1948к
1917

Привалов, И.И.

Аналитическая
геометрия

М.-Л.
1945.

1948К
1917

И. И. ПРИВАЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ

Утверждено Всесоюзным комитетом по делам высшей школы при СНК СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений

Карело-Финская База Академии Наук СССР
БИБЛИОТЕКА
Библиотека Института
Шифр
Инвентар
7491

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1945 ЛЕНИНГРАД

7
9
9
10
10
11
14
20
21
25
28
28
29
31
33
35
36
36
37
38
40
42
44
45
48
51
51
52
54
55
56
59
3

1973 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании моей книги «Аналитическая геометрия» подвергнут переработке материал предыдущего издания. Выполняя эту методическую работу, я стремился устранить трудности в понимании учащимися некоторых вопросов курса, замеченные в процессе преподавания рядом преподавателей втузов. Приношу глубокую благодарность всем приславшим свои замечания. Особо ценные указания я получил от доцента В. П. Минорского, которому выражаю сердечную благодарность.

И. Привалов

1992 г.

Редактор *Д. А. Райков.* Подписано к печати 7/III 1945 г. 19 печ. л. 22,3 уч.-изд. л. 46 800 тип. зн. в печ. л. Тираж 100 000 экз. А 14487. Цена книги 8 р. Заказ № 820.

Набрано и сматрицировано в 16-й типографии треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при СНК РСФСР. Москва, Трёхпрудный пер., 9.

Отпечатано в 3-й типографии «Красный пролетарий» треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при СНК РСФСР. Москва. Краснопролетарская, 16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 7

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава I. **Метод координат** 9

§ 1. Понятие о направленных отрезках 9
§ 2. Сложение отрезков 10
§ 3. Координаты на прямой линии 10
§ 4. Координаты на плоскости 11
§ 5. Основные задачи 14
§ 6. О направленных углах 20
§ 7. Основные положения теории проекций 21
Упражнения 25

Глава II. **Прямая линия** 28

§ 1. Нормальное уравнение прямой линии 28
§ 2. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду 29
§ 3. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом . . . 31
§ 4. Уравнение прямой линии в отрезках 33
§ 5. Исследование общего уравнения первой степени $Ax + By + C = 0$ 35
§ 6. Построение прямой линии по её уравнению 36
§ 7. Угол между двумя прямыми. 36
§ 8. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых 37
§ 9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении 38
§ 10. Определение точки пересечения двух прямых 40
§ 11. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки 42
§ 12. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой 44
§ 13. Расстояние от данной точки до данной прямой 45
Упражнения 48

Глава III. **Линии и их уравнения** 51

§ 1. Изображение линий посредством уравнений 51
§ 2. Геометрический смысл уравнений 52
§ 3. Две основные задачи 54
§ 4. Окружность 55
§ 5. Эллипс 56
§ 6. Гипербола и её асимптоты 59

§ 7. Парабола 62
§ 8. Построение точек эллипса, гиперболы и параболