B_1.

2) *Производная G'_x имеет при $s=x$ скачок, равный $-\frac{1}{p(x)}$, т. е.*

$$G'_x(x, x-0)-G'_x(x, x+0)=\frac{1}{p(x)}.$$

В самом деле,

$$G'_x(x, x-0)=A_2(x) u'(x)+B_2(x) v'(x),$$
$$G'_x(x, x+0)=A_1(x) u'(x)+B_1(x) v'(x).$$

Вычитая, получаем

$$G'_x(x, x-0) - G'_x(x, x+0) = \frac{1}{p(x)}$$

вследствие второго уравнения системы, определяющей разности $A_2 - A_1$, $B_2 - B_1$.

§ 4. Фундаментальная теорема Гильберта. 1. Рассмотрим неоднородное диференциальное уравнение

$$L(F) = f, \tag{24}$$

где f — непрерывная функция в интервале $[a, b]$, и краевые условия (22):

$$R_0(F) = 0, \quad R_1(F) = 0.$$

Поставим проблему.

Среди всех функций F, обладающих непрерывной второй производной, определить ту, которая удовлетворяет диференциальному уравнению (24) *и данным краевым условиям* (22).

Предполагая условие (А) краевой задачи выполненным, покажем сначала, что формулированная проблема не может иметь двух различных решений. В самом деле, если F_1 и F_2 — два решения данной краевой задачи, то их разность $F = F_1 - F_2$ будет удовлетворять условиям $L(F) = 0$, $R_0(F) = 0$, $R_1(F) = 0$, откуда вследствие (А) вытекает $F \equiv 0$ и, значит, $F_1 \equiv F_2$.

Дадим сначала интуитивно ясное, однако не строгое построение искомого решения краевой задачи, показав затем, что построенная функция действительно является решением нашей задачи.

С этой целью определим функцию $\varphi(x)$ следующим образом:

1) в интервале $a \leqslant x \leqslant s - \varepsilon$ положим $\varphi(x) = 0$;

2) в интервале $s - \varepsilon < x < s + \varepsilon$ примем за $\varphi(x)$ любую непрерывную функцию такую, чтобы площадь, ограниченная кривой $y = \varphi(x)$, была равна единице, т. е. $\int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \varphi(x)\, dx = 1$;

3) в интервале $s + \varepsilon \leqslant x \leqslant b$ примем $\varphi(x) = 0$.

Определив таким образом функцию φ, обозначим через $u = G_\varepsilon(x, s)$ решение краевой задачи $L(u) = \varphi$, $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$. Покажем, что предел этого решения, когда ε стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(x, s) = G(x, s)$, будет функцией Грина.

В самом деле, функция $G(x, s)$ будет удовлетворять всем четырем условиям, однозначно определяющим функцию Грина. В отношении первых трех условий это очевидно. Покажем, что определенная таким образом функция $G(x, s)$ будет удовлетворять и четвертому условию, т. е. ее производная будет иметь требуемый скачок при $x = s$. Интегрируя равенство $L(u) = \varphi$ в пределах от $x = s - \varepsilon$ до $x = s + \varepsilon$, получим

$$\left(p\frac{du}{dx}\right)_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} qu\, dx = \int\limits_{s-}^{s+\varepsilon} \varphi dx,$$

откуда

$$p(s+\varepsilon)\, u'(s+\varepsilon) - p(s-\varepsilon)\, u'(s-\varepsilon) + \int\limits_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} qu\, dx = 1.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и принимая во внимание непрерывность функций p, q, u, получим

$$p(s)\{u'(s+0) - u'(s-0)\} = 1,$$

т. е.

$$u'(s+0) - u'(s-0) = \frac{1}{p(s)}.$$

Заметив это, вернемся к данному уравнению (24). Интервал $[a, b]$ разобьем на n равных частей и образуем вместо уравнения (24) n уравнений вида

$$L(F_k) = f_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $f_k = f$ для всех точек k-го интервала и $f_k = 0$ во всех прочих частичных интервалах, принадлежащих интервалу $[a, b]$. Очевидно, что $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Вследствие линейности уравнения и граничных условий, $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ будет решением данной краевой задачи, если F_k удовлетворяет написанному выше уравнению и граничным условиям.

Согласно сделанному выше замечанию относительно функций Грина мы можем F_k считать приближенно равным $G(x, s) f(s)\, ds$, если n достаточно большое, где s обозначает одну из точек k-го частичного интервала. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим из равенства $F = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$ окончательную формулу

$$F(x) = \int\limits_a^b G(x, s) f(s)\, ds. \tag{25}$$

2. Чтобы дать решение разбираемой здесь краевой задачи, остается проверить, что функция $F(x)$, определенная по формуле (25), действительно удовлетворяет диференциальному уравнению (24), имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет граничным условиям (22).

Чтобы вычислить $F'(x)$, нужно предварительно интеграл (25) разбить на два: один в пределах от a до x, другой в пределах от x до b, потому что производная функции Грина, стоящей под знаком интеграла, имеет в $s = x$ скачок. Итак, представив $F(x)$ в виде

$$F(x) = \int\limits_a^x G(x, s) f(s)\, ds + \int\limits_x^b G(x, s) f(s)\, ds,$$

выполняем диференцирование и находим

$$F'(x) = \int\limits_a^x G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int\limits_x^b G'_x(x, s) f(s)\, ds + \\ + G(x, x-0) f(x) - G(x, x+0) f(x),$$

откуда в силу непрерывности функции Грина относительно аргумента s получаем

$$F'(x) = \int_a^x G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int_x^b G'_x(x, s) f(s)\, ds.$$

Объединяя оба последних интеграла в один, имеем

$$F'(x) = \int_a^b G'(x, s) f(s)\, ds. \tag{25'}$$

Диференцируя формулу (25′) и соединяя после диференцирования два полученных интеграла, найдем

$$F''(x) = \int_a^b G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + [G'_x(x, x-0) - G'_x(x, x+0)] f(x).$$

Но в конце п. 2 § 3 было показано, что

$$G'_x(x, x-0) - G'_x(x, x+0) = \frac{1}{p(x)}.$$

Следовательно, имеем

$$F''(x) = \int_a^b G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + \frac{f(x)}{p(x)}. \tag{25''}$$

Подставляя в диференциальное выражение $L(F)$ вместо F, F', и F'' правые части формул (25), (25′) и (25″), получим

$$L(F) = \int_a^b L[G(x, s)] f(s)\, ds + f(x),$$

откуда видно, что уравнение (24) удовлетворяется, так как оператор L от функции Грина G по определению тождественно равен нулю

$$L[G(x, s)] \equiv 0.$$

Формулы (25), (25′) и (25″) показывают, что функция F и ее производные F', F'' непрерывны, потому что $G(x, s)$ — непрерывная функция, $G'_x(x, s)$ и $G''_{xx}(x, s)$ имеют одну линию разрыва $x = s$, и, следовательно, регулярны, а что касается $f(x)$ и $p(x)$, $p(x) > 0$, то они по условию непрерывны. Наконец, функция $F(x)$, определенная формулой (25), удовлетворяет краевым условиям (22), так как функция Грина $G(x, s)$ удовлетворяет этим условиям при любом значении s, и

$$R_0(F) = \int_a^b R_0[G(x, s)] f(s)\, ds = 0,$$

$$R_1(F) = \int_a^b R_1[G(x, s)] f(s)\, ds = 0.$$

3. Итак, мы доказали следующее предложение:

Диференциальное уравнение $L(F) = f$, где f — непрерывная функция в интервале $[a, b]$, имеет единственное решение F с непрерывной второй производной, удовлетворяющее граничным условиям $R_0(F) = 0$, $R_1(F) = 0$. Это решение F определяется формулой

$$F(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds.$$

Это предложение может быть сформулировано еще таким образом: *Если $f(x)$ есть непрерывная функция, то функция*

$$F(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds$$

имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет диференциальному уравнению $L(F) = f$ и краевым условиям $R_0(F) = 0$, $R_1(F) = 0$. Обратно, если функция $F(x)$ обладает непрерывной второй производной и удовлетворяет краевым условиям $R_0(F) = 0$; $R_1(F) = 0$, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, что

$$F(x) = \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds,$$

а именно

$$f = L(F).$$

В этом заключается содержание так называемой *теоремы Гильберта.* При ее доказательстве мы существенным образом предполагали выполненным условие (A):

Краевая задача $L(F) = 0$, $R_0(F) = 0$, $R_1(F) = 0$ не имеет другого решения, кроме тривиального $F \equiv 0$.

Это условие (A) должно быть выполненным для возможности построения функции Грина краевой задачи.

§ 5. Эквивалентность краевой задачи однородному линейному интегральному уравнению. 1. В § 1 была выяснена постановка следующей краевой задачи.

Определить все те решения диференциального уравнения $L(u) = \lambda r u$, имеющие непрерывные производные второго порядка, которые удовлетворяли бы заданным граничным условиям

$$R_0(u) \equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = 0,$$
$$R_1(u) \equiv \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) + \beta_3 u(b) + \beta_4 u'(b) = 0.$$

По условию данная краевая задача при $\lambda = 0$ не имеет другого решения, кроме тривиального $u(x) \equiv 0$.

Полагая в теореме Гильберта, доказанной в предыдущем параграфе, $f(x) = \lambda r(x) u(x)$, $F(x) = u(x)$, получаем следующее предложение.

Если функция $u(x)$ непрерывна и удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) r(s) u(s)\, ds, \tag{26}$$

то из этого следует, что она имеет непрерывные производные двух первых порядков и удовлетворяет краевой задаче $L(u) = \lambda r u$, $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$. *Обратно, если* $u(x)$, *имея непрерывные производные двух первых порядков, удовлетворяет краевой задаче* $L(u) = \lambda r u$, $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$, *то отсюда следует, что*

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) r(s) u(s)\, ds.$$

Здесь $G(x, s)$ обозначает функцию Грина краевой задачи и по построению является непрерывной функцией своих аргументов; следовательно, всякое абсолютно интегрируемое решение интегрального уравнения (26) необходимо есть непрерывная функция. Вследствие этого в формулировке первой части вышеупомянутой теоремы мы можем требование непрерывности функции $u(x)$ заменить условием ее абсолютной интегрируемости в интервале $[a, b]$. Эта теорема устанавливает эквивалентность краевой задачи и интегрального уравнения (26). Поэтому, если λ является фундаментальным числом для краевой задачи, то оно служит фундаментальным числом и для соответствующего интегрального уравнения и обратно; кроме того, если $u(x)$ является фундаментальной функцией краевой задачи, принадлежащей к фундаментальному числу λ, то она же служит фундаментальной функцией, принадлежащей к фундаментальному числу λ, и для соответствующего интегрального уравнения и обратно.

Заметим, что для данного частного ядра $G(x, s) r(s)$, где $G(x, s)$ — функция Грина, все фундаментальные функции имеют непрерывные вторые производные.

§ 6. Краевая задача с симметрической функцией Грина. 1. Мы видели, что общая краевая задача (21), (22) эквивалентна интегральному уравнению (26), ядро которого зависит от функции Грина. Чтобы иметь возможность прилагать к этому интегральному уравнению результаты Гильберта — Шмидта из теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, мы должны потребовать прежде всего симметричность функции Грина. В связи с этим возникает весьма важный вопрос, при каких граничных условиях функция Грина краевой задачи будет симметрической? Для решения этого вопроса будем отправляться от формулы Грина (§ 2)

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\,[p(uv' - vu')],$$

в которой $u(x)$ и $v(x)$ — любые две функции с непрерывными вторыми производными.

Полагая в этой формуле $u = G(x, s_1)$, $v = G(x, s_2)$, где $s_2 > s_1$, и замечая, что оператор L от функции Грина равен нулю, находим интеграцией в пределах от $x = a$ до $x = s_1$

$$\{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_a^{s_1-0} = 0.$$

Интегрируя то же тождество в пределах от $x = s_1$ до $x = s_2$, а затем от $x = s_2$ до $x = b$, аналогично получим

$$\{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_{s_1+0}^{s_2-0} = 0,$$

$$\{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_{s_2+0}^{b} = 0.$$

Складывая три последних равенства, найдем

$$\{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_a^b + \Big|_{s_1+0}^{s_1-0} + \Big|_{s_2+0}^{s_2-0} = 0.$$

Принимая во внимание разрывы функции $G'(x, s_1)$ в точке $x = s_1$ и функции $G'(x, s_2)$ в точке $x = s_2$, находим

$$G(s_1, s_2) - G(s_2, s_1) = \{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_b^a.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что условием, необходимым и достаточным для симметричности функции Грина, будет

$$\{p(x)[G(x, s_1)G'(x, s_2) - G(x, s_2)G'(x, s_1)]\}_b^a = 0,$$

каковы бы ни были s_1 и s_2. Последнее условие можно в раскрытом виде переписать так:

$$p(a)[u(a)v'(a) - v(a)u'(a)] = p(b)[u(b)v'(b) - v(b)u'(b)],$$

где u и v имеют указанные выше значения.

Пользуясь определителями, запишем это условие в виде

$$p(a)\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = p(b)\begin{vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Заметим теперь, что функции $u = G(x, s_1)$ и $v = G(x, s_2)$ удовлетворяют граничным условиям, т. е.

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = -\alpha_3 u(b) - \alpha_4 u'(b),$$
$$\beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = -\beta_3 u(b) - \beta_4 u'(b),$$
$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = -\alpha_3 v(b) - \alpha_4 v'(b),$$
$$\beta_1 v(a) + \beta_2 v'(a) = -\beta_3 v(b) - \beta_4 v'(b).$$

Последние равенства запишем в виде равенства матриц

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\beta_3 & -\beta_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{Vmatrix},$$

откуда непосредственно вытекает следующее равенство между определителями:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{vmatrix}. \qquad (28)$$

Заметим, что $p(a)$ и $p(b)$ не равны нулю, и предположим, что определители $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) \\ u'(b) & v'(b) \end{vmatrix}$ отличны от нуля. Тогда, сравнивая условие симметричности функции Грина, выражаемое равенством (27), с формулой (28), представим это условие таким образом:

$$p(b)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}. \tag{29}$$

В случае, когда определители в соотношении (27) равны нулю, мы приходим к тому же условию (29) из следующих геометрических соображений. Две четверки чисел $u(a)$, $u'(a)$, $u(b)$, $u'(b)$, и $v(a)$, $v'(a)$, $v(b)$, $v'(b)$ будем рассматривать как однородные декартовы координаты двух точек M_1 и M_2. Тогда граничные условия геометрически выражают то, что прямая M_1M_2 есть линия пересечения плоскостей

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 = 0,$$
$$\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 = 0.$$

Равенство нулю определителей в соотношении (27) означает, что прямая M_1M_2 параллельна горизонтальной плоскости и пересекает ось аппликат. Если бы определитель $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$ не был равен нулю, то уравнения плоскостей можно было бы разрешить относительно x_1 и x_2, и, следовательно, наши плоскости не давали бы в пересечении прямой M_1M_2. Таким образом $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$; в этом случае и определитель $\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}$ равен нулю, потому что иначе уравнения плоскостей можно было бы разрешить относительно x_3 и x_4 и, следовательно, эти плоскости не могли бы пересекаться по прямой M_1M_2. Поэтому оба определителя соотношения (29) в рассматриваемом случае равны нулю, и это соотношение имеет место.

Итак, необходимое и достаточное условие симметричности функции Грина краевой задачи заключается в выполнении равенства (29), содержащего коэфициенты граничных условий и значения функции $p(x)$ на концах. В частности, условие (29) всегда выполняется [при любой функции $p(x)$], если краевые условия имеют вид

$$Au(a) + Bu'(a) = 0,$$
$$Cu(b) + Du'(b) = 0. \tag{30}$$

где A и B, так же как C и D, не равны одновременно нулю.

Условимся в дальнейшем граничные условия (22) при выполнении равенства (29) обозначать через

$$\left.\begin{aligned} R_0^*(u) &\equiv \alpha_1u(a) + \alpha_2u'(a) + \alpha_3u(b) + \alpha_4u'(b) = 0,\\ R_1^*(u) &\equiv \beta_1u(a) + \beta_2u'(a) + \beta_3u(b) + \beta_4u'(b) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Граничные условия (31), в которых коэфициенты связаны равенством (29), гарантируют симметричность функции Грина краевой задачи.

§ 7. Общие теоремы для краевой задачи с симметрической функцией Грина. 1. Вследствие результата § 5 этой главы краевая задача

$$\left.\begin{aligned} L(u) &= \lambda ru,\\ R_0^*(u) = 0,&\quad R_1^*(u) = 0\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda\int_a^b G(x, s)\,r(s)\,u(s)\,ds. \tag{33}$$

В дальнейшем мы будем предполагать непрерывную функцию $r(x)$ не обращающейся в нуль нигде в интервале $[a, b]$, т. е. $r(x) > 0$ или $r(x) < 0$. Очевидно, случай $r(x) < 0$ немедленно приводится к случаю $r(x) > 0$ путем изменения знака у параметра λ, так как перемена знака параметра λ влечет замену $r(x)$ на $-r(x)$. Поэтому нам достаточно считать $r(x) > 0$. В этом случае интегральное уравнение (33) будет иметь ядро вида $G(x, s)r(s)$, где $G(x, s)$ — функция симметрическая и $r(s)$ положительная, и к нему применимы результаты как теории Фредгольма, так и теории Гильберта — Шмидта (см. начало этой главы). Упомянем еще раз результаты теории Гильберта — Шмидта, отмеченные в начале этой главы:

1) *Существуют фундаментальные числа и все они действительные.*

2) *Каждому фундаментальному числу соответствует конечное число линейно независимых фундаментальных функций (в дальнейшем мы покажем, что не более двух), и все они образуют нормированную ортогональную систему относительно веса* $r(x)$, *т. е.*

$$\int_a^b r(x)\,u_n(x)\,u_m(x)\,dx = 0, \quad \textit{если } n \neq m, \quad \textit{и} \int_a^b r(x)\,u_n^2(x)\,dx = 1.$$

3) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n}$ *равномерно сходится, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n} = G(x, s).$$

4) *Итерации функции* G [*с весом* $r(x)$], *т. е. функции*

$$H_2(x, s) = \int_a^b G(x, t)\,G(t, s)\,r(t)\,dt, \ldots,$$

$$H_p(x, s) = \int_a^b H_{p-1}(x, t)\,G(t, s)\,r(t)\,dt, \ldots$$

разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды фундаментальных функций

$$H_p(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n^p} \qquad (p = 2, 3, \ldots).$$

5) *Всякая функция вида*

$$F(x) = \int_a^b G(x, s)\,r(s)\,H(s)\,ds$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{\lambda_n}u_n(x),$$

где

$$F_n=\int_a^b r(s)F(s)u_n(s)\,ds, \quad H_n=\int_a^b r(s)H(s)u_n(s)\,ds.$$

Каждое из этих положений справедливо и для нашей краевой задачи вследствие эквивалентности ее с однородным интегральным уравнением (33). Кроме того, для рассматриваемого ядра $G(x,s)r(s)$, в котором функция $G(x,s)$, кроме общих условий, налагаемых в теории Гильберта-Шмидта [$G(x,s)$ — действительная, непрерывная, не равная тождественно нулю симметрическая функция], удовлетворяет также условиям, определяющим ее как функцию Грина краевой задачи (§ 3), — получаются еще дальнейшие результаты.

6) *Множество фундаментальных чисел λ_n бесконечно.*

В самом деле, предположим, что имеется только конечное число фундаментальных чисел. В силу свойства 3) функция $G(x,s)$ представима в виде

$$G(x,s)=\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n}.$$

Но все функции $u_n(x)$ имеют непрерывные производные двух первых порядков, а потому и функция $G(x,s)$, выражающаяся в конечной форме через функции u_n, должна была бы иметь непрерывные частные производные двух первых порядков, что, однако, противоречит четвертому условию, определяющему функцию Грина, в силу которого ее производная $G'(x,s)$ имеет скачок при $x=s$.

7) *Если функция $F(x)$ имеет непрерывные производные двух первых порядков*[1] *и удовлетворяет граничным условиям $R_0^*(F)=0$, $R_1^*(F)=0$, то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям*

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n u_n(x),$$

где

$$F_n=\int_a^b r(x)F(x)u_n(x)\,dx.$$

Действительно, согласно теореме Гильберта, доказанной в § 4, имеем

$$F(x)=\int_a^b G(x,s)L(F)\,ds.$$

[1] Вторую производную достаточно предположить кусочно-непрерывной.

Полагая

$$L(F)=r(s)H(s),$$

мы видим, что

$$H(s)=\frac{L(F)}{r(s)}$$

есть непрерывная функция, так как $L(F)$ и $r(s)$ непрерывны и, кроме того, $r(s)>0$. Но вследствие свойства 5) функция вида $F(x)=\int_a^b G(x,s)r(s)H(s)\,ds$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье фундаментальных функций

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n u_n(x),$$

где

$$F_n=\int_a^b r(s)F(s)u_n(s)\,ds.$$

8) *Симметрическая функция Грина $G(x,s)$, принадлежащая нашей краевой задаче, всегда является замкнутой.*

Напомним прежде всего, что симметрическая функция $G(x,s)$ называется замкнутой, если не существует никакой непрерывной функции $h(x)$, кроме $h(x)\equiv 0$, удовлетворяющей тождеству

$$\int_a^b G(x,s)h(s)\,ds=0.$$

Для доказательства применим первую половину теоремы Гильберта § 4 настоящей главы, заключающуюся в следующем.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то из равенства

$$F(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)\,ds$$

следует, что $F(x)$ имеет непрерывную вторую производную и является решением краевой задачи $L(F)=f$, $R_0^*(F)=0$, $R_1^*(F)=0$.

Применим эту теорему для случая

$$F(x)\equiv 0,\ f(x)=h(x).$$

Тогда непрерывная функция $f(x)$ должна удовлетворять равенству $L(F)=f$, так как по условию $\int_a^b G(x,s)f(s)\,ds=F(x)$. С другой стороны, $L(F)=L(0)=0$, следовательно, $f(x)\equiv 0$. Итак, всякая непрерывная функция $h(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_a^b G(x,s)h(s)\,ds=0,$$

будет тождественным нулем, что и доказывает замкнутость функции Грина. Из этого предложения вытекает, что фундаментальные функции краевой задачи образуют всегда замкнутую нормированную ортогональную систему, т. е. не существует никакой непрерывной функции, ортогональной ко всем фундаментальным функциям. Иными словами, бесконечная система уравнений

$$\int_a^b r(x)\,h(x)\,u_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

не имеет другого решения, кроме тривиального $h(x) \equiv 0$.

Условимся называть *рангом q* фундаментального числа число линейно независимых фундаментальных функций, ему соответствующих, т. е. кратность фундаментального числа как элемента спектра фундаментальных чисел.

9) *Ранг каждого фундаментального числа q не больше двух, т. е. каждому фундаментальному числу принадлежат не более, чем две линейно независимые фундаментальные функции.*

В самом деле, предположим, что $q > 2$. Тогда будут равны между собой по крайней мере три фундаментальных числа, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Пусть соответствующие фундаментальные функции будут $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$. Таким образом мы будем иметь при $\lambda = \lambda_1$ три различных линейно независимых решения интегрального уравнения (33) или по теореме эквивалентности три различных решения одного и того же однородного линейного диференциального уравнения второго порядка, чего быть не может. Поэтому q не больше двух.

10) *Если краевые условия имеют вид*

$$\left.\begin{aligned} R_0(u) &\equiv Au(a) + Bu'(a) = 0, \\ R_1(u) &\equiv Cu(b) + Du'(b) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

где A и B, так же как C и D, не равны одновременно нулю, то ранг каждого фундаментального числа равен единице, т. е. каждому фундаментальному числу принадлежит только одна фундаментальная функция.

Действительно, допустим, что некоторому фундаментальному числу принадлежат две линейно независимые фундаментальные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} Au_1(a) + Bu_1'(a) &= 0, \\ Au_2(a) + Bu_2'(a) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

причем определитель $u_1(a)\,u_2'(a) - u_1'(a)\,u_2(a)$ не равен нулю. Поэтому должны быть равны нулю A и B, что противоречит условию.

§ 8. Случай отрицательных фундаментальных чисел. 1. Все результаты предыдущего параграфа [кроме (10)] получены в предположении граничных условий общего вида (31), приводящих к симметрической функции Грина (§ 6 этой главы). В приложениях весьма часто встречается случай, когда все фундаментальные числа краевой задачи — одного знака; поэтому является важным выяснить условия, при наличии которых это обстоятельство осуществляется.

Покажем, что если из граничных условий следует

$$[puu']_a^b = 0,$$

то существует наибольшее фундаментальное число; иными словами, может иметься только конечное число положительных фундаментальных чисел. В предыдущем параграфе мы показали, что всегда существует бесконечное множество фундаментальных чисел, причем, вообще говоря, их может находиться бесконечно много и в положительном и в отрицательном направлениях. Пусть $u_n(x)$ — фундаментальная функция, принадлежащая фундаментальному числу λ_n; тогда

$$L(u_n) = \lambda_n r u_n, \quad R_0^*(u_n) = 0, \quad R_1^*(u_n) = 0; \qquad (36)$$

$u_n \not\equiv 0$ и обладает непрерывной производной второго порядка. Умножая обе части равенства (36) на u_n и интегрируя по x в пределах от a до b, получаем

$$\lambda_n = \int_a^b u_n(x)\,L(u_n)\,dx, \qquad (36')$$

потому что

$$\int_a^b r(x)\,u_n^2(x)\,dx = 1.$$

Подставляя в формулу для λ_n вместо $L(u_n)$ его развернутое выражение, будем иметь

$$\lambda_n = \int_a^b \left[u_n \frac{d}{dx}(pu_n') + qu_n^2\right] dx,$$

или

$$\lambda_n = \int_a^b u_n \frac{d}{dx}(pu_n')\,dx + \int_a^b qu_n^2\,dx.$$

Производя в первом интеграле интегрирование по частям, получим

$$\lambda_n = [pu_n u_n']_a^b - \int_a^b pu_n'^2\,dx + \int_a^b qu_n^2\,dx.$$

По условию член, свободный от интегралов, равен нулю, и, следовательно,

$$\lambda_n = -\int_a^b pu_n'^2\,dx + \int_a^b qu_n^2\,dx$$

или

$$-\lambda_n = \int_a^b pu_n'^2\,dx + \int_a^b -\frac{q}{r} ru_n^2\,dx.$$

Но $-\frac{q}{r}$ является непрерывной функцией и поэтому имеет в интервале $[a, b]$ минимум m, т. е. $-\frac{q}{r} \geqslant m$. Следовательно,

$$-\lambda_n \geqslant \int_a^b pu_n'^2\,dx + m, \tag{37}$$

потому что

$$\int_a^b -\frac{q}{r} ru_n^2\,dx \geqslant m \int_a^b ru_n^2\,dx = m.$$

Так как в интервале $[a, b]$ все время $p > 0$, то из неравенства (37) вытекает $-\lambda_n \geqslant m$ или $\lambda_n \leqslant -m$.

Полученное неравенство убеждает нас в том, что существует наибольшее фундаментальное число.

2. Если мы заметим, что конечный интервал может содержать только конечное число фундаментальных значений λ_n, то мы получаем следующий результат.

При $r(x) > 0$ *и* $[puu']_a^b = 0$ *все фундаментальные числа можно расположить в порядке их убывания, начиная от наибольшего:*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_n > \ldots$$

Очевидно, если $r(x) < 0$, то при выполнении условия $[puu']_a^b = 0$ результаты будут обратными, т. е. в этом случае существует наименьшее фундаментальное число и, следовательно, все фундаментальные числа можно расположить в порядке их возрастания, начиная от наименьшего

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

Из формулы $\lambda_n = -\int_a^b pu_n'^2\,dx + \int_a^b qu_n^2\,dx$ мы усматриваем, что если $q < 0$, то все фундаментальные числа отрицательны. Итак, если $r(x) > 0$, $q(x) < 0$, $[puu']_a^b = 0$, то все фундаментальные числа отрицательны; наоборот, если $r(x) < 0$, $q(x) < 0$, $[puu']_a^b = 0$, то все фундаментальные числа положительны.

Последний случай, когда все фундаментальные числа одного знака, интересен в том отношении, что здесь приложима теорема Мерсера (ч. I, гл. III, § 17) о представлении ядра с помощью абсолютно и равномерно сходящегося ряда фундаментальных функций

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n}.$$

Вспомнив, что симметрическая функция Грина всегда замкнутая, мы можем заключить:

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы все фундаментальные числа краевой задачи с симметрической функцией Грина были положительны (отрицательны), состоит в выполнении неравенства

$$I = \int_a^b \int_a^b G(x, s)\,h(x)\,h(s)\,dx\,ds > 0$$

($I < 0$) для любой непрерывной функции $h(x)$.

Примечание. В рассматриваемом случае, когда все фундаментальные числа одного знака, теорема о разложении 7) § 7 этой главы может быть дана в более общей форме. К такому уточнению теоремы разложения нас приводит применение теоремы Мерсера (ч. I, гл. III, § 17), в силу которого, как мы видели, имеет место разложение

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\,u_n(s)}{\lambda_n},$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно относительно совокупности переменных x, s. Эта формула, представляющая выражение функции Грина в явном виде через фундаментальные функции, при заданном s дает разложение непрерывной функции с производной, имеющей разрыв при $x = s$. Построив линейную комбинацию

$$S = a_1 G(x, s_1) + a_2 G(x, s_2) + \ldots,$$

получим непрерывную функцию, первая производная которой делает в заданных точках $s_1, s_2, \ldots$ заданные скачки $\frac{a_1}{p(s_1)}, \frac{a_2}{p(s_2)}, \ldots$ и которая разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по фундаментальным функциям. Так как из всякой непрерывной функции, первая и вторая производные которой имеют лишь конечное число точек разрыва с конечными скачками, можно вычесть такую специально подобранную функцию s, чтобы разность обладала непрерывной первой производной, то мы приходим непосредственно к следующему результату: *для применимости теоремы о разложении достаточно чтобы производные первого и второго порядков непрерывной функции были кусочно-непрерывны.* Само собой понятно, предполагается, что разлагаемая функция удовлетворяет поставленным выше граничным условиям.

§ 9. Замечание относительно случая, когда $r(x)$ в интервале $[a, b]$ обращается в нуль. 1. Вся предыдущая теория краевой задачи существенным образом предполагала выполнение условия $r(x) \neq 0$ во всех точках интервала $[a, b]$. Случай, когда $r(x)$ обращается в нуль в интервале $[a, b]$, был отдельно разобран Гильбертом с помощью теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных, в предположении определенности функции Грина $G(x, s)$. В дальнейшем Марти получил те же результаты, не применяя квадратичных форм, показав, что случай Гильберта включается в класс так называемых симметризуемых ядер, теория которых в существенном была разработана этим автором. Будем называть симметрическую функцию $G(x, s)$ *определенной*, если не существует никакой непрерывной функции $h(x)$, кроме $h(x) \equiv 0$, которая удовлетворяла бы равенству

$$I = \int_a^b \int_a^b G(x, s)\, h(x)\, h(s)\, dx\, ds = 0.$$

Краевая задача с функцией Грина $G(x, s)$ эквивалентна, как мы знаем, интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds.$$

По Гильберту всякое интегральное уравнение вида

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds$$

с определенной симметрической функцией $G(x, s)$ и произвольной непрерывной функцией $r(s)$ называется *полярным интегральным уравнением*, или же *интегральным уравнением третьего рода*. Если мы умножим обе части этого уравнения на $r(x)$ и положим $\overline{f}(x) = f(x)\, r(x)$, $\overline{G}(x, s) = G(x, s)\, r(x)\, r(s)$, то мы получим это уравнение в той форме, в какой его рассматривал Гильберт:

$$r(x)\, u(x) = \overline{f}(x) + \lambda \int_a^b \overline{G}(x, s)\, u(s)\, ds,$$

где ядро $G(x, s)$ есть симметрическое.

Возвращаясь к нашей краевой задаче и предполагая ее функцию Грина $G(x, s)$ симметрической и определенной, мы приходим к необходимости рассмотрения однородного интегрального уравнения третьего рода

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds,$$

где $r(x)$ будем считать произвольной непрерывной функцией, могущей обращаться в нуль в интервале $[a, b]$.

2. Согласно Марти ядро $H(x, s)$ называют *симметризуемым*, если существует такое определенное симметрическое ядро $K(x, s)$, что либо

$$K_1(x, s) = \int_a^b H(x, t)\, K(t, s)\, dt, \text{ либо } K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, H(t, s)\, dt$$

является симметрическим ядром. В рассматриваемом случае ядро $H(x, s) = G(x, s)\, r(s)$ является симметризуемым, если только $G(x, s)$ есть определенное ядро, потому что ядро $K_2(x, s) = \int_a^b G(x, t)\, r(t)\, G(t, s)\, dt$ есть симметрическое. В самом деле,

$$K_2(s, x) = \int_a^b G(s, t)\, r(t)\, G(t, x)\, dt = \int_a^b G(t, s)\, r(t)\, G(x, t)\, dt = K_2(x, s).$$

Относительно симметризуемых ядер доказано, что для них существуют фундаментальные числа и что все они действительные. В заключение заметим, что функция Грина, в частности, будет определенной, если все фундаментальные числа одного знака, потому что всякое симметрическое замкнутое ядро с положительными (отрицательными) фундаментальными числами характеризуется неравенством

$$I = \int_a^b \int_a^b G(x, s)\, h(x)\, h(s)\, dx\, ds > 0 \qquad (I < 0)$$

при любой непрерывной функции $h(x)$, $h(x) \not\equiv 0$.

§ 10. Неоднородная краевая задача. 1. Рассмотрим теперь неоднородную краевую задачу

$$L(u) = \lambda r u + g, \quad R_0^*(u) = 0, \quad R_1^*(u) = 0,$$

где g есть данная непрерывная в интервале $[a, b]$ функция от x. Покажем, что эта краевая задача эквивалентна некоторому неоднородному интегральному уравнению. С этой целью применим снова фундаментальную теорему Гильберта этой главы (§ 4), в которой положим $f = \lambda r u + g$, $F = u$. По предположению r и g непрерывны. Теорема Гильберта будет теперь формулироваться следующим образом.

Если функция $u(x)$ непрерывна, то утверждение, что эта функция имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет краевой задаче

$$L(u) = \lambda r u + g, \quad R_0^*(u) = 0, \quad R_1^*(u) = 0,$$

эквивалентно утверждению, что она удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)\, [\lambda r(s)\, u(s) + g(s)]\, ds =$$

$$= \lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b G(x, s)\, g(s)\, ds.$$

Другими словами, мы имеем следующую теорему.

Неоднородная краевая задача $L(u) = \lambda r u + g$, $R_0^*(u) = 0$, $R_1^*(u) = 0$, где $u(x)$ имеет непрерывную вторую производную, эквивалентна неоднородному интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, u(s)\, ds + f(x),$$

где $u(x)$ непрерывна и $f(x) = \int_a^b G(x, s)\, g(s)\, ds.$

2. Считая, как и прежде, $r(x) > 0$, мы видим, что наша задача эквивалентна интегральному уравнению с ядром $G(x, s)\, r(s)$, в котором $G(x, s)$ есть симметрическая непрерывная функция и $r(s)$ — положительная непрерывная функция. В этом случае применима, кроме теории

Фредгольма, теория Гильберта — Шмидта, главные выводы которой были сформулированы в начале этой главы.

Следовательно, решение неоднородной краевой задачи, имеющее непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по ее фундаментальным функциям

$$u(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} u_n(x),$$

если λ не равно никакому фундаментальному числу, причем

$$f(x) = \int_a^b G(x, s) g(s)\, ds \quad \text{и} \quad f_n = \int_a^b r(s) f(s) u_n(s)\, ds.$$

Далее (см. начало этой главы), если $\lambda = \lambda_p$ есть фундаментальное число, то условие, необходимое и достаточное для разрешимости краевой задачи, заключается в выполнении равенства $\int_a^b r(x) f(x) u_p(x)\, dx = 0$, т. е. в ортогональности относительно веса $r(x)$ выражения $f(x) = \int_a^b G(x, s) g(s)\, ds$ к фундаментальной функции нашей краевой задачи, соответствующей рассматриваемому фундаментальному числу λ_p. Решение краевой задачи в этом случае зависит от произвольного постоянного и выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$u(x) = f(x) + c_p u_p(x) - \lambda_p {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{f_n}{\lambda_p - \lambda_n} u_n(x),$$

где $\sum'$ обозначает суммирование по всем значениям n, кроме $n = p$, далее $f(x) = \int_a^b G(x, s) g(s)\, ds$ и $f_n = \int_a^b r(s) f(s) u_n(s)\, ds$.

Примечание. В том случае, когда ранг фундаментального числа λ_p равен двум, например $\lambda_p = \lambda_{p+1}$, мы будем иметь два условия:

$$\int_a^b r(x) f(x) u_p(x)\, dx = 0,$$

$$\int_a^b r(x) f(x) u_{p+1}(x)\, dx = 0,$$

необходимые и достаточные для разрешимости неоднородной краевой задачи. Решение краевой задачи в этом случае зависит от двух произвольных постоянных и представляется в виде суммы абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(x) = f(x) + c_p u_p(x) + c_{p+1} u_{p+1}(x) - \lambda_p \sum'' \frac{f_n}{\lambda_p - \lambda_n} u_n(x),$$

где $\sum''$ обозначает суммирование по всем значениям n, кроме $n = p$ и $n = p + 1$.

§ 11. Особый случай краевой задачи. 1. Вся предыдущая теория краевой задачи была основана на понятии функции Грина и проводилась в предположении, что $\lambda = 0$ не является фундаментальным числом нашей краевой задачи [условие (A)]. Однако, для некоторых задач математической физики это условие не удовлетворяется. Так, например, краевая задача в теории теплоты

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

при $\lambda = 0$ имеет нетривиальное решение $u = \text{const.} \neq 0$. Назовем этот случай краевой задачи, когда условие (A) не удовлетворяется, *особым*. Как показал Гильберт, в особом случае краевая задача может быть решена, если ввести функцию Грина в „обобщенном смысле", или, иначе, расширенную функцию Грина. Однако, во многих случаях достаточно воспользоваться следующим простым приемом, на который указал Кнезер. Заменим условие (A) более слабым условием (A′):

Существует по крайней мере одно значение с параметра λ, не являющееся фундаментальным числом краевой задачи.

Тогда напишем диференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = \lambda r u$$

в виде $\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + (q - cr) u = (\lambda - c) r u$, или $\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + \bar{q} u = \bar{\lambda} r u$, где положено $\bar{q} = q - cr$, $\bar{\lambda} = \lambda - c$. Очевидно, $\bar{\lambda} = 0$ не будет являться фундаментальным числом краевой задачи $\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + \bar{q} u = \bar{\lambda} r u$, $R_0^*(u) = 0$, $R_1^*(u) = 0$, потому что согласно условию (A′) краевая задача $\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = cru$, $R_0^*(u) = 0$, $R_1^*(u) = 0$ имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$. Так, например, это замечание приложимо к вышеупомянутому примеру

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Очевидно, $\lambda = 1$ не является фундаментальным числом этой краевой задачи.

2. Развернем теперь общий метод Гильберта, примененный им к исследованию особого случая, когда $\lambda = 0$ является фундаментальным числом краевой задачи, основанный на понятии расширенной функции Грина. При изложении этого метода мы будем брать граничные условия $R_0^*(u) = 0$, $R_1^*(u) = 0$ диференциального уравнения $L(u) = \lambda r u$ в частном виде:

$$Au(a) + Bu'(a) = 0, \quad Cu(b) + Du'(b) = 0. \tag{38}$$

Пусть $u_0(x)$ будет нормированная фундаментальная функция, принадлежащая фундаментальному числу $\lambda = 0$; другими словами, $u_0(x)$ имеет вторую непрерывную производную и удовлетворяет уравнениям

$$L(u_0) = 0,$$

$$Au_0(a) + Bu_0'(a) = 0, \quad Cu_0(b) + Du_0'(b) = 0, \quad \int_a^b u_0^2(x)\, dx = 1.$$

Докажем следующее предложение.

Существует одна и только одна функция $G^*(x, s)$, удовлетворяющая в качестве функции от x при любом s из интервала $[a, b]$ следующим условиям:

1) *$G^*(x, s)$ непрерывна в интервале $[a, b]$.*

2) *В каждом из интервалов $a \leqslant x \leqslant s$ и $s \leqslant x \leqslant b$ в отдельности G^* имеет непрерывные производные двух первых порядков и удовлетворяет уравнению $L(G^*) = -u_0(x)u_0(s)$.*

3) *Функция G^* удовлетворяет граничным условиям, т. е.*

$$AG^*(a, s) + BG_x^{*\prime}(a, s) = 0, \quad CG^*(b, s) + DG_x^{*\prime}(b, s) = 0.$$

4) *Производная функции G^* при $x = s$ имеет скачок, равный $\frac{1}{p(s)}$, т. е.* $G_x^{*\prime}(s+0, s) - G_x^{*\prime}(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$.

5) *Функция G^* ортогональна к $u_0(x)$, т. е.*

$$\int_a^b G^*(x, s)\,u_0(x)\,dx = 0.$$

$G^*(x, s)$ называется *функцией Грина в обобщенном смысле*, или *расширенной функцией Грина*. Сравнивая пять условий, определяющих расширенную функцию Грина, с условиями, определяющими обыкновенную функцию Грина (§ 3 этой главы), мы видим, что, во-первых, роль однородного диференциального уравнения $L(u) = 0$ играет здесь неоднородное уравнение $L(u) = -u_0(x)u_0(s)$ и, во-вторых, имеется дополнительное пятое условие; значение его выяснится в дальнейшем.

Приступим к доказательству нашей основной теоремы. Пусть $v(x)$ будет частным решением уравнения $L(u) = -u_0(x)u_0(s)$. Тогда общее его решение будет иметь вид $u = v(x) + \alpha u_0(x) + \beta u_1(x)$, где $u_1(x)$ является каким-нибудь частным решением уравнения $L(u) = 0$, линейно независимым от $u_0(x)$. По формуле Грина $p(u_0u_1' - u_0'u_1) = C \neq 0$, и мы можем выбрать u_1 таким образом, чтобы C было равно единице. Положим

$$G^*(x, s) = v(x) + \alpha_0 u_0(x) + \beta_0 u_1(x), \quad \text{если} \quad a \leqslant x \leqslant s;$$
$$G^*(x, s) = v(x) + \alpha_1 u_0(x) + \beta_1 u_1(x), \quad \text{если} \quad s \leqslant x \leqslant b.$$

Тогда условие 2) будет выполнено. Чтобы удовлетворить условию 3), нужно определить β_0 и β_1 из уравнений

$$R_0^*(G^*) = R_0^*(v) + \beta_0 R_0^*(u_1) = 0$$

и

$$R_1^*(G^*) = R_1^*(v) + \beta_1 R_1^*(u_1) = 0,$$

потому что $R_0^*(u_0) = 0$, $R_1^*(u_0) = 0$.

Последние два уравнения в развернутом виде запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} Av(a) + Bv'(a) + \beta_0[Au_1(a) + Bu_1'(a)] &= 0,\\ Cv(b) + Dv'(b) + \beta_1[Cu_1(b) + Du_1'(b)] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Из этих уравнений (39) мы можем определить β_0 и β_1, так как

$$Au_1(a) + Bu_1'(a) \neq 0 \quad \text{и} \quad Cu_1(b) + Du_1'(b) \neq 0.$$

Далее, из условий 1) и 4) получим

$$(\alpha_0 - \alpha_1)u_0(s) + (\beta_0 - \beta_1)u_1(s) = 0,$$
$$(\alpha_0 - \alpha_1)u_0'(s) + (\beta_0 - \beta_1)u_1'(s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Так как $u_0u_1' - u_0'u_1 = \frac{1}{p(s)}$, то отсюда следует

$$\alpha_0 - \alpha_1 = u_1(s), \quad \beta_0 - \beta_1 = -u_0(s).$$

Первое из этих равенств дает $\alpha_0 = \alpha_1 + u_1(s)$, а α_1 определяется затем из условия 5)

$$\int_a^s [v(x) + (\alpha_1 + u_1(s))u_0(x) + \beta_0 u_1(x)]\,u_0(x)\,dx +$$
$$+ \int_s^b [v(x) + \alpha_1 u_0(x) + \beta_1 u_1(x)]\,u_0(x)\,dx = 0,$$

или в раскрытом виде

$$\int_a^b v(x)u_0(x)\,dx + \alpha_1\int_a^b u_0^2(x)\,dx + u_1(s)\int_a^s u_0^2(x)\,dx +$$
$$+ \beta_0\int_a^s u_1(x)u_0(x)\,dx + \beta_1\int_s^b u_0(x)u_1(x)\,dx = 0,$$

откуда определим α_1, так как $\int_a^b u_0^2(x)\,dx = 1$, а значит, определим и $\alpha_0 = \alpha_1 + u_1(s)$.

Что касается β_0 и β_1, то они уже были найдены, и нам остается показать, что способ, которым определяется разность $\beta_0 - \beta_1$, является следствием определения β_0 и β_1 каждого в отдельности. Это необходимо показать, чтобы закончить построение расширенной функции Грина. Для этого нужно выполнить ряд вычислений. Определяя β_0 и β_1 из уравнений (39), покажем, что их разность $\beta_0 - \beta_1 = -u_0(s)$. В самом деле, последнее равенство перепишется после замены β_0 и β_1 их значениями так:

$$[Av(a) + Bv'(a)][Cu_1(b) + Du_1'(b)] -$$
$$-[Cv(b) + Dv'(b)][Au_1(a) + Bu_1'(a)] =$$
$$= u_0(s)[Au_1(a) + Bu_1'(a)][Cu_1(b) + Du_1'(b)].$$

Остается проверить это равенство; для этого покажем, что коэфициенты при AC, BD, AD, BC в левой части равны соответствующим коэфициентам правой части равенства, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
\begin{vmatrix} v(a) & v(b) \\ u_1(a) & u_1(b) \end{vmatrix} &= u_0(s)\,u_1(a)\,u_1(b), \\
\begin{vmatrix} v'(a) & v'(b) \\ u_1'(a) & u_1'(b) \end{vmatrix} &= u_0(s)\,u_1'(a)\,u_1'(b), \\
\begin{vmatrix} v(a) & v'(b) \\ u_1(a) & u_1'(b) \end{vmatrix} &= u_0(s)\,u_1(a)\,u_1'(b), \\
\begin{vmatrix} v'(a) & v(b) \\ u_1'(a) & u_1(b) \end{vmatrix} &= u_0(s)\,u_1'(a)\,u_1(b).
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Вспомним, что $v(x)$ есть частное решение диференциального уравнения $L(u) = -u_0(x)\,u_0(s)$, а $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения $L(u) = 0$. Применяя метод вариации произвольных постоянных, мы можем $v(x)$ представить через $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Действительно, положим $v(x) = Pu_0(x) + Qu_1(x)$, где P и Q — функции от x, подлежащие определению. Чтобы удовлетворить уравнению $L(v) = -u_0(x)\,u_0(s)$, нужно принять

$$P'u_0(x) + Q'u_1(x) = 0,$$
$$P'u_0'(x) + Q'u_1'(x) = -\frac{u_0(x)\,u_0(s)}{p(x)},$$

откуда

$$P' = u_0(s)\,u_0(x)\,u_1(x),$$
$$Q' = -u_0(s)\,u_0^2(x),$$

так как определитель системы $u_0(x)\,u_1'(x) - u_0'(x)\,u_1(x)$ равен $\frac{1}{p(x)}$. Зная P' и Q', квадратурами определим P и Q и получим следующее выражение для $v(x)$:

$$v(x) = -u_0(s)\,u_0(x)\int_x^b u_0(t)\,u_1(t)\,dt - u_0(s)\,u_1(x)\int_a^x u_0^2(t)\,dt.$$

До сих пор $u_1(x)$ было произвольным решением однородного уравнения $L(u) = 0$, линейно независимым от $u_0(x)$, подчиненным лишь условию, чтобы постоянное C формулы Грина было равно единице, т. е. $p(u_0u_1' - u_0'u_1) = 1$. Сохраняя все эти условия, мы можем, сверх того, считать $u_1(x)$ ортогональным к $u_0(x)$, так как в противном случае можно заменить $u_1(x)$ линейной комбинацией u_0 и u_1. Действительно, можно положить

$$U_1(x) = -u_0(x)\int_a^b u_0(x)\,u_1(x)\,dx + u_1(x);$$

тогда $u_0(x)$ и $U_1(x)$ будут линейно независимыми решениями уравнения $L(u) = 0$, ортогональными между собой, и условие $p(u_0U_1' - u_0'U_1) = 1$ также будет сохранено. Итак, мы вправе считать $u_0(x)$ и $u_1(x)$ ортогональными в интервале $[a, b]$. Обращаясь теперь к проверке равенств (40), подсчитаем сначала входящие в них значения функции v и ее производной на концах интервала $[a, b]$

$$v(a) = 0, \quad v(b) = -u_0(s)\,u_1(b),$$
$$v'(a) = u_0(s)\,u_0^2(a)\,u_1(a) - u_0(s)\,u_1(a)\,u_0^2(a),$$

т. е.

$$v'(a) = 0,$$

далее,

$$v'(b) = u_0(s)\,u_0^2(b)\,u_1(b) - u_0(s)\,u_1'(b) - u_0(s)\,u_1(b)\,u_0^2(b),$$

т. е.

$$v'(b) = -u_0(s)\,u_1'(b).$$

Внося эти значения в равенства (40), убеждаемся в справедливости этих равенств.

Докажем теперь, что построенная функция $G^*(x, s)$ симметрична. Действительно, пусть будет $a \leqslant s < t \leqslant b$. Умножим обе части равенства $L\{G^*(x, s)\} = -u_0(x)\,u_0(s)$ на $G(x, t)$, обе части равенства $L\{G^*(x, t)\} = -u_0(x)\,u_0(t)$ на $-G^*(x, s)$ и сложим результаты почленно; далее проинтегрируем по x в пределах от a до s, от s до t и от t до b и, наконец, сложим эти окончательные равенства. Тогда мы получим

$$\{p(x)\,[G^*(x, t)\,G_x^{*\prime}(x, s) - G^*(x, s)\,G_x^{*\prime}(x, t)]\}\Big|_a^{s-0} + \{\ldots\}\Big|_{s+0}^{t-0} + \{\ldots\}\Big|_{t+0}^{b} =$$
$$= u_0(t)\int_a^b G^*(x, s)\,u_0(x)\,dx - u_0(s)\int_a^b G^*(x, t)\,u_0(x)\,dx.$$

Правая часть есть нуль вследствие условия 5). Что касается левой части, то подстановка при $x = a$ и $x = b$ дает нуль вследствие граничных условий; таким образом останется

$$\{p(x)\,[G^*(x, t)\,G_x^{*\prime}(x, s) - G^*(x, s)\,G_x^{*\prime}(x, t)]\}\Big|_{s+0}^{s-0} + \{\ldots\}\Big|_{t+0}^{t-0} = 0.$$

Пользуясь непрерывностью функции G^* и прерывностью ее производной $G_x^{*\prime}$ на диагонали со скачком, равным $\frac{1}{p(s)}$, получим $-G^*(s, t) + G^*(t, s) = 0$ или $G^*(t, s) = G^*(s, t)$, что и нужно.

3. Существенно обратить внимание на то обстоятельство, что расширенная функция Грина единственным образом определяется заданием диференциального оператора $L(u)$ и краевых условий $Au(a) + Bu'(a) = 0$, $Cu(b) + Du'(b) = 0$. В самом деле, ее построение проводится однозначно после того как мы ввели $u_0(x)$ — частное нормированное решение однородного диференциального уравнения $L(u) = 0$, удовлетворяющее обоим краевым условиям. Наше положение будет обосновано, если мы покажем, что функция $u_0(x)$ единственная. Действительно, предположив, что существует другое решение U_0 диференциального уравнения $L(u) = 0$, линейно независимое от u_0, удовлетворяющее тем же краевым условиям, мы немедленно приходим к противоречию с формулой Грина $p(u_0U_0' - u_0'U_0) = C \neq 0$, потому

что вследствие граничных условий выражение в скобках равно нулю при $x = a$ и $x = b$.

4. Обратимся теперь к анализу краевой задачи в особом случае. Посмотрим, как будет выражаться фундаментальная теорема Гильберта, рассмотренная в § 4, для основного случая. Пусть имеем неоднородное диференциальное уравнение

$$L(F) = f, \tag{41}$$

где f — непрерывная функция в интервале $[a, b]$, ортогональная к функции $u_0(x)$, т. е. подчиненная условию $\int\limits_a^b f(x) u_0(x)\,dx = 0$, и удовлетворяющая краевым условиям

$$AF(a) + BF'(a) = 0, \quad CF(b) + DF'(b) = 0. \tag{42}$$

Поставим следующую проблему.

Среди всех функций F, обладающих непрерывной второй производной, определить ту, которая удовлетворяет диференциальному уравнению (41), краевым условиям (42) и ортогональна к $u_0(x)$, т. е.

$$\int\limits_a^b F(x) u_0(x)\,dx = 0. \tag{43}$$

Покажем сначала, что сформулированная краевая задача не может иметь двух различных решений. В самом деле, если F_1 и F_2 — два решения данной краевой задачи, то их разность $F = F_1 - F_2$ будет удовлетворять условиям

$$L(F) = 0, \quad AF(a) + BF'(a) = 0, \quad CF(b) + DF'(b) = 0,$$
$$\int\limits_a^b F(x) u_0(x)\,dx = 0.$$

Из первых трех условий вытекает, что $F(x) = \text{const.} \cdot u_0(x)$, а затем из последнего, вспомнив, что $\int\limits_a^b u_0^2(x)\,dx = 1$, получим $F(x) \equiv 0$, и значит, $F_1 \equiv F_2$.

5. Покажем теперь, что функция

$$F(x) = \int\limits_a^b G^*(x, s) f(s)\,ds \tag{44}$$

есть решение нашей задачи. Произведя те же выкладки, что и в § 4, получим

$$L(F) = \int\limits_a^b L(G^*(x, s)) f(s)\,ds + f(x).$$

Так как $L(G^*(x, s)) = -u_0(x) u_0(s)$, то $L(F) = -u_0(x) \int\limits_a^b u_0(s) f(s)\,ds + f(x) = f(x)$, потому что $f(x)$ по условию ортогональна к $u_0(x)$.

Так же как и в § 4 покажем, что $F(x)$ удовлетворяет краевым условиям и имеет непрерывную вторую производную. Остается обнаружить ее ортогональность к $u_0(x)$. Имеем

$$\int\limits_a^b F(x) u_0(x)\,dx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b G^*(x, s) u_0(x) f(s)\,dx\,ds =$$
$$= \int\limits_a^b f(s)\,ds \int\limits_a^b G^*(x, s) u_0(x)\,dx = 0,$$

потому что вследствие условия 5), определяющего G^*, имеем тождественно относительно s

$$\int\limits_a^b G^*(x, s) u_0(x)\,dx = 0.$$

Доказанное предложение может быть высказано так:

Если $f(x)$ есть непрерывная функция, ортогональная к $u_0(x)$, то функция $F(x) = \int\limits_a^b G^*(x, s) f(s)\,ds$ имеет непрерывную вторую производную, ортогональна к $u_0(x)$ и удовлетворяет диференциальному уравнению $L(F) = f$ с краевыми условиями (42). Обратно, *если функция $F(x)$ с непрерывной второй производной, ортогональная к $u_0(x)$, удовлетворяет краевым условиям* (42), *то существует такая непрерывная функция $f(x)$, ортогональная к $u_0(x)$, что*

$$F(x) = \int\limits_a^b G^*(x, s) f(s)\,ds,$$

а именно

$$f = L(F).$$

В этом заключается содержание теоремы Гильберта для особого случая краевой задачи.

6. Применяя эту теорему к случаю, когда $F = u$, $f = \lambda u$, $\lambda \neq 0$, и замечая, что $\int\limits_a^b u u_0\,dx = 0$, так как

$$\lambda \int\limits_a^b u_0 u\,dx = \int\limits_a^b [u_0 L(u) - u L(u_0)]\,dx =$$
$$= [p(u_0 u' - u_0' u)]_a^b = 0,$$

а также, что $G^*(x, s)$ ортогональна к $u_0(x)$, получаем следующее предложение об эквивалентности краевой задачи и однородного интегрального уравнения:

Если $u(x)$ непрерывна, то утверждение, что и имеет непрерывную вторую производную, $L(u) = \lambda u$, $Au(a) + Bu'(a) = 0$, $Cu(b) +$

$+Du'(b)=0$, $\lambda \neq 0$, *равносильно утверждению, что*

$$u(x)=\lambda \int_a^b G^*(x, s)\, u(s)\, ds. \tag{45}$$

Этим устанавливается эквивалентность краевой задачи в особом случае с интегральным уравнением.

7. Согласно второй части теоремы Гильберта, всякая функция $F(x)$ с непрерывной второй производной, удовлетворяющая граничным условиям $AF(a)+BF'(a)=0$, $CF(b)+DF'(b)=0$ и ортогональная к $u_0(x)$, может быть представлена в виде

$$F(x)=\int_a^b G^*(x, s)\, L(F)\, ds.$$

Следовательно, эта функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по фундаментальным функциям интегрального уравнения (45); эти функции будут фундаментальными для нашей краевой задачи, принадлежащими фундаментальным числам, отличным от нуля.

Итак, имеем предложение.

Если $F(x)$ имеет непрерывную вторую производную, удовлетворяет краевым условиям $AF(a)+BF'(a)=0$, $CF(b)+DF'(b)=0$ и ортогональна к $u_0(x)$, то

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n u_n(x),$$

где

$$F_n=\int_a^b F(x)\, u_n(x)\, dx,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно.

Обратим внимание на то, что требование ортогональности функции $F(x)$ к $u_0(x)$ является и необходимым условием представимости этой функции при помощи ряда фундаментальных функций, потому что функция $u_0(x)$, ортогональная к ядру $G^*(x, s)$, будет ортогональной ко всем его фундаментальным функциям $u_n(x)$. В связи с этим интересно отметить, что в противоположность нормальному случаю симметрическое ядро $G^*(x, s)$ — расширенная функция Грина — не будет замкнутым, и принадлежащая ему система фундаментальных функций $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ будет открытой нормированной ортогональной системой.

8. Можно воспользоваться теоремой Гильберта для особого случая, чтобы свести неоднородную краевую задачу к интегральному уравнению. Действительно, рассмотрим неоднородную краевую задачу $L(u)=\lambda u+g$, $Au(a)+Bu'(a)=0$, $Cu(b)+Du'(b)=0$, где g есть данная функция от x, непрерывная в интервале (a, b) и ортогональная к $u_0(x)$. Применяя теорему Гильберта, положим $f=\lambda u+g$, $F=u$.

Ортогональность к $u_0(x)$ функций f и F будет выполнена, потому что g по условию ортогональна к $u_0(x)$; повторяя рассуждения, приведенные в § 6 настоящей главы, получим, что $u=F$ ортогональна к $u_0(x)$. Отсюда получаем теорему.

Если функция $u(x)$ непрерывна, то утверждение, что эта функция имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет краевой задаче

$$L(u)=\lambda u+g,$$
$$Au(a)+Bu'(a)=0,$$
$$Cu(b)+Du'(b)=0,$$

где

$$\int_a^b g(x)\, u_0(x)\, dx=0,$$

эквивалентно утверждению, что она удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x)=\int_a^b G^*(x, s)[\lambda u(s)+g(s)]ds=\lambda\int_a^b G^*(x, s)\, u(s) ds+\int_a^b G^*(x, s) g(s) ds.$$

Другими словами, мы имеем следующее предложение.

Неоднородная краевая задача

$$L(u)=\lambda u+g,\quad Au(a)+Bu'(a)=0,\quad Cu(b)+Du'(b)=0,$$

где $\int_a^b g(x)\, u_0(x)\, dx=0$, *а $u(x)$ имеет непрерывную вторую производную, эквивалентна неоднородному интегральному уравнению*

$$u(x)=\lambda\int_a^b G^*(x, s)\, u(s)\, ds+f(x),$$

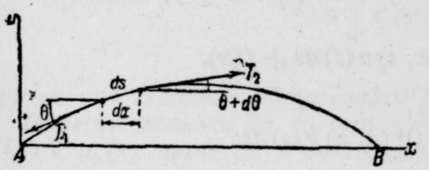
где $u(x)$ непрерывна и $f(x)=\int_a^b G^*(x, s)\, g(s)\, ds$.

Глава II

РАЗЛИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Можно было бы рассмотреть очень много различных проблем математической физики, приводящихся к краевым задачам для обыкновенных линейных диференциальных уравнений второго порядка. Чтобы иллюстрировать общую теорию краевой задачи, построенную в предыдущей главе, мы ограничимся лишь тремя вопросами: во-первых, разберем одну задачу на колебания, ограничиваясь простейшим случаем струны; это даст нам пример на общий основной случай краевой задачи. Во-вторых, рассмотрим задачу о распространении теплоты в брусе как пример на особый случай краевой задачи. И, наконец, в-третьих, выясним связь краевой задачи с общей теорией вариационного исчисления, разобрав применения результатов предыдущей главы к различным проблемам вариационного исчисления.

§ 1. Колебание струны. 1. Рассмотрим натянутую струну, укрепленную в двух точках A и B. В нормальном положении струна принимает форму прямой линии, соединяющей эти точки. Если она деформирована, то натяжение действует так, что струна стремится занять первоначальное положение и при этом приходит в движение. Пусть такая деформация произведена, и вследствие нее струна находится в движении, совершая поперечные колебания около положения равновесия. Допустим, что в момент времени t ее форма изображается кривой $u=f(x, t)$ (черт. 1).



Черт. 1.

Обозначим натяжение через T. Тогда на элемент ds действуют две силы T_1 и T_2, каждая величины T, но имеющие направления, несколько отличные от противоположных, в силу кривизны элемента. Если угол касательной в точке x обозначим через θ, а в точке $x+dx$ через $\theta+d\theta$, то компоненты сил T_1 и T_2 по оси u будут $-T\sin\theta$ и $T\sin(\theta+d\theta)$. Если dx очень мало, то сумма этих сил будет приближенно равна $Td(\sin\theta)=T\cos\theta\, d\theta$. Эта последняя сила вызывает ускорение элемента в направлении оси u и поэтому приводит к уравнению

$$m\, ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\cos\theta\, d\theta,$$

где $m\, ds$ — масса рассматриваемого элемента. Если u очень мало, как это в действительности и бывает, то $\cos\theta$ почти равен единице, тогда как θ приближенно равно $\operatorname{tg}\theta=\frac{\partial u}{\partial x}$. Также ds отличается от dx на бесконечно малую величину высшего порядка.

Приняв все это во внимание, мы можем переписать диференциальное уравнение в виде

$$m\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Td\frac{\partial u}{\partial x}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \quad \text{или} \quad m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначая $\frac{T}{m}=\frac{T}{k\sigma}$ через a^2, получаем диференциальное уравнение колеблющейся струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где положено $a^2=\frac{T}{k\sigma}$, причем T — натяжение, k — плотность и σ — площадь поперечного сечения струны. В общем случае неоднородной струны k и σ являются заданными функциями от x, и, значит, a^2 есть данная всюду положительная функция от x. В случае однородной струны постоянного поперечного сечения a^2 есть данное положительное постоянное.

2. Задача о колеблющейся струне сводится, таким образом, к определению функции $u=f(x, t)$, удовлетворяющей диференциальному уравнению в частных производных (1), а также граничным условиям

$$u(0, t)\equiv 0, \quad u(1, t)\equiv 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0)=f(x), \quad u_t'(x, 0)=F(x), \tag{3}$$

причем $f(0)=0$, $f(1)=0$, $F(0)=0$, $F(1)=0$.

Будем искать решение уравнения (1) в виде $u=X(x)\,T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$X(x)\,T''(t)=a^2X''(x)\,T(t),$$

откуда следует

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{a^2X''(x)}{X(x)}.$$

Но левая часть зависит только от t, правая — только от x, и обе они равны друг другу. Так как правая часть не меняется со временем, то и левая не должна изменяться со временем; точно так же левая часть не изменяется с изменением x, а потому и правая часть не должна зависеть от x. Таким образом обе части не зависят ни от x, ни от t, а равны одному и тому же постоянному λ, значение которого неизвестно. Следовательно, мы получаем два обыкновенных диференциальных уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{\lambda}{a^2}X, \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$X(0)=0, \quad X(1)=0, \tag{5}$$

и

$$\frac{d^2T}{dt^2}=\lambda T. \tag{6}$$

3. Краевая задача (4), (5) принадлежит к типу

$$L(X)=\lambda rX, \quad R_0^*(X)=0, \quad R_1^*(X)=0, \quad [pXX']_a^b=0,$$

причем в данном случае в интервале $[0, 1]$ $p=1$, $q=0$, $r=\frac{1}{a^2}>0$. Очевидно, условие (А) краевой задачи здесь выполнено, потому что решение краевой задачи при $\lambda=0$ есть тождественный нуль. Следовательно, к рассматриваемому случаю приложимы все результаты, полученные общим анализом краевой задачи в нормальном случае. В частности (гл. I, § 7), все фундаментальные числа образуют бесконечное множество действительных чисел, каждое ранга 1 и все они отрицательны согласно сказанному в § 8 гл. I. Чтобы заменить нашу краевую задачу эквивалентным ей интегральным уравнением (гл. I, § 8), нужно построить функцию Грина (гл. I, § 3) данной краевой задачи. Согласно условиям, определяющим функцию Грина $G(x, s)$, эта последняя в качестве функции x должна быть: 1) непрерывной в интервале $[0, 1]$; 2) в каждом из подинтервалов $0 \leqslant x \leqslant s$, $s \leqslant x \leqslant 1$ в отдельности $\frac{d^2G}{dx^2}=0$; 3) $G(0, s)=0$, $G(1, s)=0$; 4) $G'_x(s+0, s)-G'_x(s-0, s)=1$.

Вследствие условия 2) эта функция должна иметь вид

$$G(x, s)=\begin{cases}\alpha_0 x+\beta_0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s,\\ \alpha_1 x+\beta_1 & \text{при } s \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

Из условия 3) следует $\beta_0=0$, $\alpha_1+\beta_1=0$, т. е.

$$G(x, s)=\begin{cases}\alpha_0 x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s,\\ \beta_1(1-x) & \text{при } s \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

По условию 1) $\alpha_0 s=\beta_1(1-s)$, откуда $\alpha_0=\rho(1-s)$, $\beta_1=\rho s$ и, значит,

$$G(x, s)=\begin{cases}\rho(1-s)x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s,\\ \rho s(1-x) & \text{при } s \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

Наконец, из условия 4) находим $-\rho s-\rho(1-s)=1$, откуда $\rho=-1$ и окончательно получаем следующее выражение функции Грина:

$$G(x, s)=\left\{\begin{array}{ll}-(1-s)x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant s,\\ -(1-x)s & \text{при } s \leqslant x \leqslant 1.\end{array}\right\} \tag{7}$$

Данная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$X(x)=\lambda\int_0^1 \frac{G(x, s)}{a^2(s)}X(s)\,ds$$

с ядром $\frac{G(x, s)}{a^2(s)}$, где $G(x, s)$ — симметрическая функция.

4. Согласно § 7 гл. I фундаментальные функции

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x),\ \ldots$$

краевой задачи (4), (5) образуют нормированную ортогональную систему в интервале $[0, 1]$ с весом $\frac{1}{a^2(s)}$, так что

$$\int_0^1 \frac{1}{a^2(x)}X_m(x)X_n(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad m \neq n \text{ и } \int_0^1 \frac{1}{a^2(x)}X_n^2(x)\,dx=1.$$

Что касается уравнения (6), то его общее решение при $\lambda=\lambda_n$, $\lambda_n<0$ будет

$$T(t)=A_n\cos\sqrt{-\lambda_n}\,t+B_n\sin\sqrt{-\lambda_n}\,t.$$

Поэтому предполагаемое решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), будет вида

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{-\lambda_n}\,t+B_n\sin\sqrt{-\lambda_n}\,t)\,X_n(x). \tag{8}$$

Чтобы эта функция была решением нашей задачи, необходимо еще потребовать выполнение начальных условий (3)

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)=f(x),\\ u'_t(x, 0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{-\lambda_n}\,B_nX_n(x)=F(x).\end{array}\right\} \tag{9}$$

Но $f(x)$ и $F(x)$ являются заданными функциями. Поэтому условия (9) будут выполнены, если мы сможем так определить коэфициенты A_n и B_n, чтобы ряды, входящие в формулы (9), действительно представляли данные функции $f(x)$ и $F(x)$. Так как функции f и F удовлетворяют граничным условиям задачи $f(0)=0$, $f(1)=0$, $F(0)=0$, $F(1)=0$, то из результатов § 7 гл. I следует, что если f и F имеют непрерывные вторые производные, то они действительно разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды фундаментальных функций и коэфициенты A_n и B_n формул (9) определяются почленным интегрированием этих формул после умножения на $\frac{1}{a^2(x)}X_m(x)$:

$$A_m=\int_0^1 \frac{1}{a^2(x)}f(x)X_m(x)\,dx,$$

$$(m=1, 2, \ldots).$$

$$\sqrt{-\lambda_m}\,B_m=\int_0^1 \frac{1}{a^2(x)}F(x)X_m(x)\,dx$$

Функция $u(x, t)$, представленная абсолютно и равномерно сходящимся рядом (8), удовлетворяет граничным и начальным условиям (2)

(3) нашей задачи. Она будет удовлетворять и диференциальному уравнению (1), если ряд (8) допускает почленное диференцирование дважды по x и t. Заметив, что $X_n''(x) = \frac{\lambda_n}{a^2(x)} X_n(x)$, мы видим, что это равносильно требованию, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A_n \cos \sqrt{-\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{-\lambda_n}\, t) X_n(x)$$

сходился равномерно относительно x и t.

5. В случае однородной струны a^2 есть величина постоянная, и, как легко видеть,

$$\lambda_n = -n^2\pi^2a^2, \quad X_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x.$$

В этом случае

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi at + B_n \sin n\pi at) \sin n\pi x.$$

Коэфициенты A_n и B_n определяются из условий

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x,$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n n\pi a \sin n\pi x.$$

Это будут тригонометрические ряды Фурье для функций $f(x)$ и $F(x)$. Для разложимости произвольной функции в равномерно сходящийся тригонометрический ряд синусов в интервале [0, 1] достаточно, чтобы эта функция была непрерывной в интервале [0, 1], обращалась в нуль на концах интервала и имела конечное число максимумов и минимумов. Эти условия слабее тех, которые мы требовали в общем случае неоднородной струны (конечное число максимумов и минимумов вместо непрерывности второй производной). Очевидно, для A_n и B_n имеем формулы

$$A_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x\, dx, \quad n\pi a B_n = 2\int_0^1 F(x) \sin n\pi x\, dx.$$

Рассматривая функцию $u(x, t)$, мы видим, что она представлена в виде суммы функций вида

$$u_n(x, t) = (A_n \cos n\pi at + B_n \sin n\pi at) \sin n\pi x.$$

Таким образом u_1 является периодической функцией относительно t с периодом $T_1 = \frac{2}{a}$, это есть период основного тона. Функция u_n имеет период $T_n = \frac{2}{na} = \frac{T_1}{n}$ и амплитуду, равную $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. Тон с периодом $\frac{T_1}{n}$ называется n-м гармоническим обертоном. Тембр звука зависит от амплитуд различных гармонических обертонов. Для неоднородной струны u_n также является периодической функцией, с периодом $T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda_n}}$, уменьшающимся с увеличением n. Так как, однако, различные периоды уже не являются дробями от T_1, то результирующее движение непериодично (оно будет почти периодичным в смысле теории Бора).

§ 2. Распространение теплоты в брусе. 1. Теория распространения теплоты в брусе основывается на следующих физических законах:

1) Обозначим через dm массу элемента проводника, нагретую до температуры θ, и через c — теплоемкость этого элемента. Тогда количество теплоты, необходимое для того, чтобы поднять температуру этого элемента от θ до $\theta + d\theta$, выразится формулой

$$dq = c\, dm\, d\theta.$$

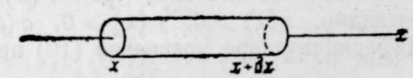
2) Пусть $d\omega$ будет элемент площадки, проходящей через внутреннюю точку P проводника теплоты, n — нормаль к элементу, направленная в сторону потока тепла, k — внутренняя проводимость в точке P. Тогда количество теплоты, протекающей через площадку $d\omega$ в элемент времени dt, выражается формулой

$$dq = -k \frac{\partial\theta}{\partial n} d\omega\, dt.$$

3) Пусть $d\omega$ будет элемент поверхности проводника, содержащий точку P, h — внешняя проводимость в точке P, θ — температура проводника в этой точке, Θ — температура окружающей среды у точки P. Тогда количество теплоты, протекающей через элемент поверхности $d\omega$ в элемент времени dt, будет представляться формулой

$$dq = h(\theta - \Theta)\, d\omega\, dt.$$

Применим теперь эти законы для математического выражения распространения теплоты по прямому брусу, расположенному вдоль по оси x, с поперечным сечением σ, малым по сравнению с длиной, так что температуру θ на этом сечении можно рассматривать как постоянную. Таким образом θ будет функцией от x и t: $\theta = f(x, t)$. Допустим, что наш брус помещен в среду с температурой нуль, причем он имеет заданную начальную температуру $f(x, 0) = f(x)$. Взяв элемент бруса длины dx, мы можем его рассматривать как цилиндр (черт. 2).



Черт. 2.

Согласно 2) количество теплоты, входящей через сечение x, будет $-k\sigma \frac{\partial\theta}{\partial x} dt$, а количество теплоты, вытекающей через сечение $x + dx$, будет

$$\left[-k\sigma \frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{x+dx} dt = -k\sigma \frac{\partial\theta}{\partial x} dt - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\sigma \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) \cdot dt\, dx.$$

Согласно 3) количество теплоты, вытекающей через боковую поверхность цилиндра, будет $h\theta l\, dx\, dt$, где l есть длина окружности поперечного сечения. Отсюда полное количество теплоты, входящей в элемент бруса в элемент времени dt, есть

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\sigma\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-h\theta l\right]dx\,dt.$$

Это количество теплоты увеличивает температуру элемента за промежуток времени dt на $\frac{\partial\theta}{\partial t}dt$, и, следовательно, согласно 1) оно равно $c\rho\sigma\,dx\,\frac{\partial\theta}{\partial t}dt$, где ρ есть плотность.

Итак, приравнивая друг другу два найденных различными путями выражения для одного и того же количества теплоты, получим диференциальное уравнение в частных производных

$$c\rho\sigma\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\sigma\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-h\theta l. \tag{10}$$

Температура θ кроме начального условия должна удовлетворять определенным краевым условиям. Действительно, количество теплоты, уходящей в конце $x=a$ бруса за промежуток времени dt, будет согласно 3) равно $h\theta\sigma\,dt$, а с другой стороны, количество теплоты, протекающей в промежуток времени dt через поперечное сечение $x=a+{}$ $+\Delta a$ справа налево, есть согласно 2) $\left[k\sigma\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{a+\Delta a}dt$. Предел последнего выражения при $\Delta a\to 0$ должен быть равен $h\theta\sigma\,dt$. Отсюда получается первое краевое условие:

$$\left[h\theta-k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_a=0.$$

Аналогично, рассматривая течение теплоты у другого конца $x=b$ бруса, мы получим второе краевое условие

$$\left[h\theta+k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_b=0.$$

Введем обозначения $c\rho\sigma=r(x)$, $k\sigma=p(x)$, $hl=-q(x)$, причем, очевидно, $r(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\leqslant 0$ ($q=0$ лишь если $h=0$). Диференциальное уравнение (10) примет вид

$$r(x)\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+q(x)\,\theta. \tag{11}$$

Полагая, далее,

$$\frac{h(a)}{k(a)}=H_0\geqslant 0,$$
$$\frac{h(b)}{k(b)}=H_1\geqslant 0,$$

запишем краевые условия в форме

$$\left.\begin{aligned}\theta'_x(a,t)-H_0\theta(a,t)\equiv 0,\\ \theta'_x(b,t)+H_1\theta(b,t)\equiv 0,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и, наконец, начальное условие, как было выше отмечено, будет

$$\theta(x,0)=f(x). \tag{13}$$

Заметим, что функция $f(x)$ не совсем произвольна, потому что, полагая в тождествах (12) $t=0$, мы найдем

$$\theta'_x(a,0)-H_0\theta(a,0)=0,\quad \theta'_x(b,0)+H_1\theta(b,0)=0,$$

откуда

$$f'(a)-H_0f(a)=0,\quad f'(b)+H_1f(b)=0. \tag{14}$$

2. Обращаясь к уравнению (11), положим в нем $\theta=u(x)\varphi(t)$. Тогда наше уравнение распадается на два обыкновенных диференциальных уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu=\lambda ru, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\lambda\varphi, \tag{16}$$

и условия (12) дают краевые условия для уравнения (15)

$$u'(a)-H_0u(a)=0,\quad u'(b)+H_1u(b)=0. \tag{17}$$

Приступая к анализу краевой задачи (15), (17), заметим, что, вообще говоря, все фундаментальные числа отрицательны. В самом деле, пусть λ_0 будет фундаментальное число и u_0 — соответствующая фундаментальная функция. Тогда

$$L(u_0)=\lambda_0ru_0,\quad u_0'(a)-H_0u_0(a)=0,\quad u_0'(b)+H_1u_0(b)=0,$$

причем $u_0\not\equiv 0$ обладает непрерывной второй производной. Из первого равенства получаем

$$\lambda_0\int_a^b ru_0^2\,dx=\int_a^b u_0L(u_0)\,dx.$$

Интеграцией по частям находим

$$\int_a^b u_0L(u_0)\,dx=p(b)\,u_0(b)\,u_0'(b)-p(a)\,u_0(a)\,u_0'(a)-\int_a^b(pu_0'^2-qu_0^2)\,dx,$$

и, значит,

$$\lambda_0\int_a^b ru_0^2\,dx=-p(b)\,u_0^2(b)\,H_1-p(a)\,u_0^2(a)\,H_0-\int_a^b(pu_0'^2-qu_0^2)\,dx.$$

Вспомним, что $p(b)$, $u_0^2(b)$, $p(a)$, $u_0^2(a)$ и $p(x)$ положительны и не равны нулю, а H_1, H_0, $u_0'^2(x)$, $u_0^2(x)$, $-q(x)$ все $\geqslant 0$; следовательно, из последнего равенства вытекает $\lambda_0\leqslant 0$, причем $\lambda_0=0$ будет лишь в том случае, когда одновременно будет $H_1=0$, $H_0=0$, $q(x)\equiv 0$; в этом случае $u_0=\mathrm{const}$. Так как $-q=hl$, $l>0$, то $q\equiv 0$ означает $h\equiv 0$, т. е. что через боковую поверхность теплота совершенно не уходит, так же как и через концы, потому что $h(a)=0$, $h(b)=0$. Итак, фундаментальные числа все отрицательны, за исключением случая, когда теплота совершенно не переходит в окружающую среду. В этом последнем случае имеется нулевое фундаментальное число.

Рассматривая общий случай обмена теплоты с окружающей средой, мы видим, что выполняется условие краевой задачи предыдущей главы (основной случай). Тогда мы можем применить все установленные там результаты общей теории краевой задачи. В частности, мы заключаем, что существует бесконечное множество фундаментальных чисел, каждое ранга 1: $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$, с соответствующими фундаментальными функциями $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, образующими нормированную ортогональную систему в интервале (a, b) с весом $r(x)$. Полагая $\lambda = \lambda_n$ в уравнении (16), получим его решение

$$\varphi(t) = A_n e^{\lambda_n t},$$

и, значит, $\theta = A_n e^{\lambda_n t} u_n(x)$ будет решением уравнения (11), удовлетворяющим краевым условиям (12). Чтобы удовлетворить и начальному условию (13), образуем ряд

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n t} u_n(x). \tag{18}$$

Начальное условие (13) будет удовлетворяться, если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x),$$

т. е. если функция $f(x)$ может быть разложена в ряд по фундаментальным функциям. Последнее обстоятельство всегда имеет место, если f обладает непрерывной второй производной, потому что функция f удовлетворяет данным краевым условиям (14) (гл. I, § 7). Коэфициенты A_n определяются по формуле

$$A_n = \int_a^b r(x) f(x) u_n(x)\, dx.$$

Ряд (18) дает полное решение задачи о распространении теплоты в брусе, если он сходится и допускает одно почленное диференцирование по t и два по x.

3. Краевая задача (15), (17), согласно общей теории предыдущей главы, эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s) r(s) u(s)\, ds,$$

где $G(x, s)$ есть функция Грина данной краевой задачи. Когда отсутствует обмен теплоты с окружающей средой, условие краевой задачи не выполняется и мы имеем особый случай (гл. I, § 11). Как мы видели, в этом случае краевая задача будет

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) = \lambda r u, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0,$$

причем $p(x) > 0$, $r(x) > 0$. Построив расширенную функцию Грина этой задачи $G^*(x, s)$, заменим ее при $\lambda \neq 0$ эквивалентным интегральным уравнением

$$u(x) = \lambda \int_a^b G^*(x, s) r(s) u(s)\, ds.$$

4. В качестве примера рассмотрим частный случай, когда c, σ, ρ, k, h и l — постоянные, $a = 0$, $b = 1$. Тогда и величины p, q, r, входящие в уравнение (11), — постоянные. Положим $\frac{q}{p} = -a^2$ и примем $\frac{\lambda r}{p}$ за новый параметр, обозначив его снова через λ. Уравнение (15) примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^2 u = \lambda u.$$

Если, кроме того, мы предположим, что через концы бруса теплота не уходит, то будем иметь $H_0 = H_1 = 0$, и краевые условия (17) будут формы $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Легко подсчитать фундаментальные числа этой краевой задачи

$$\lambda_0 = -a^2, \ \lambda_n = -n^2\pi^2 - a^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

с соответствующими нормированными ортогональными в интервале $(0, 1)$ фундаментальными функциями $u_0(x) = 1$, $u_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x$. Если $a \neq 0$, то все фундаментальные числа отрицательны, и, значит, $\lambda = 0$ не является фундаментальным числом [условие (А) выполняется]. Согласно общей теории мы можем построить для этой краевой задачи функцию Грина, удовлетворяющую следующим условиям.

1) G непрерывна в интервале $[0, 1]$; 2) в каждом из подинтервалов $[0, s]$ и $[s, 1]$ в отдельности G, имея непрерывную вторую производную, удовлетворяет уравнению $\frac{d^2G}{dx^2} - a^2 G = 0$; 3) $G'(0) = 0$, $G'(1) = 0$; 4) $G'(s+0) - G'(s-0) = 1$.

Очевидно, имеем

$$G = A \operatorname{ch} ax, \qquad \text{если } 0 \leqslant x \leqslant s,$$
$$G = B \operatorname{ch} a(1-x), \quad \text{если } s \leqslant x \leqslant 1.$$

Условия 1) и 4) дают

$$A \operatorname{ch} as = B \operatorname{ch} a(1-s), \quad B \operatorname{sh} a(1-s) + A \operatorname{sh} as = -\frac{1}{a},$$

откуда

$$A = -\frac{\operatorname{ch} a(1-s)}{a \operatorname{sh} a}, \quad B = -\frac{\operatorname{ch} as}{a \operatorname{sh} a}.$$

Следовательно, функция Грина этой краевой задачи будет

$$G(x, s) = -\frac{\operatorname{ch} ax \operatorname{ch} a(1-s)}{a \operatorname{sh} a}, \quad \text{если } 0 \leqslant x \leqslant s,$$
$$G(x, s) = -\frac{\operatorname{ch} as \operatorname{ch} a(1-x)}{a \operatorname{sh} a}, \quad \text{если } s \leqslant x \leqslant 1.$$

Наша краевая задача эквивалентна интегральному уравнению $u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) u(s)\, ds$ с симметрическим ядром. Из общей теории (гл. I, § 7) следует, что всякая функция $f(x)$ с непрерывной второй производной, для которой $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

5. Когда $a=0$, краевая задача будет

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\lambda u, \quad u'(0)=0, \quad u'(1)=0 \text{ (особый случай)}$$

с фундаментальными числами $\lambda_0=0$, $\lambda_n=-n^2\pi^2$ $(n=1, 2, \ldots)$ и соответствующими нормированными ортогональными фундаментальными функциями $u_0(x)=1$, $u_n(x)=\sqrt{2}\cos n\pi x$. Эта краевая задача при $\lambda \neq 0$ эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_0^1 G^*(x, s)\, u(s)\, ds,$$

где $G^*(x, s)$ есть расширенная функция Грина данной краевой задачи, удовлетворяющая в качестве функции x следующим условиям:

1) G^* непрерывна в интервале $[0, 1]$.

2) В каждом из подинтервалов $[0, s]$ и $[s, 1]$ в отдельности G^* удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2G^*}{dx^2}=-1.$$

3) $G^{*\prime}(0)=0$, $G^{*\prime}(1)=0$.

4) $G^{*\prime}(s+0)-G^{*\prime}(s-0)=1$.

5) $\int_0^1 G^*(x, s)\, dx=0$.

Очевидно, получим

$$G^*=-\frac{x^2}{2}+Ax+B, \quad \text{если } 0\leqslant x\leqslant s,$$

$$G^*=-\frac{x^2}{2}+Cx+D, \quad \text{если } s\leqslant x\leqslant 1.$$

Из условия 3) $A=0$, $C=1$. Условие 1) дает $B=s+D$. Условие 5) дает

$$\int_0^s\left(-\frac{x^2}{2}+s+D\right)dx+\int_s^1\left(-\frac{x^2}{2}+x+D\right)dx=0,$$

откуда $D=-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{3}$. Наконец, условие 4) автоматически выполняется. Таким образом расширенная функция Грина имеет для нашей задачи выражение

$$G^*(x, s)=-\frac{x^2+s^2}{2}-\frac{1}{3}+s, \quad \text{если } 0\leqslant x\leqslant s,$$

$$G^*(x, s)=-\frac{x^2+s^2}{2}-\frac{1}{3}+x, \quad \text{если } s\leqslant x\leqslant 1.$$

§ 3. Некоторые вспомогательные результаты вариационного исчисления. 1. Основная простейшая задача вариационного исчисления может быть формулирована таким образом:

Пусть даны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ и функция $F(x, y, y')$ от трех аргументов. Требуется найти среди всех кривых

$$y=y(x) \tag{19}$$

с непрерывной кривизной, соединяющих точки M_0 и M_1, такую, при которой определенный интеграл

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

где $y'(x)=\frac{d}{dx}y(x)$, принимает экстремальное значение.

Относительно функции F мы предполагаем, что она и ее частные производные трех первых порядков непрерывны для всех систем значений x, $y(x)$, $y'(x)$, доставляемых классом допустимых кривых.

Допустим, что мы нашли кривую $y=f(x)$, для которой наш интеграл имеет минимальное значение. Заменим ее соседней кривой допустимого класса такого вида:

$$y=f(x)+\varepsilon\eta(x),$$

где ε есть малое по абсолютному значению число, а $\eta(x)$ — произвольная функция от x с непрерывной второй производной в интервале $[x_0, x_1]$, обращающаяся в нуль на его концах. Так как при $y=f(x)$ интеграл принимает минимальное значение, то имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta')\, dx > \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f')\, dx$$

или $I(\varepsilon)>I(0)$. Выражение $I(\varepsilon)$ имеет, следовательно, минимум при $\varepsilon=0$, откуда $I'(0)=0$, $I''(0)\geqslant 0$.

Последние условия должны выполняться, какова бы ни была функция $\eta(x)$, подчиненная вышеупомянутым условиям. Это будут необходимые условия минимума. В вариационном исчислении принято называть выражения

$$\delta I\equiv\varepsilon I'(0), \quad \delta^2 I\equiv\varepsilon^2 I''(0)$$

соответственно первой и второй вариациями и необходимые условия минимума интеграла записывать в виде

$$\delta I=0, \quad \delta^2 I\geqslant 0.$$

2. Рассмотрим сначала первое необходимое условие $I'(0)=0$. Согласно определению

$$I(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\, dx,$$

откуда диференцированием по параметру ε найдем

$$I'(\varepsilon)=\int_{x_0}^{x_1}(\overline{F}_y\cdot\eta+\overline{F}_{y'}\cdot\eta')\, dx,$$

где черточки сверху обозначают, что функции берутся от аргументов x, $f(x)+\varepsilon\eta(x)$, $f'(x)+\varepsilon\eta'(x)$. Полагая $\varepsilon=0$, получим

$$I'(0)=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\cdot\eta+F_{y'}\cdot\eta')\, dx,$$

где аргументами в F_y и $F_{y'}$ служат теперь x, $f(x)$ и $f'(x)$. Производя интегрирование по частям, найдем

$$I'(0) = [\eta F_{y'}]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx.$$

Вследствие граничных условий для функции η первый член исчезает, и формула записывается так:

$$I'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) dx. \tag{20}$$

Полученное выражение $I'(0)$ должно быть в случае минимума равно нулю, какова бы ни была функция η с непрерывной второй производной, обращающаяся в нуль на концах интервала. Так как в интеграле (20) выражение в скобках не зависит от выбора функции η, то оно должно быть тождественным нулем, т. е.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \tag{21}$$

Последний результат легко строго доказать методом от противного; он представляет основную лемму вариационного исчисления. Уравнение (21) представляет диференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y = f(x)$ и носит название *уравнения Эйлера*.

Выполнение этого уравнения является первым необходимым условием. Общее решение уравнения Эйлера будет содержать два произвольных постоянных, которые определятся из условий задачи: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Интегральные кривые уравнения (21) мы будем называть *экстремалями* данной задачи.

Второе необходимое условие минимума, как мы видели, выражается неравенством $I''(0) \geqslant 0$. Чтобы написать его в развернутом виде, продиференцируем выражение $I'(\varepsilon)$:

$$I''(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} (\overline{F}_{yy}\eta^2 + 2\overline{F}_{yy'}\eta\eta' + \overline{F}_{y'y'}\eta'^2)\, dx,$$

откуда

$$I''(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\, dx.$$

3. В изопериметрических задачах класс допустимых кривых, кроме условий непрерывности кривизны и прохождения через две заданные точки, удовлетворяет еще третьему условию

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, \; y(x), \; y'(x))\, dx = l,$$

где l — данная постоянная. Задача заключается в том, чтобы найти среди всех кривых $y = y(x)$ с непрерывной кривизной, проходящих

через точки M_0 и M_1 и удовлетворяющих последнему дополнительному условию, такую, для которой интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

принимал бы экстремальное значение.

Что касается функции G, то на нее накладываются те же ограничения общего характера, что и на F.

Правило Эйлера решения изопериметрической задачи[1]) состоит в следующем. Положим $H = F + \lambda G$, где λ есть неизвестная произвольная постоянная. Согласно Эйлеру первое необходимое условие экстремума будет такое же, как и для экстремума интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x, y, y')\, dx$$

относительно совокупности кривых с непрерывной кривизной, проходящих через две заданные точки, т. е.

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0,$$

или в развернутом виде:

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0.$$

Решение последнего уравнения будет содержать три произвольные постоянные, а именно λ и две постоянные интеграции; эти три постоянные определятся из условий

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} G(x, \; y(x), \; y'(x))\, dx = l.$$

Замечание. Решение задачи не изменится, если расширить класс допустимых кривых, потребовав лишь непрерывность касательной.

§ 4. Минимум интеграла Дирихле. 1. Рассмотрим, следуя Гильберту, задачу о приведении интеграла Дирихле

$$D(u) = \int_a^b \left[p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - qu^2 \right] dx$$

к минимуму относительно совокупности E кривых $u = u(x)$, удовлетворяющих следующим условиям (E): u имеет непрерывные производные двух первых порядков, удовлетворяет граничным условиям $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ и дополнительному условию $\int_a^b u^2(x)\, dx = 1$. Относительно функций p и q мы предполагаем, что $p > 0$ и обладает непрерывной производной, q непрерывна. Таким образом мы имеем изопериметриче-

[1]) См., например, Смирнов, Крылов, Канторович, Вариационное исчисление, гл. II.

скую задачу, принадлежащую к типу задач, о которых мы говорили в предыдущем параграфе; функциями F и G здесь являются

$$F = pu'^2 - qu^2, \quad G = u^2.$$

Следовательно, $H = F + \lambda G = pu'^2 - (q - \lambda) u^2$, и диференциальное уравнение Эйлера для H будет

$$H_u - \frac{d}{dx} H_{u'} = -2(q-\lambda) u - \frac{d}{dx}(2pu') = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(pu') + (q - \lambda) u = 0,$$

т. е.

$$L(u) = \lambda u. \tag{22}$$

Каждое решение проблемы минимума должно удовлетворять уравнению (22) и условиям (E). Но уравнение (22) вместе с условиями (E) образует краевую задачу, общий анализ которой был дан в предыдущей главе, причем

$$r(x) \equiv 1, \quad [puu']_a^b = 0.$$

Поэтому здесь приложимы все результаты § 7 предыдущей главы.

Наша задача (22), (E) не имеет никакого решения, за исключением тех случаев, когда λ равно какому-нибудь фундаментальному числу. Все фундаментальные числа образуют бесконечное множество действительных чисел, каждое ранга 1, причем, имеется наибольшее среди них, так как $r(x) > 0$.

Итак, мы имеем

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots, \tag{23}$$

с соответствующей нормированной ортогональной системой фундаментальных функций

$$u_1(x), \; u_2(x), \; \ldots$$

Следовательно, мы имеем при всяком n

$$L(u_n) = \lambda_n u_n, \quad u_n(a) = 0, \quad u_n(b) = 0, \quad \int_a^b u_n^2(x)\,dx = 1. \tag{24}$$

Отсюда, если проблема минимума имеет решение, то оно будет вида

$$u = Cu_n(x), \quad \lambda = \lambda_n.$$

Согласно последнему условию (E)

$$C^2 \int_a^b u_n^2(x)\,dx = 1,$$

откуда

$$C^2 = 1, \quad C = \pm 1.$$

Единственные возможные решения будут поэтому

$$u = \pm u_n(x), \quad \lambda = \lambda_n.$$

Далее

$$\lambda_n \int_a^b u_n^2(x)\,dx = \int_a^b u_n L(u_n)\,dx = -\int_a^b (pu_n'^2 - qu_n^2)\,dx,$$

что получается интегрированием по частям. Значит,

$$\lambda_n = -D(\pm u_n).$$

Воспользовавшись неравенствами (23), получим

$$D(\pm u_1) < D(\pm u_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Итак, имеем такой результат: если вообще существует функция $u(x)$, для которой интеграл $D(u)$ принимает минимальное значение относительно совокупности E допустимых кривых, то она должна быть $\pm u_1(x)$, а минимальное значение интеграла равно $-\lambda_1$.

2. Остается показать, что $D(\pm u_1)$ есть действительно минимум интеграла $D(u)$ относительно совокупности E допустимых кривых. С этой целью допустим сначала $q < 0$; тогда на основании § 8 гл. I все фундаментальные числа краевой задачи $L(u) = \lambda u$, $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ отрицательны, и, следовательно, условие (A) отсутствия нулевого фундаментального числа выполняется. Заметив это, преобразуем интеграл $D(u)$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b (pu')\,u'\,dx = [pu'u]_a^b - \int_a^b u \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) dx.$$

Но $[pu'u]_a^b = 0$, потому что $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Следовательно,

$$D(u) = \int_a^b [pu'^2 - qu^2]\,dx = -\int_a^b u\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right] dx,$$

или

$$D(u) = -\int_a^b uL(u)\,dx.$$

Положив $L(u) = h(x)$, представим $D(u)$ в виде

$$D(u) = -\int_a^b u(x)\,h(x)\,dx,$$

где $h(x)$ есть непрерывная функция.

Обозначим через $G(x, s)$ функцию Грина для диференциального оператора $L(u)$ и краевых условий $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, которая существует, ибо условие (A) выполнено; теперь применим фундаментальную теорему Гильберта (гл. I, § 4), согласно которой из предположений, что u имеет непрерывную вторую производную, $L(u) = h(x)$, $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, следует, что $u(x) = \int_a^b G(x, s)\,h(s)\,ds$. Внося это значение в написанную выше формулу для $D(u)$, получим

$$D(u) = -\int_a^b \int_a^b G(x, s)\,h(x)\,h(s)\,dx\,ds.$$

Полученный интеграл Гильберта, как мы знаем из § 11 гл. III ч. I, можно выразить посредством фундаментальных чисел и коэфициентов Фурье функции $h(x)$:

$$D(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n},$$

где

$$h_n = \int_a^b h(x)\, u_n(x)\, dx.$$

Теперь мы в состоянии оценить разность $D(u) - D(\pm u_1)$. В самом деле, имеем

$$D(u) - D(\pm u_1) = D(u) + \lambda_1.$$

Так как

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)\, h(s)\, ds$$

и

$$u_n(x) = \lambda_n \int_a^b G(x, s)\, u_n(s)\, ds,$$

то коэфициенты Фурье функции $u(x)$ будут $\frac{h_n}{\lambda_n}$, и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n^2} = \int_a^b u^2(x)\, dx = 1$$

вследствие замкнутости ортогональной системы $u_n(x)$. Впрочем, равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n^2} = 1$$

может быть получено также из следующих соображений: согласно теореме Гильберта — Шмидта (ч. I, гл. III, § 11),

$$u(x) = \int_a^b G(x, s)\, h(s)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} u_n(x)$$

причем ряд абсолютно и равномерно сходится. Возведя обе части последней формулы в квадрат, мы получим

$$u^2(x) = \sum_{\mu, \nu} \frac{h_\nu h_\mu}{\lambda_\nu \lambda_\mu} u_\nu(x)\, u_\mu(x).$$

Полученный ряд будет также сходиться абсолютно и равномерно. Интегрируя его почленно, найдем

$$\int_a^b u^2(x)\, dx = \sum_{\mu, \nu} \frac{h_\nu h_\mu}{\lambda_\nu \lambda_\mu} \int_a^b u_\nu(x)\, u_\mu(x)\, dx = 1.$$

Но

$$\int_a^b u_\nu(x)\, u_\mu(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \nu, \\ 1, & \text{если } \mu = \nu. \end{cases}$$

Следовательно, $\sum \frac{h_\nu^2}{\lambda_\nu^2} = 1.$

Умножая обе части последней формулы на λ_1, найдем

$$\lambda_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2 \lambda_1}{\lambda_n^2}.$$

Поэтому

$$D(u) - D(\pm u_1) = D(u) + \lambda_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2 \lambda_1}{\lambda_n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n^2} (\lambda_1 - \lambda_n) \geqslant 0,$$

потому что $\frac{h_n^2}{\lambda_n^2} \geqslant 0$ и $\lambda_1 - \lambda_n > 0$ при $n \geqslant 2$.

Итак, $D(u) - D(\pm u_1) \geqslant 0$, причем равенство будет иметь место лишь в том случае, если все $h_n = 0$ при $n \geqslant 2$. В этом последнем случае из формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\lambda_n^2} = 1$$

вытекало бы $h_1 = \pm \lambda_1$ и, значит,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} u_n(x) = \pm u_1(x).$$

Таким образом всякий раз, как $u(x)$ не равно тождественно $\pm u_1(x)$, мы имеем

$$D(u) - D(\pm u_1) > 0,$$

и тем самым мы доказали следующее предложение.

При $u = \pm u_1(x)$ интеграл Дирихле

$$D(u) = \int_a^b \left[p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - qu^2 \right] dx$$

принимает наименьшее значение $-\lambda_1$ из всех тех значений, которые он получает при любых функциях $u(x)$, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих условию $\int_a^b u^2(x)\, dx = 1$, а также граничным условиям $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.

3. Эта замечательная теорема доказана пока при ограничении $q(x) < 0$. Остается освободиться от этого ограничения. Предполагая, что условие $q(x) < 0$ не выполняется, обозначим через c постоянное такое, чтобы $q(x) + c < 0$. Положим теперь $q + c = \overline{q}$, $\lambda + c = \overline{\lambda}$ и внесем эти выражения в диференциальное уравнение (22). Мы получим

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{du}{dx}\right) + \overline{q}u = \overline{\lambda}u \quad \text{или} \quad \overline{L}(u) = \overline{\lambda}u, \tag{24'}$$

где $\overline{L}(u) = L(u) + cu$. Краевая задача $\overline{L}(u) = \overline{\lambda}u$, $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ принадлежит к рассмотренному только что виду, так как $\overline{q}(x) < 0$. В частности, эта задача имеет бесконечное множество отрицательных неравных между собой фундаментальных чисел

$$0 > \overline{\lambda}_1 > \overline{\lambda}_2 > \ldots$$

с соответствующими нормированными ортогональными фундаментальными функциями

$$u_1(x),\ u_2(x), \ldots$$

Из тождества $\overline{L}(u) = L(u) + cu$ мы заключаем: если λ_i есть фундаментальное число и $u_i(x)$ — соответствующая фундаментальная функция краевой задачи (22), (E), то $\overline{\lambda}_i = \lambda_i + c$ есть фундаментальное число краевой задачи (24), (E) с той же фундаментальной функцией $u_i(x)$ и обратно. Отсюда следует, что краевая задача (22), (E) также имеет бесконечное множество неравных между собой фундаментальных чисел, образующих убывающую последовательность:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda}_1 - c,\ \lambda_2 = \overline{\lambda}_2 - c, \ldots,$$
$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots,$$

с соответствующими нормированными ортогональными фундаментальными функциями $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$

Задача о нахождении минимума интеграла $D(u)$ относительно совокупности E допустимых кривых, очевидно, эквивалентна аналогичной задаче для интеграла

$$\overline{D}(u) \equiv D(u) - c = \int_a^b \left[p\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - (q + c)u^2\right]dx.$$

Так как $q + c < 0$, то все полученные результаты сохраняют свою силу, и интеграл $\overline{D}(u)$ имеет минимум при $u = \pm u_1(x)$, равный $-\overline{\lambda}_1$.

$$\overline{D}(\pm u_1(x)) = -\overline{\lambda}_1.$$

Вследствие эквивалентности этих двух задач те же функции $u = \pm u_1(x)$ дают минимум интеграла $D(u)$, причем

$$D(\pm u_1) = \overline{D}(\pm u_1) + c = -\overline{\lambda}_1 + c = -\lambda_1,$$

где λ_1 есть наибольшее фундаментальное число краевой задачи (22), (E). Таким образом формулированная выше теорема справедлива в общем случае при любой непрерывной функции q.

§ 5. Исследование второй вариации. 1. Перейдем теперь к рассмотрению второго необходимого условия для минимума в простейшей задаче вариационного исчисления: $\delta^2 I \geqslant 0$. Задача будет заключаться в том, чтобы найти необходимое и достаточное условие, при котором

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\,dx \geqslant 0 \tag{25}$$

для всех функций $\eta(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\eta(x)$ имеет непрерывную вторую производную;
2) $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1) = 0$.

Аргументами функций F_{yy}, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ являются x, $f(x)$ и $y' = f'(x)$, где $y = f(x)$ есть экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям. Другими словами, наша цель состоит в том, чтобы заменить второе необходимое условие минимума $\delta^2 I \geqslant 0$ ему эквивалентным условием.

Введем обозначения:

$$F_{yy}[x, f(x), f'(x)] = P(x),$$
$$F_{yy'}[x, f(x), f'(x)] = Q(x),$$
$$F_{y'y'}[x, f(x), f'(x)] = R(x).$$

Тогда неравенство (25) примет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx \geqslant 0. \tag{26}$$

В вариационном исчислении легко доказывается, что необходимым условием выполнимости неравенства (26) является выполнение неравенства Лежандра $R(x) \geqslant 0$ в интервале $[a, b]$. Предположим, что это условие удовлетворяется в усиленной форме: $R(x) > 0$ в интервале $[a, b]$. Интегрированием по частям мы получим

$$\int_{x_0}^{x_1} 2Q\eta\eta'\,dx = \int_{x_0}^{x_1} Q\,\frac{d}{dx}\eta^2\,dx = [Q\eta^2]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta^2 Q'\,dx = -\int_{x_0}^{x_1}\eta^2 Q'\,dx.$$

Подставляя это выражение в неравенство (26), придадим ему вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [(P - Q')\eta^2 + R\eta'^2]\,dx \geqslant 0. \tag{27}$$

Положим

$$\eta(x) = u(x),\quad x_0 = a,\quad x_1 = b,\quad R(x) = p(x),\quad P(x) - Q'(x) = -q(x).$$

Тогда неравенство (27) запишется так:

$$D(u) \geqslant 0, \tag{27'}$$

где $u(x)$ принадлежит к совокупности E' всех функций, удовлетворяющих условиям: $u(x)$ имеет непрерывную вторую производную в интервале $[a, b]$, $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Класс функций $u(x)$, для которых выполняется неравенство (27), более широк, чем класс E.

Однако, легко обнаружить, что два утверждения:

$$D(u) \geqslant 0 \text{ для всех функций класса } E' \tag{28}$$

и

$$D(u) \geqslant 0 \text{ для всех функций класса } E, \tag{29}$$

эквивалентны. Действительно, класс функций E содержится в классе E', поэтому из (28) вытекает также и (29). Обратно, предположим, что $u \not\equiv 0$ принадлежит классу E'. Нормируем эту функцию, т. е. умножаем ее на такое число c, чтобы $u_1 = cu$ удовлетворяло условию $\int\limits_a^b u_1^2(x)\,dx = 1$. Тогда u_1 будет принадлежать классу E, и поэтому будем иметь $D(u_1) \geqslant 0$. Так как $D(u_1) = D(cu) = c^2 D(u)$, то и $D(u) \geqslant 0$.

Отсюда мы видим, что если u не равна тождественно нулю и принадлежит классу E', то $D(u) \geqslant 0$; когда $u \equiv 0$, то $D(u) = 0$. Следовательно, вообще $D(u) \geqslant 0$ при всех $u(x)$, принадлежащих классу E'.

Установив эквивалентность неравенств (28), (29), мы вправе применить результат, установленный в предыдущем параграфе, согласно которому наименьшее значение интеграла $D(u)$ в классе E допустимых функций есть $-\lambda_1$, причем оно достигается для функций $u = \pm u_1(x)$ и ни при каких иных функциях, входящих в E.

Таким образом 1) если $\lambda_1 < 0$, то $D(u) > 0$ в классе E; 2) если $\lambda_1 = 0$, то $D(u) > 0$ в классе E, за исключением того случая, когда $u = \pm u_1(x)$: в этом последнем случае $D(u) = 0$; 3) если $\lambda_1 > 0$, то $D(u)$ может становиться в классе E отрицательным. Отсюда следует, что неравенство $\lambda_1 \leqslant 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы для всех функций класса E, а значит и E', $D(u)$ было $\geqslant 0$. Точно так же неравенство $\lambda_1 < 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы для всех функций класса E' $D(u)$ было > 0. Возвращаясь к задаче вариационного исчисления, мы получаем следующее предложение.

Пусть λ_1 обозначает наибольшее фундаментальное число краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(R\,\frac{du}{dx}\right) - (P - Q')\,u = \lambda u,$$

$$u(x_0) = 0, \quad u(x_1) = 0$$

$[R(x) > 0]$; тогда неравенство $\lambda_1 \leqslant 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы было $\delta^2 I \geqslant 0$. Очевидно также, что неравенство $\lambda_1 < 0$ будет необходимым и достаточным условием того, чтобы было $\delta^2 I > 0$.

Заметив, что условия $\delta I = 0$, $\delta^2 I > 0$ являются достаточными для слабого[1]) минимума интеграла I, мы можем утверждать, что экстремаль $y = f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям, дает слабый минимум интегралу I, если для нее выполнены условия $R(x) > 0$ в интервале $[a, b]$ и $\lambda_1 < 0$.

[1]) Слабым называют минимум относительно кривых, достаточно близких к экстремали как по положению их точек, так и по положению их касательных.

Глава III

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения теории потенциала. 1. Рассмотрим ограниченную односвязную область T, которая заключена внутри замкнутого контура S, обладающего непрерывной кривизной. Допустим сначала, что S может пересекаться с любой параллелью оси x не более, чем в двух точках.

Пусть $A(x, y)$ и ее первая производная $\frac{\partial A}{\partial x}$ — непрерывные функции в замкнутой области $T + S$. Займемся преобразованием интеграла

$$\iint\limits_T \frac{\partial A}{\partial x}\,dx\,dy = \int dy \int \frac{\partial A}{\partial x}\,dx = \int A(x_2, y)\,dy - \int A(x_1, y)\,dy,$$

где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ являются абсциссами точек пересечения контура S с параллелью оси x, $x_2 > x_1$. Разность интегралов в правой части последней формулы можно заменить одним интегралом вдоль всего контура S, проходимым в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Итак, имеем

$$\iint\limits_T \frac{\partial A}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_S A\,dy. \tag{1}$$

Предположения, наложенные на контур S, могут быть расширены: так, мы можем допустить, что параллель оси x встречает контур S более, чем в двух точках, но при условии, чтобы область T могла быть разбита на конечное число частей, каждая из которых ограничена контуром, пересекающимся с прямыми, параллельными оси x, не более, чем в двух точках. Применяя тогда формулу (1) к каждой из этих частей и складывая полученные формулы, мы установим равенство (1) для полной области T.

Наконец, предположение односвязности области T не является необходимым. Область T может быть ограничена несколькими отдельными замкнутыми кривыми $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Формула (1) остается справедливой, если под S мы понимаем полную границу области T, так что $\int\limits_S = \int\limits_{S_1} + \int\limits_{S_2} + \ldots + \int\limits_{S_n}$, причем контур интегрирования S проходится в положительном направлении, при котором область T остается слева. Действительно, всякую такую многосвязную область мы можем превратить в односвязную, если проведем $n-1$ поперечных вспомогательных разрезов. Применяя тогда формулу (1) к образованной таким путем односвязной области и замечая, что результаты интегрирования по вспомогательным разрезам взаимно сокращаются, мы в результате получаем формулу (1), где в правой части стоит сумма интегралов по кривым $S_1, S_2, \ldots, S_n$, проходимым в определенных направлениях, при которых область T остается слева.

Аналогично мы получим

$$\iint_T \frac{\partial B}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_S B\, dx, \qquad (2)$$

если $B(x, y)$ и $\frac{\partial B}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $T+S$.

Складывая формулы (1) и (2), найдем более общее соотношение

$$\iint_T \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_S A\, dy - B\, dx, \qquad (3)$$

известное под именем *формулы Гаусса — Остроградского*.

2. Предполагая, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывные функции с таковыми же частными производными двух первых порядков в замкнутой области $T+S$, мы можем в формуле (3) положить $A = u\frac{\partial v}{\partial x}$, $B = u\frac{\partial v}{\partial y}$. Тогда получим

$$\iint_T u\Delta v\, dx\, dy + \iint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_S u\left(\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx\right).$$

Выражение в скобках под интегралом в правой части может быть представлено так:

$$\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx = -\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha\, ds - \frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha\, ds = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha\right) ds,$$

где α — угол, образованный внутренней нормалью с положительным направлением оси x. Заметив, что $\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n}$, $\sin\alpha = \frac{\partial y}{\partial n}$, мы получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds = -\frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

где $\frac{\partial v}{\partial n}$ обозначает производную в направлении внутренней нормали. После этих преобразований последняя интегральная формула принимает вид

$$\iint_T u\Delta v\, dx\, dy + \iint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int_S u\frac{\partial v}{\partial n} ds. \qquad (4)$$

Переставляя здесь u и v и вычитая полученное соотношение из формулы (4), найдем

$$\iint_T (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy = -\int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \qquad (5)$$

Так как в криволинейные интегралы формул (4) и (5) входят только первые производные от u и v, а именно их нормальные производные, то мы можем расширить предположения о применимости этих формул. Формулы (4) и (5) остаются справедливыми, если u и v обладают ограниченными непрерывными частными производными первых двух порядков в области T, в то время как u и v вместе с $\frac{\partial u}{\partial n}$ и $\frac{\partial v}{\partial n}$ остаются непрерывными также при приближении к границе S.

Отметим частные случаи формул (4) и (5). Полагая в (5) $v = 1$, получаем

$$\iint_T \Delta u\, dx\, dy = -\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds. \qquad (6)$$

Для $u = v$ из формулы (4) находим

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\iint_T u\Delta u\, dx\, dy - \int_S u\frac{\partial u}{\partial n} ds. \qquad (7)$$

Если u есть гармоническая функция в области T, то вследствие соотношения $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ имеем

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \qquad (8)$$

и

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = -\int_S u\frac{\partial u}{\partial n} ds. \qquad (9)$$

Наконец, если u и v обе — гармонические функции в области T, то из формулы (5) получаем

$$\int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \qquad (10)$$

3. Проведем круг K, целиком вместе со своей окружностью лежащий в области T, где функция $u(x, y)$ гармоническая. Из центра этого круга P, принятого за начало координат, опишем меньший круг k и рассмотрим в качестве v функцию $\ln r$, где r обозначает расстояние от начала координат до любой точки (x, y). Очевидно, в концентрическом кольце $K - k$ обе функции u и $v = \ln r$ будут гармоническими, а потому вследствие формулы (10) имеем

$$\int_S \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0,$$

где контур S состоит из окружностей кругов K и k.

Так как на окружности круга K имеем

$$\ln r = \ln R, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial n} = -\left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{1}{R},$$

а на окружности круга k имеем

$$\ln r = \ln \rho, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial n} = \left(\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right)_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

где R и ρ — соответственно радиусы наших кругов K и k, то последняя интегральная формула запишется в виде

$$-\frac{1}{R}\int_{S_1} u\,ds + \frac{1}{\rho}\int_{S_2} u\,ds = 0,$$

где S_1 и S_2 — окружности кругов K и k, причем мы воспользовались формулой (8) в отношении этих окружностей. Полагая $ds = R\,d\varphi$ на S_1 и $ds = \rho\,d\varphi$ на S_2, получим

$$-\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\,d\varphi + \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi)\,d\varphi = 0$$

или

$$\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi)\,d\varphi. \tag{11}$$

Вследствие непрерывности функции u в точке P мы имеем $\lim\limits_{\rho\to 0} u(\rho, \varphi) = u_P$. Следовательно, интеграл правой части последней формулы при $\rho \to 0$ стремится к $2\pi u_P$; с другой стороны, он не зависит от ρ, будучи равным интегралу в левой части. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} u(\rho, \varphi)\,d\varphi = 2\pi u_P,$$

и формула (11) примет вид

$$\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\,d\varphi = 2\pi u_P,$$

откуда

$$u_P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \varphi)\,d\varphi, \tag{12}$$

т. е. значение гармонической функции в любой точке равно среднему арифметическому ее значений на окружности с центром в этой точке.

Отсюда, в частности, следует, что гармоническая функция не может иметь экстремума во внутренней точке области. Действительно, в противном случае наша функция была бы тождественно равна постоянному в некоторой окрестности точки P, как это немедленно вытекает из формулы (12). Гармоническая же в области T функция, равная постоянному в некоторой подобласти T_1, есть тождественное постоянное во всей области T, потому что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$

будет в таком случае аналитической функцией в области T, равной постоянному в ее части T_1, вследствие условий Коши-Римана. Отсюда $f(z)$ по теореме единственности равна постоянному во всей области T, а значит, и ее действительная часть u тоже равна постоянному в T. Итак, гармоническая в области T функция, непрерывная в замкнутой области $T + S$, достигает экстремума (максимума и минимума) обязательно на границе S области, если она не есть тождественное постоянное.

Это предложение позволяет установить важную теорему о единственности определения гармонической функции посредством ее граничных значений; функция, гармоническая в области T, непрерывная в замкнутой области $T + S$ и равная нулю на границе S, есть тождественный нуль. Иными словами, две функции, гармонические в области T, непрерывные в замкнутой области $T + S$ и равные между собой на границе S, равны друг другу всюду в области T. В связи с этим естественно возникает задача.

Дана произвольная непрерывная функция $f(s)$, определенная на контуре S ограниченной односвязной области T; определить функцию $u(x, y)$, гармоническую в области T, непрерывную в замкнутой области $T + S$ и равную $f(s)$ на границе S.

Эта задача известна под названием *внутренней задачи Дирихле*, и ее решение, как мы видели во введении, приводится к разрешению интегрального уравнения Фредгольма.

Подробный анализ этой задачи будет дан в дальнейшем.

4. Чтобы поставить *внешнюю задачу Дирихле*, прежде всего необходимо установить предложение о единственности определения гармонической функции посредством ее граничных значений. С этой целью мы должны ввести понятие гармонической функции, регулярной в бесконечно удаленной точке. Пусть $u(x, y)$ есть функция, гармоническая во всех конечных точках, лежащих вне некоторого контура S; предположим, что при любом стремлении точки (x, y) в бесконечность значение функции $u(x, y)$ стремится к определенному пределу $\lim u(x, y) = c$. Называя через T^* область, состоящую из совокупности всех точек, лежащих вне контура S, включая и бесконечно удаленную точку, мы скажем в этом случае, что наша функция $u(x, y)$ будет гармонической в области T^*, регулярной в бесконечно удаленной точке.

Заметим, что регулярность гармонической функции $u(x, y)$ в бесконечно удаленной точке эквивалентна утверждению о регулярности в той же точке функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$. В самом деле, из регулярности $f(z)$ на бесконечности непосредственно вытекает существование предела $u(x, y)$, когда (x, y) стремится к бесконечности. Обратно, если $\lim u(x, y) = c$, то функция $e^{f(z)} = e^u \cdot e^{iv}$ будет регулярной на бесконечности, потому что ее модуль ограничен в окрестности бесконечно удаленной точки. Следовательно, и $f(z)$ регулярна на бесконечности.

Заметив это, выполним преобразование $z = \frac{1}{z_1}$. Тогда функция $f(z) = f\left(\frac{1}{z_1}\right)$ будет регулярной в нулевой точке $z_1 = 0$, и, следовательно, ее действительная часть $u(x, y) = u\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$ будет гармонической в начале координат $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Таким образом всякую функцию $u(x, y)$, гармоническую в окрестности бесконечно удаленной точки и регулярную на бесконечности, мы можем преобразовать в функцию, гармоническую в окрестности нулевой точки, включая нулевую точку, если положим

$$U(x_1, y_1) = u\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \text{ }^{1)}.$$

Предположим теперь, что функция $u(x, y)$, гармоническая в области T^*, внешней к некоторому контуру S, регулярна в бесконечно удаленной точке и непрерывна в замкнутой области $T^* + S$. Тогда, если значения функции $u(x, y)$ на контуре S равны нулю, то функция u есть тождественный нуль всюду в области T^*.

В самом деле, выполним инверсию $x = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}$, $y = \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$ относительно круга, центр которого $x = 0$, $y = 0$ принимаем внутри контура S. Тогда область T^* перейдет в ограниченную область T', заключенную внутри некоторого контура S', а функция $u(x, y)$ преобразуется в функцию $U(x_1, y_1)$, гармоническую в области T', непрерывную в замкнутой области $T' + S'$ и равную нулю на контуре S'. По доказанной выше теореме единственности, такая функция $U(x_1, y_1)$ должна быть тождественно равна нулю всюду в области T', а значит, первоначальная функция $u(x, y)$ будет тождественным нулем всюду в области T^*, что и нужно было доказать. Иными словами, две функции, гармонические в области T^*, с регулярным поведением в бесконечно удаленной точке, непрерывные в замкнутой области $T^* + S$ и равные между собой во всех точках границы S, равны друг другу всюду в области T^*. Действительно, разность таких функций должна быть тождественным нулем в области T^*, потому что она будет гармонической функцией в области T^*, регулярной в бесконечности, непрерывной на границе S и равной нулю во всех точках границы S. Доказанное предложение представляет собой теорему единственности для внешней задачи Дирихле, которая может быть формулирована таким образом:

Даны контур S и произвольная непрерывная функция $f(s)$ на нем. Построить функцию $u(x, y)$, гармоническую в области T^* вне этого контура, регулярную в бесконечности, непрерывную в замкнутой области $T^* + S$ и равную $f(s)$ на контуре S.

Решение этой задачи, которое по доказанному может дать лишь единственную функцию, будет изложено в дальнейшем на основе теории интегральных уравнений.

5. В дальнейшем нам потребуется применение формулы (9) для случая внешней области T^*. Покажем, что если в формуле (9) под T понимать область, внешнюю к некоторому контуру S, а под n — направление нормали, внутренней относительно этой области, то эта

[1]) Из гармоничности функции $u(x, -y)$ следует гармоничность функции $u(x, y)$.

формула остается в силе при том дополнительном условии, что гармоническая функция регулярна в бесконечно удаленной точке. В самом деле, опишем из начала координат круг K достаточно большого радиуса R, содержащий внутри себя контур S, и обозначим через T область, заключенную между контуром S и окружностью Σ круга K.

Применяя формулу (9) к области T, имеем

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma$$

причем направление нормали будет внутренним относительно области T, т. е. в первом интеграле внешним по отношению к контуру S, а во втором — внутренним относительно окружности Σ.

Из последней формулы переходом к пределу при $R \to \infty$ мы получим нужное нам соотношение

$$\iint_{T^*} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds, \tag{13}$$

если обнаружим, что $\int_\Sigma u\,\frac{du}{dn}\,d\sigma$ стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает. Из регулярности функции u в бесконечно удаленной точке следует, что $R^2 \frac{\partial u}{\partial R}$ по абсолютной величине ограничено, когда R неограниченно растет. В самом деле, полагая $f(z) = u(R, \varphi) + iv(R, \varphi)$, $z = Re^{i\varphi}$, имеем

$$f'(z)\,e^{i\varphi} = \frac{\partial u}{\partial R} + i\,\frac{\partial v}{\partial R},$$

откуда

$$\left|R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right| < R^2|f'(z)|. \tag{14}$$

С другой стороны, из регулярности функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке вытекает, что $R^2|f'(z)|$ остается ограниченным в ее окрестности, и, следовательно, из неравенства (14) можем заключить об ограниченности $R^2\left|\frac{\partial u}{\partial R}\right|$, когда R неограниченно возрастает. Обращаясь к исследованию интеграла $\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma$ при неограниченно растущем R, заметим, что на окружности Σ имеем $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial R}$, т. е. $R^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|$ остается ограниченным при $R \to \infty$. Кроме того, согласно условию, u стремится равномерно к пределу c. Следовательно, подинтегральная функция $u\,\frac{\partial u}{\partial n}$ при $R \to \infty$ будет бесконечно малой величиной порядка не ниже второго относительно $\frac{1}{R}$, т. е. $\left|u\,\frac{\partial u}{\partial n}\right| < \frac{C}{R^2}$, где C — постоянное; это неравенство имеет место, начиная с некоторого значения R. Поэтому

$$\left|\int_\Sigma u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\right| < \frac{C}{R^2}\cdot 2\pi R = \frac{2\pi C}{R}.$$

и, следовательно, $\int\limits_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ стремится к нулю при $R \to \infty$, что и нужно было доказать.

§ 2. Логарифмические потенциалы простого и двойного слоя. 1. *Логарифмическим потенциалом простого слоя* называют выражение вида

$$V(x, y) = \int\limits_{S} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds, \tag{15}$$

где под S мы понимаем замкнутый контур с непрерывной кривизной, $\rho(s)$ обозначает произвольную непрерывную функцию (плотность слоя), заданную на контуре S, и $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ есть расстояние от переменной точки $Q(\xi, \eta)$ контура интегрирования до произвольной точки $P(x, y)$, лежащей внутри или вне контура S. Очевидно, функция V будет гармонической внутри и вне контура S, оставаясь непрерывной при переходе точки P через контур S.

2. Выражение вида

$$W(x, y) = \int\limits_{S} \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} ds, \tag{16}$$

где $\mu(s)$ обозначает произвольную непрерывную функцию (момент двойного слоя), заданную на контуре S, и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производную относительно внутренней нормали, называют *логарифмическим потенциалом двойного слоя*. Формулу (16) можно преобразовать, если заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n}\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{x-\xi}{r}\cos(n, x) + \frac{y-\eta}{r}\cos(n, y)\right].$$

Так как $\frac{x-\xi}{r} = \cos(r, x)$, $\frac{y-\eta}{r} = \cos(r, y)$, то

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r}[\cos(r, x)\cos(n, x) + \cos(r, y)\cos(n, y)] = \frac{1}{r}\cos(r, n),$$

где (r, n) есть угол между внутренней нормалью в точке Q и вектором $\bar{r}$, идущим от точки Q к точке P. После этого формула (16) примет вид

$$W(x, y) = \int\limits_{S} \mu(s) \frac{\cos(r, n)}{r} ds. \tag{17}$$

Наконец, потенциал двойного слоя (16) можно представить в новой форме, если ввести в рассмотрение угол θ, образованный с положительным направлением оси x вектором, идущим из точки P в точку Q. В самом деле, имеем

$$\ln[\xi + i\eta - (x + iy)] = \ln r + i\theta,$$

откуда

$$\frac{\partial \ln r}{\partial n} = -\frac{\partial \theta}{\partial s} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial s}.$$

После этого формула (16) примет вид

$$W(x, y) = \int\limits_{S} \mu(s) \frac{\partial \theta}{\partial s} ds = \int\limits_{S} \mu\, d\theta, \tag{18}$$

где в последнем интеграле интегрирование распространяется на все углы $d\theta$, под которыми из точки $P(x, y)$ видны элементы кривой S.

С этой формулой (18) мы встретились в § 3 введения, когда излагали постановку задачи Дирихле.

Очевидно, потенциал двойного слоя есть функция, гармоническая внутри и вне контура S, в бесконечности регулярная и равная нулю. Как было показано в § 3 введения контур S служит линией разрыва для функции W, причем имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} W_i &= W_\sigma + \pi\mu_\sigma, \\ W_e &= W_\sigma - \pi\mu_\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где W_i и W_e обозначают пределы функции W соответственно изнутри и извне контура S, когда точка P неограниченно приближается к точке σ на контуре; W_σ обозначает значение потенциала двойного слоя в точке σ контура S.

§ 3. Разрывность нормальной производной потенциала простого слоя. 1. Логарифмический потенциал простого слоя был определен посредством интеграла

$$V = \int\limits_{S} \rho(s) \ln \frac{1}{r} ds,$$

где замкнутая кривая S имеет непрерывную кривизну, а ρ обозначает непрерывную функцию точки s контура S. Проведем в произвольной точке σ контура S нормаль n_σ, считая за n_σ направление нормали внутрь контура S, и возьмем где-нибудь на n_σ точку P. Пока точка P не совпадает с σ, мы можем выполнить диференцирование под знаком интеграла и получаем

$$\frac{\partial V}{\partial n_\sigma} = \int\limits_{S} \rho \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n_\sigma} ds. \tag{20}$$

Исследуем теперь, как ведет себя $\frac{\partial V}{\partial n_\sigma}$, производная в направлении положительной нормали, когда точка P неограниченно приближается к точке σ изнутри и извне контура S; будем обозначать соответствующие предельные значения через $\frac{\partial V_i}{\partial n_\sigma}$ и $\frac{\partial V_e}{\partial n_\sigma}$. Мы докажем следующее предложение.

Нормальная производная потенциала простого слоя при переходе точки P через контур S претерпевает разрыв первого рода (т. е. с определенным скачком).

Действительно, заметив, что

$$\frac{\partial r}{\partial n_\sigma}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n_\sigma}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n_\sigma}=\frac{x-\xi}{r}\cos(n_\sigma, x)+\frac{y-\eta}{r}\cos(n_\sigma, y)=$$
$$=\cos(r, x)\cos(n_\sigma, x)+\cos(r, y)\cos(n_\sigma, y)=\cos(r, n_\sigma)$$

и, далее,

$$\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n_\sigma}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n_\sigma}=-\frac{\cos(r, n_\sigma)}{r},$$

получаем

$$\frac{\partial V}{\partial n_\sigma}=-\int\limits_S\frac{\rho\cos(r, n_\sigma)}{r}\,ds. \tag{20'}$$

Если через n_Q обозначить внутреннюю нормаль в точке Q контура интегрирования S, то формулу (20′) можно записать так:

$$\frac{\partial V}{\partial n_\sigma}=-\int\limits_S\frac{\rho\cos(r, n_Q)}{r}\,ds+\int\limits_S\rho\,\frac{\cos(r, n_Q)-\cos(r, n_\sigma)}{r}\,ds=-W+C. \tag{21}$$

Что касается W, то это есть потенциал двойного слоя с моментом ρ. Относительно же интеграла C мы докажем, что при переходе точки P через контур в точке σ он изменяется непрерывно. Доказав это, мы сможем воспользоваться формулами

$$W_i=\pi\rho_\sigma+W_\sigma,\quad W_e=-\pi\rho_\sigma+W_\sigma,$$
$$C_i=C_\sigma=C_e.$$

Отсюда по формуле (21) будет следовать

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_\sigma}=-\pi\rho_\sigma-W_\sigma+C_\sigma,\quad \frac{\partial V_e}{\partial n_\sigma}=\pi\rho_\sigma-W_\sigma+C_\sigma.$$

С другой стороны, согласно определению W и C, имеем

$$-W_\sigma+C_\sigma=-\int\limits_S\frac{\rho\cos(r_{Q\sigma}, n_\sigma)}{r_{Q\sigma}}\,ds,$$

где $r_{Q\sigma}$ означает вектор, идущий от переменной точки Q к точке σ. Следовательно, окончательно получаем

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_\sigma}=-\pi\rho_\sigma+E,\quad \frac{\partial V_e}{\partial n_\sigma}=\pi\rho_\sigma+E \tag{22}$$

или

$$\frac{\partial V_i}{\partial n_\sigma}-\frac{\partial V_e}{\partial n_\sigma}=-2\pi\rho_\sigma,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial n_\sigma}+\frac{\partial V_e}{\partial n_\sigma}\right)=E, \tag{22}$$

где положено

$$E=-\int\limits_S\frac{\rho\cos(r_{Q\sigma}, n_\sigma)}{r_{Q\sigma}}\,ds. \tag{24}$$

2. Остается показать лишь непрерывность C при переходе точки P через точку σ. С этой целью опишем около точки σ маленький круг

радиуса δ и обозначим через S_1 часть контура, высекаемую из него этим кругом, а через S_2 — оставшуюся часть контура. Соответственно с этим разобьем интеграл

$$C=\int\limits_S\rho\,\frac{\cos(r_{QP}, n_Q)-\cos(r_{QP}, n_\sigma)}{r_{QP}}\,ds$$

на две части: $C=C_1+C_2$.

Так как в интеграле C_2 контур S_2 не содержит точки σ, то C_2 остается непрерывной функцией при переходе точки P через σ, и остается доказать, что $|C_1|$ может быть сделан как угодно малым при любом положении точки P на n_σ, если δ выбрать достаточно малым. Для этого мы установим неравенство

$$|\cos(r_{QP}, n_Q)-\cos(r_{QP}, n_\sigma)|<ar_{Q\sigma}, \tag{25}$$

где a — положительное постоянное.

Из этого неравенства следует

$$|C_1|<a\int\limits_{S_1}|\rho|\,\frac{r_{Q\sigma}}{r_{QP}}\,ds.$$

Но $\dfrac{r_{Q\sigma}}{r_{QP}}=\dfrac{\sin(r_{QP}, n_\sigma)}{\sin(r_{Q\sigma}, n_\sigma)}$, где $\sin(r_{Q\sigma}, n_\sigma)\to 1$ при $\delta\to 0$. Поэтому при достаточно малом δ, независимо от положения точки P,

$$\frac{r_{Q\sigma}}{r_{QP}}<1+\varepsilon_1,$$

где ε_1 — любое положительное число. Следовательно,

$$|C_1|<a\int\limits_{S_1}|\rho|(1+\varepsilon_1)\,ds<\varepsilon,$$

если δ достаточно мало.

Чтобы показать справедливость неравенства (25), обозначим для краткости $\angle(r_{QP}, n_\sigma)=\alpha$, $\angle(r_{QP}, n_Q)=\beta$. Тогда

$$\cos(r_{QP}, n_Q)-\cos(r_{QP}, n_\sigma)=\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

и, значит,

$$|\cos(r_{QP}, n_Q)-\cos(r_{QP}, n_\sigma)|\leqslant 2\sin\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<a_1\sin|\alpha-\beta|=a_1\sin\theta,$$

потому что $|\alpha-\beta|=\theta$ при малом δ будет малым. Остается обнаружить, что

$$\sin\theta<a_2 r_{Q\sigma},$$

где $\theta=\angle(n_\sigma, n_Q)$, a_2 — положительное постоянное.

θ есть угол между касательными в точках σ и Q; принимая касательную в точке σ за ось абсцисс, а внутреннюю нормаль за ось ординат, мы скажем, что θ есть угол касательной в точке Q с осью абсцисс.

Поэтому, если уравнение контура S_1 будет в выбранной системе осей

$$\eta = \eta(\xi), \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0,$$

то

$$\sin\theta = \frac{|\eta'|}{\sqrt{1+\eta'^2}},$$

откуда

$$\sin\theta \leqslant |\eta'| < |\xi| a_2 < a_2 r_{Q\sigma},$$

потому что $\eta' = \xi \frac{d^2\eta(\theta_1\xi)}{d\xi^2}$ и вторая производная η'' непрерывна согласно условию. Доказательство на этом заканчивается.

§ 4. Нормальная производная потенциала двойного слоя. 1. Теперь мы исследуем поведение нормальной производной потенциала двойного слоя

$$W = \int_S \mu \frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} ds = \int_S \mu \frac{\cos(r, n)}{r} ds$$

при приближении точки P к точке σ контура S. Попрежнему будем предполагать, что замкнутая кривая S имеет непрерывную кривизну. В точке σ контура S проведем нормаль, возьмем на ней две точки P_1 и P_2 с обеих сторон от σ на равном расстоянии δ и образуем нормальные производные, взятые в положительном направлении (в направлении внутренней нормали): $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_1}$ и $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_2}$. Мы докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_1} - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_2}\right\} = 0. \tag{26}$$

Из этого предельного равенства нельзя заключить, что существуют отдельно пределы

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_1} \quad \text{и} \quad \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P_2}.$$

Более того, этого, вообще говоря, и не будет, в противоположность случаю потенциала простого слоя. Однако, из равенства (26) вытекает: если существует один из двух пределов нормальной производной потенциала двойного слоя W, то существует также другой и равен первому.

2. Переходя к доказательству, примем внутреннюю нормаль в точке σ за ось ординат, а касательную в направлении положительного обхода контура (против часовой стрелки) — за ось абсцисс. Тогда потенциал W для точки P, лежащей на оси ординат, будет функцией одного y, и мы положим $W(0, y) \equiv F(y)$.

Вопрос сводится к доказательству предельного равенства

$$\lim_{y\to 0}\{F'(+y) - F'(-y)\} = 0. \tag{26'}$$

Без ограничения общности доказательства мы можем считать момент μ равным нулю в точке σ. Действительно, в противном случае положим

$$W = \int_S (\mu - \mu_\sigma)\frac{\cos(r, n)}{r} ds + \mu_\sigma \int_S \frac{\cos(r, n)}{r} ds.$$

Для первого интеграла предположение выполняется, потому что он представляет потенциал с моментом $\mu - \mu_\sigma$. Второй же интеграл имеет для всех внутренних точек постоянное значение $2\pi\mu_\sigma$, а для всех внешних точек — постоянное значение нуль; поэтому его нормальные производные по отдельности равны нулю, а значит, и их предельные значения равны нулю, так что предложение справедливо в отношении этого потенциала специального вида.

Пусть уравнение линии S в достаточно малой окрестности точки σ будет

$$\eta = \eta(\xi), \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0,$$

где η имеет вторую непрерывную производную. По формуле Тейлора

$$\eta = \xi^2 \frac{d^2\eta(\theta\xi)}{d\xi^2}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \xi\frac{d^2\eta(\theta_1\xi)}{d\xi^2}$$

и, значит,

$$|\eta| < M\xi^2, \quad \left|\frac{d\eta}{d\xi}\right| < M|\xi|, \quad \text{если } 0 \leqslant |\xi| \leqslant l_0,$$

где l_0 определяет достаточно малую окрестность точки σ. Часть контура S, точки которой удовлетворяют неравенству $0 \leqslant |\xi| \leqslant l_0$, обозначим через S_1, оставшуюся же часть — через S_2, и положим

$$W = \int_{S_1} \mu\frac{\cos(r, n)}{r} ds + \int_{S_2} \mu\frac{\cos(r, n)}{r} ds = W_1 + W_2. \tag{27}$$

Отметим очевидные формулы

$$\cos(r, n) = [(x-\xi)\cos(n, \xi) + (y-\eta)\cos(n, \eta)]\frac{1}{r},$$

$$\cos(n, \xi) = -\frac{d\eta}{ds}, \quad \cos(n, \eta) = \frac{d\xi}{ds}.$$

Для точки P, лежащей на оси η, имеем $x = 0$. Положим $W_1(0, y) = F_1(y)$, $W_2(0, y) = F_2(y)$. Получаем

$$F_1(y) = \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\xi\eta' - \eta + y}{\xi^2 + (\eta - y)^2}\mu\, d\xi.$$

Положим ради краткости обозначений

$$g = \frac{\xi\eta' - \eta + y}{\xi^2 + (\eta - y)^2}, \quad r_0 = \sqrt{\xi^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + (\eta - y)^2}$$

и образуем

$$F_1'(y) = \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\partial g}{\partial y}\mu\, d\xi. \tag{28}$$

Составим теперь $\frac{\partial g}{\partial y}$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\xi^2-(\eta-y)^2}{r^4}-\frac{2(y-\eta)\xi\eta'}{r^4}$$

и исследуем разность

$$F_1'(y)-\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\mu\,d\xi=\int_{-l_0}^{l_0}\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\right)\mu\,d\xi. \qquad (29)$$

Отметим легко получаемые формулы

$$\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}=\left[\frac{\xi^2-(\eta-y)^2}{r^4}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\right]-\frac{2(y-\eta)\xi\eta'}{r^4},$$

$$\frac{r^2}{r_0^2}=1+\lambda,\quad \frac{r_0^4}{r^4}=1-N\lambda,$$

$$\frac{r_0^4}{r^4}=(1+\lambda)^{-2}=1-2\lambda+\ldots$$

Считая l_0 достаточно малым, мы можем сделать $|\lambda|$ как угодно малым и, следовательно, добиться того, чтобы $1<N<3$.

Далее,

$$\left|\frac{2\eta\xi\eta'}{r^4}\right|<2M^2\frac{\xi^4}{r^4}<2M^2;$$

$$\left|\frac{2\xi y\eta'}{r^4}\right|<2M\frac{|y|}{r^2}<3M\frac{|y|}{r_0^2},\ \text{если}\ \frac{1}{1+\lambda}<\frac{3}{2};$$

$$\frac{\xi^2-(\eta-y)^2}{r^4}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}=\frac{1}{r_0^4}\{[\xi^2-(\eta-y)^2](1-N\lambda)+y^2-\xi^2\}=$$

$$=\frac{1}{r_0^4}\{-N\lambda[\xi^2-(\eta-y)^2]-\eta^2+2y\eta\}=$$

$$=-\frac{\lambda}{r_0^4}\{N[\xi^2-(\eta-y)^2]+r_0^2\},$$

потому что $-\eta^2+2y\eta=r_0^2-r^2=-\lambda r_0^2$. Далее,

$$N[\xi^2-(\eta-y)^2]+r_0^2<r_0^2+N[\xi^2+(\eta-y)^2]=$$

$$=r_0^2+Nr^2<r_0^2+3r^2<5r_0^2,\ \text{если}\ \lambda<\frac{1}{3};$$

$$\left|\frac{\xi^2-(\eta-y)^2}{r^4}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\right|<\frac{5|\lambda|r_0^2}{r_0^4}=\frac{5|\lambda|}{r_0^2}<5\left(M^2+2M\frac{|y|}{r_0^2}\right),$$

потому что

$$|\lambda|\leqslant\frac{\eta^2+2|y\eta|}{\xi^2}<\frac{M^2\xi^4+2M\xi^2|y|}{\xi^2}=M^2\xi^2+2M|y|<M^2r_0^2+2M|y|.$$

Итак, находим

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\right|<2M^2+\frac{3M|y|}{r_0^2}+5\left(M^2+2M\frac{|y|}{r_0^2}\right)=7M^2+\frac{13M|y|}{r_0^2}.$$

Возвращаясь теперь к формуле (29), получаем

$$\left|F_1'(y)-\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\mu\,d\xi\right|<\int_{-l_0}^{l_0}\left(7M^2+\frac{13M|y|}{r_0^2}\right)|\mu|\,d\xi;$$

отсюда, обозначая через μ_m максимум $|\mu|$ на дуге S_1, получаем

$$\left|F_1'(y)-\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\mu\,d\xi\right|<\mu_m(14M^2l_0+13M\pi),$$

так как

$$\int_{-l_0}^{l_0}\frac{|y|\,d\xi}{\xi^2+y^2}=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{l_0}{|y|}<\pi.$$

Итак, мы установили неравенство

$$\left|F_1'(y)-\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\mu\,d\xi\right|<\frac{c}{2}\mu_m, \qquad (30)$$

где

$$c=28M^2l_0+26M\pi.$$

То же неравенство мы получим путем замены y на $-y$ для $F_1'(-y)$, если заметим, что $\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}$, как четная функция от y, при такой замене не изменяется. Комбинируя неравенство (30) с

$$\left|F_1'(-y)-\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\xi^2-y^2}{r_0^4}\mu\,d\xi\right|<\frac{c}{2}\mu_m,$$

находим окончательно

$$|F_1'(y)-F_1'(-y)|<c\mu_m. \qquad (31)$$

Пользуясь неравенством (31), легко уже доказать требуемое предельное равенство (26). Действительно, пусть ε — произвольно малое данное положительное число. Тогда выберем сначала l_0 столь малым, чтобы максимум μ_m функции $|\mu|$ на S_1 удовлетворял неравенству $c\mu_m<\frac{\varepsilon}{2}$. Это возможно, потому что непрерывная функция μ обращается в нуль в точке σ, а c остается ограниченным, как бы мало l_0 ни было. Тогда будет

$$|F_1'(y)-F_1'(-y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

для любого y, отличного от нуля. Что касается $F_2(y)=W_2(0,y)$, то для его контура интегрирования точка σ является внешней. Поэтому возможно найти постоянное δ так, чтобы при $0\leqslant|y|\leqslant\delta$ выполнялось неравенство

$$|F_2'(y)-F_2'(-y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, мы получим для $0<|y|\leqslant\delta$ неравенство

$$|F'(y)-F'(-y)|<\varepsilon,$$

что и нужно было установить.

§ 5. Внутренняя задача Дирихле. 1. Теперь мы в состоянии решить граничные задачи теории потенциала, основываясь на теории интегральных уравнений.

Мы начнем с рассмотрения первой граничной задачи в плоскости, причем в этом параграфе разберем внутреннюю задачу, а в ближайшем параграфе — внешнюю.

Пусть дана плоская ограниченная область T, граница которой состоит из одной замкнутой кривой S. Граничная кривая по предположению имеет непрерывную кривизну. Далее, пусть дана однозначно определенная на S непрерывная функция, которую мы обозначим через $f(s)$, где под s понимаем длину дуги контура S, отсчитываемую от произвольной начальной точки.

Будем искать функцию $u(x, y)$, гармоническую в области T [1]), непрерывную в замкнутой области $T+S$ и принимающую на S наперед заданные значения $f(s)$, в том смысле, что u при приближении точки (x, y) к S изнутри стремится к f, т. е. под условием $u_i = f$.

Мы знаем из § 1, что решение этой задачи, если оно вообще существует, будет единственное.

Чтобы получить решение нашей внутренней задачи Дирихле, положим

$$u = \int\limits_S \mu \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt, \tag{32}$$

т. е. представим u как потенциал двойного слоя, момент которого μ пока неизвестен.

Нам нужно, следовательно, определить момент μ в виде непрерывной функции точки контура S так, чтобы выполнялось граничное условие $u_i = f$. Если μ найдено, то равенство (32) действительно дает решение u нашей граничной задачи Дирихле. В самом деле, функция u, определенная в области T посредством формулы (32), представляет гармоническую функцию в этой области, и мы, приписывая ей на S значения f, пополним ее определение так, что в области $T+S$ она сделается непрерывной функцией вследствие условия $u_i = f$. Что касается μ, то оно определяется из интегрального уравнения

$$u_i = \pi\mu_s + \int\limits_S \mu_t \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}} dt = f(s), \tag{33}$$

как это следует из рассмотрений § 2 этой главы (см. также введение, § 3).

2. Таким образом для определения μ мы получили неоднородное интегральное уравнение второго рода.

В уравнение (33) входит криволинейный интеграл; его возможно преобразовать в определенный интеграл обычного вида, если мы длину дуги примем за независимое переменное. Впрочем, возможно без всяких затруднений перенести теорию интегральных уравнений на криволинейные интегралы. Ядром интегрального уравнения (33) является функция

$$K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}}. \tag{34}$$

Обозначая через l длину кривой S, мы можем вместо (33) написать

$$\mu(s) + \int\limits_0^l K(s, t)\mu(t)\,dt = \frac{f(s)}{\pi}. \tag{33'}$$

Ядро $K(s, t)$ является непрерывной функцией не только когда s и t различны между собой, но и при $s = t$. В самом деле, обозначая через $\frac{1}{\rho(s)}$ кривизну линии S, по предположению непрерывную, мы получаем

$$\lim_{t=s} \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}} = \frac{1}{2\rho(s)}.$$

Таким образом теория Фредгольма приложима. Уравнение (33′), согласно § 12 ч. I, гл. II, имеет единственное непрерывное решение μ только в том случае, когда соответствующее ему однородное уравнение

$$\pi\bar{\mu}(s) + \int\limits_S \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}} \bar{\mu}(t)\,dt = 0$$

не имеет никакого другого решения, кроме тождественного нуля.

Искомая функция $\mu(s)$ должна быть непрерывной с периодом l, что автоматически выполняется, потому что ядро $K(s, t)$ имеет относительно s период l, и $f(s)$ по условию есть функция с периодом l.

Чтобы доказать несуществование отличного от нуля решения однородного уравнения, обозначим через $\bar{\mu}$ решение этого уравнения. Образуем потенциал двойного слоя с моментом $\bar{\mu}$:

$$\bar{u} = \int\limits_S \bar{\mu} \frac{\cos(r, n_t)}{r} dt.$$

Тогда имеем

$$\bar{u}_i = \pi\bar{\mu}(s) + \int\limits_S \bar{\mu}(t) \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}} dt = 0.$$

Так как $\bar{u}_i = 0$, то вследствие единственности решения задачи Дирихле (§ 1 этой главы) функция $\bar{u}$ должна быть тождественно равной нулю в области T, т. е. $\bar{u} \equiv 0$ всюду в T, а, значит, $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} = 0$. Так как предел нормальной производной потенциала $\bar{u}$ при приближении изнутри существует, то вследствие результата § 4 настоящей главы должен существовать предел при приближении извне и быть равным первому. Поэтому $\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial n} = 0$. Отсюда сначала вытекает, что $\bar{u}$ в области T^*, внешней к контуру S, будет тождественно равна постоянному. В самом деле, мы можем применить формулу (13) из § 1 этой главы, что допустимо, так как $\bar{u}$, будучи потенциалом двойного слоя, — гармоническая

---

[1]) u называется гармонической в области T, если она непрерывна вместе со своими частными производными двух первых порядков и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$.

функция во внешней области T^* с регулярным поведением в бесконечности. Тогда находим

$$\iint\limits_{T^*}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int\limits_S \bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}\,ds=0,$$

откуда $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=0$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=0$, а значит, $\bar{u}=\text{const.}$ в области T^*.

Заметив же, что $\bar{u}$ обращается в нуль в бесконечности, видим, что $\bar{u}\equiv 0$ в области T^*; в частности отсюда следует $\bar{u}_e=0$. Из равенств $\bar{u}_i=0$ и $\bar{u}_e=0$ вследствие соотношения $\pi\bar{\mu}(s)=\frac{1}{2}(\bar{u}_i-\bar{u}_e)$ следует тождество $\bar{\mu}(s)\equiv 0$.

Итак, однородное интегральное уравнение имеет только одно тривиальное решение $\bar{\mu}=0$, что и нужно было доказать.

3. Напишем (33′) в виде

$$\mu(s)-\lambda\int\limits_0^l K(s,t)\,\mu(t)\,dt=\frac{f(s)}{\pi},\tag{33″}$$

где $\lambda=-1$.

Мы доказали, что -1 не является фундаментальным числом ядра $K(s,t)$. Уравнение (33′) имеет, таким образом, одно и только одно решение, которое можно представить в форме

$$\mu(s)=\frac{f(s)}{\pi}+\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^l R(s,t;\lambda)\,f(t)\,dt,$$

где $\lambda=-1$, или

$$\mu(s)=\frac{f(s)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l R(s,t;-1)\,f(t)\,dt\tag{35}$$

(ч. I, гл. II, § 8).

Внося эту непрерывную периодическую функцию μ в формулу (32), мы получим решение внутренней задачи Дирихле.

§ 6. Внешняя задача Дирихле. 1. В § 1 мы формулировали уже внешнюю задачу Дирихле и видели, что преобразованием инверсии она сводится к внутренней задаче. После того как в предыдущем параграфе мы разрешили внутреннюю задачу, можно считать принципиально решенной и внешнюю задачу. Однако, представляется существенным разобрать также непосредственный метод для разрешения внешней задачи, который будет основан на применении теории интегральных уравнений.

Пусть требуется найти функцию $u(x,y)$, гармоническую в области T^*, внешней к контуру S, с регулярным поведением в бесконечности, непрерывную в замкнутой области T^*+S, которая на S принимала бы наперед заданные значения f, т. е. $u_e=f$.

Подобно тому, как в предыдущем параграфе, мы предполагаем, что кривая S имеет непрерывную кривизну, а данная функция $f(s)$ непрерывна на S.

В § 1 мы видели, что наша задача может иметь не более одного решения. Чтобы построить искомое решение, нам недостаточно принять

$$u=\int\limits_S \mu\,\frac{\cos(r,n)}{r}\,dt,$$

потому что потенциал двойного слоя обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, в то время как решение внешней задачи может и не обращаться в нуль на бесконечности. Поэтому мы делаем более общее задание:

$$u=\int\limits_S \mu\,\frac{\cos(r,n_t)}{r}\,dt+C,\tag{36}$$

где C — постоянное. Для решения задачи нужно определить как функцию μ, так и постоянное C.

Если мы найдем эти величины из граничного условия $u_e=f$, то формула (36) будет давать решение нашей задачи. В самом деле, u будет гармонической функцией всюду в области T^*, регулярной в бесконечно удаленной точке, и мы дополним ее определение, если припишем ей на S значения f, после чего u становится непрерывной в T^*+S.

Используя результаты § 2 этой главы, из формулы (36) получаем

$$u_e=-\pi\mu(s)+\int\limits_S \mu(t)\,\frac{\cos(r_{ts},n_t)}{r_{st}}\,dt+C,$$

и, следовательно, граничное условие $u_e=f$ заменяется интегральным уравнением

$$-\pi\mu(s)+\int\limits_S \mu(t)\,\frac{\cos(r_{ts},n_t)}{r_{st}}\,dt+C=f(s)$$

или

$$\mu(s)-\int\limits_0^l K(s,t)\,\mu(t)\,dt=\frac{C-f(s)}{\pi},\tag{37}$$

где ядро $K(s,t)$ определено, как в предыдущем параграфе, формулой (34). Вместо уравнения (37) можно написать

$$\mu(s)-\lambda\int\limits_0^l K(s,t)\,\mu(t)\,dt=\frac{C-f(s)}{\pi},\tag{37′}$$

где $\lambda=1$.

2. Существенное отличие сравнительно с внутренней задачей заключается в том, что $\lambda=+1$ есть фундаментальное число ядра $K(s,t)$, т. е. что однородное уравнение

$$\bar{\mu}(s)-\int\limits_0^l K(s,t)\,\bar{\mu}(t)\,dt=0$$

имеет решение, отличное от нуля. Действительно, это последнее имеет решение $\bar\mu = 1$, потому что для всех точек s контура S существует тождество

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}}\,dt = 1.$$

Покажем, что $\mu = 1$ есть единственное решение с точностью до произвольного постоянного множителя, т. е. что $\lambda = +1$ есть фундаментальное число ядра $K(s, t)$ ранга 1. Таким образом нужно доказать, что каждое решение однородного уравнения должно иметь вид $\bar\mu = \mathrm{const}$. Пусть $\bar\mu$ есть произвольное решение. Образуем потенциал двойного слоя с моментом $\bar\mu$

$$\bar u = \int\limits_S \bar\mu\,\frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt.$$

Тогда будем иметь

$$\bar u_e = -\pi\bar\mu(s) + \int\limits_S \bar\mu(t)\,\frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}}\,dt = 0.$$

Вследствие единственности решения внешней задачи (§ 1 этой главы) заключаем, что $\bar u \equiv 0$ в области T^*. Следовательно, $\frac{\partial \bar u_e}{\partial n} = 0$, а поэтому (§ 4) также $\frac{\partial \bar u_i}{\partial n} = 0$. Применяя формулу (9) из § 1 этой главы, мы получаем

$$\iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial \bar u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int\limits_S \bar u\,\frac{\partial \bar u}{\partial n}\,ds = 0,$$

откуда $\frac{\partial \bar u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \bar u}{\partial y} = 0$, а значит, $u = \mathrm{const}$. всюду в области T. В частности, $\bar u_i = \mathrm{const}$.

Наконец, $\bar\mu(s) = \frac{1}{2\pi}(\bar u_i - \bar u_e)$ (§ 2 этой главы); следовательно, вследствие равенств $\bar u_e = 0$, $\bar u_i = \mathrm{const}$. получим $\bar\mu(s) = \frac{\bar u_i}{2\pi} = \mathrm{const}.$, что и нужно было доказать.

Вследствие сказанного в п. 10 § 11 гл. II ч. I, присоединенное уравнение

$$\bar\nu(s) - \int\limits_0^l K(t, s)\,\bar\nu(t)\,dt = 0,$$

или

$$-\pi\bar\nu(s) + \int\limits_S \frac{\cos(r_{st}, n_s)}{r_{st}}\,\bar\nu(t)\,dt = 0$$

имеет, с точностью до постоянного множителя, единственное решение $\bar\nu(s)$, т. е. фундаментальное число $\lambda = +1$ будет ранга 1 и для присоединенного ядра $K(t, s)$. Вследствие результата § 14 гл. II ч. I, данное неоднородное уравнение (37) имеет тогда и только тогда решение, если $C - f(s)$ ортогональна к $\bar\nu(s)$. Это решение необходимо будет непрерывной функцией с периодом l, потому что $f(s)$ и ядро $K(s, t)$

как функция от s имеют период l. Таким образом для определения C мы имеем уравнение

$$C\int\limits_S \bar\nu(s)\,ds = \int\limits_S f(s)\,\bar\nu(s)\,ds,$$

откуда

$$C = \frac{\int\limits_0^l f(s)\,\bar\nu(s)\,ds}{\int\limits_0^l \bar\nu(s)\,ds}. \tag{38}$$

Полагая C определенным по формуле (38), мы можем считать, что уравнение (37) имеет решения. Если μ есть одно из решений:

$$\mu(s) = \frac{C - f(s)}{\pi} + \frac{1}{D\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}; 1)}\int\limits_0^l D\begin{pmatrix} s, & s' \\ t, & t' \end{pmatrix}; 1\Big)\,\frac{C - f(t)}{\pi}\,dt$$

(ч. I, гл. II, § 14), то общее решение неоднородного уравнения (37) будет

$$M = \mu + A,$$

где A — произвольное постоянное, так как $\bar\mu = A$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения. Решение внешней задачи Дирихле будет дано формулой (36):

$$u = \int\limits_S M\,\frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt + C = \int\limits_S \mu_t\,\frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt + A\int\limits_S \frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt + C,$$

или

$$u = \int\limits_S \mu_t\,\frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt + C,$$

так как во всех точках внешней области T^* имеет место тождество

$$\int\limits_S \frac{\cos(r, n_t)}{r}\,dt = 0.$$

Таким образом мы видим, что, несмотря на то, что неоднородное интегральное уравнение (37) имеет бесконечное множество непрерывных решений, все они определяют одну и ту же гармоническую функцию u, представляющую решение внешней задачи Дирихле, что и можно было предвидеть вследствие единственности решения внешней задачи.

§ 7. Вторая граничная задача теории потенциала. 1. Пусть дана замкнутая кривая S с непрерывной кривизной и на S непрерывная функция $f(s)$.

Требуется найти функцию u, гармоническую в области T, внутренней относительно контура S, непрерывную вместе с нормальной производной в замкнутой области $T + S$ и на границе S удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = f. \tag{39}$$

В этом заключается вторая задача теории потенциала, известная под именем *задачи Неймана*.

Покажем прежде всего, что наша задача может иметь лишь единственное решение, если пренебречь произвольным постоянным слагаемым. С этой целью применим формулу (9) из § 1 настоящей главы

$$\iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy=-\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

к разности $u=v-w$ двух гармонических функций, удовлетворяющих на граничной кривой S одному и тому же условию (39). Тогда $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, и интегральная формула примет вид

$$\iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy=0,$$

откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ всюду в области T, а, значит, $u=$ $=\text{const.}$ в области T. Следовательно, не может существовать двух различных решений одной и той же задачи Неймана, которые не отличались бы друг от друга на постоянную. С другой стороны, мы знаем [§ 1 этой главы, формула (8)], что если решение задачи существует, то заданная функция f должна удовлетворять условию

$$\int\limits_S f(s)\,ds=0. \tag{40}$$

2. Мы покажем, что условие (40) является также достаточным для существования решения, и, предполагая его выполненным, построим искомое решение. Будем искать решение задачи Неймана в форме потенциала простого слоя, т. е. положим

$$u=\int\limits_S \rho\ln\frac{1}{r}\,ds. \tag{41}$$

Вопрос сводится к определению непрерывной на S функции ρ под условием (39).

После того как мы определим ρ и внесем его в формулу (41), эта последняя будет действительно давать решение задачи Неймана. В самом деле, u как потенциал простого слоя будет гармонической функцией в области T, непрерывной в замкнутой области $T+S$, причем его нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ при приближении к границе S изнутри стремится к значениям f согласно определению ρ.

Определение ρ приводит нас к неоднородному интегральному уравнению. Действительно, согласно § 3 настоящей главы, имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_s}=-\pi\rho_s+\int\limits_S \rho_t\frac{\cos(r_{st},\,n_s)}{r_{st}}\,dt=f(s) \tag{42}$$

или

$$\rho(s)-\int\limits_0^l K(t,\,s)\,\rho(t)\,dt=-\frac{f(s)}{\pi}, \tag{42'}$$

где соответственно с формулой (34) положено

$$K(t,\,s)=\frac{1}{\pi}\frac{\cos(r_{st},\,n_s)}{r_{st}};$$

$K(s,\,t)$ и $K(t,\,s)$ суть взаимно присоединенные ядра [1]).

Из предыдущего параграфа мы знаем, что $\lambda=+1$ есть фундаментальное число ядра K ранга 1. Поэтому присоединенное к (42′) однородное интегральное уравнение

$$\overline{\mu}(s)-\int\limits_0^l K(s,\,t)\,\overline{\mu}(t)\,dt=0$$

имеет единственную фундаментальную функцию $\overline{\mu}=1$, как мы это видели в предыдущем параграфе. Что касается однородного уравнения, соответствующего уравнению (42′), то оно будет

$$\overline{\nu}(s)-\int\limits_0^l K(t,\,s)\,\overline{\nu}(t)\,dt=0,$$

причем оно имеет также единственную фундаментальную функцию. Неоднородное уравнение (42′) согласно третьей теореме Фредгольма, (ч. I, гл. II, § 14) имеет только тогда решение, когда его правая часть $-\frac{f}{\pi}$ ортогональна к единице, т. е. удовлетворяет условию $\int\limits_S f(s)\,ds=0$. Согласно предположению это условие (40) мы считаем выполненным. Частное решение неоднородного уравнения (42′) будет, согласно § 14 гл. II ч. I,

$$\rho(s)=-\frac{f(s)}{\pi}-\frac{1}{D\left(\begin{matrix}t'\\s'\end{matrix};1\right)}\int\limits_0^l D\left(\begin{matrix}t,\,t'\\s,\,s'\end{matrix};1\right)\frac{f(t)}{\pi}\,dt.$$

Тогда общее его решение имеет вид $\rho+C\overline{\nu}$, где C — произвольное постоянное, а $\overline{\nu}$ — фундаментальная функция ядра $K(t,\,s)$, соответствующая фундаментальному числу $\lambda=+1$.

Искомое решение будет поэтому

$$u=\int\limits_S \rho\ln\frac{1}{r}\,dt+C\int\limits_S \overline{\nu}\ln\frac{1}{r}\,dt.$$

Для всех точек, лежащих внутри контура S, имеем

$$\overline{u}=\int\limits_S \overline{\nu}\ln\frac{1}{r}\,dt=\text{const.}$$

Действительно, $\overline{u}$ есть потенциал простого слоя, а потому

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial n}=-\pi\overline{\nu}(s)+\int\limits_S \overline{\nu}(t)\frac{\cos(r_{ts},\,n_s)}{r_{st}}\,dt.$$

---

[1]) Непрерывное решение уравнения (42) необходимо будет иметь период l потому что $f(s)$ и ядро $K(t,\,s)$ имеют l своим периодом относительно s.

Отсюда $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial n}=0$, так как ν есть фундаментальная функция ядра $\frac{1}{\pi}\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{st}}$ при $\lambda=+1$. Следовательно, всюду в области T имеем $\overline{u}=\text{const}$.

Итак, мы получили для решения нашей задачи формулу

$$u=\int_S \rho \ln\frac{1}{r}\,dt+\text{const}.$$

По самому смыслу задачи придаточное постоянное может быть произвольным.

§ 8. Третья граничная задача теории потенциала. 1. Пусть дана замкнутая кривая S с непрерывной кривизной и на ней даны две непрерывные функции $h(s)$ и $f(s)$.

Требуется определить функцию u, гармоническую во внутренней области T, непрерывную вместе с нормальной производной в замкнутой области $T+S$, которая бы на граничной кривой S удовлетворяла условию

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}+hu_i=f. \tag{43}$$

В этом заключается так называемая *третья граничная задача теории потенциала.* Покажем сначала, что эта задача может иметь лишь единственное решение, если на данную функцию $h(s)$ мы наложим то ограничение, что h не есть тождественный нуль и не имеет положительных значений, т. е. $h(s)\leqslant 0$.

В самом деле, если бы существовало два решения u_1 и u_2, то их разность $v=u_1-u_2$ была бы решением задачи с граничным условием

$$\frac{\partial v_i}{\partial n}+hv_i=0.$$

Согласно формуле (9) из § 1 этой главы имеем

$$\int_T\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int_S v\frac{\partial v}{\partial n}\,ds=\int_S hv^2ds,$$

или

$$\int_T\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_S(-h)v^2ds=0.$$

Так как по условию $-h\geqslant 0$ и $h\not\equiv 0$, то отсюда следует

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{в области } T,$$

$$v=0 \qquad \text{на контуре } S.$$

Следовательно, $v=\text{const}$. в T, и так как v непрерывна в $T+S$, то $v\equiv 0$ в области T, а поэтому $u_1=u_2$ в области T, что и нужно было доказать.

Чтобы построить решение нашей задачи, положим

$$u=\int_S \rho\ln\frac{1}{r}\,dt \tag{44}$$

и определим неизвестную функцию ρ под условием (43).

Из § 3 этой главы мы знаем, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_s}=-\pi\rho_s-\int_S \rho_t\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{st}}\,dt,$$

$$u_i=u_e=\int_S \rho_t\ln\frac{1}{r_{st}}\,dt.$$

Следовательно, для определения ρ получаем интегральное уравнение

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}+hu_i=-\pi\rho(s)-\int_S\rho(t)\left\{\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{st}}-h(s)\ln\frac{1}{r_{st}}\right\}dt=f(s)$$

или

$$\rho(s)+\int_0^l G(s, t)\,\rho(t)\,dt=-\frac{f(s)}{\pi}, \tag{45}$$

где положено

$$G(s, t)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{st}}-h(s)\ln\frac{1}{r_{st}}\right\}. \tag{46}$$

Очевидно, непрерывное решение уравнения (45) необходимо имеет период l, потому что функции $h(s)$, $f(s)$ и $G(s, t)$ имеют период l относительно переменного s.

Для определения ρ мы снова имеем неоднородное интегральное уравнение. Это уравнение имеет ядро $G(s, t)$ не регулярное, потому что на диагонали $t=s$ оно становится логарифмически бесконечным. Но мы знаем, что к такому ядру приложима вся теория Фредгольма, потому что его первая итерация ограничена (ч. I, гл. II, §§ 16, 17).

Согласно теории Фредгольма уравнение (45) либо имеет единственное непрерывное решение ($\lambda=-1$ не есть фундаментальное число ядра G), либо соответствующее однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений ($\lambda=-1$ есть фундаментальное число ядра G). В этом последнем случае неоднородное уравнение (45) имеет решение только тогда, когда $f(s)$ удовлетворяет некоторым условиям ортогональности, причем это решение не будет единственным. Так как при $h\leqslant 0$ ($h\not\equiv 0$) и любой функции $f(s)$ наша проблема может иметь лишь единственное решение, то, очевидно, второй случай не имеет места. Итак, третья граничная задача всегда имеет решение и притом единственное, если $h\leqslant 0$ и $h\not\equiv 0$. Это решение дается формулой (44), в которой ρ определяется из интегрального уравнения (45), т. е. по формуле

$$\rho(s)=-\frac{f(s)}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^l R(s, t; -1)f(t)\,dt,$$

где $R(s, t; \lambda)$ есть резольвента ядра $G(s, t)$.

2. Обращаясь к общему случаю любой непрерывной функции $h(s)$, мы можем, очевидно, лишь утверждать.

Либо неоднородная граничная задача с условием $\frac{\partial u_i}{\partial n}+hu_i=f$ имеет единственное решение, либо соответствующая однородная задача с условием $\frac{\partial u_i}{\partial n}+hu_i=0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

В последнем случае неоднородная задача имеет только тогда решения, когда $f(s)$ удовлетворяет некоторым условиям ортогональности, причем это решение не будет уже единственным.

Например, при $h\equiv 0$ (задача Неймана, § 7 этой главы) неоднородная задача имеет решение только в том случае, когда $f(s)$ ортогональна к единице, причем это решение определяется с точностью до постоянного слагаемого. Таким образом здесь неоднородная задача не имеет единственного решения, соответствующая же однородная задача с условием $\frac{\partial u_i}{\partial n}=0$ имеет одно линейно независимое решение $u\equiv 1$.

3. Мы рассмотрели основные граничные задачи теории потенциала для плоскости. Тот же метод интегральных уравнений, без всяких принципиальных затруднений, может быть проведен в случае пространственных задач, если вместо логарифмических потенциалов мы положим в основание ньютонианские потенциалы простого и двойного слоя.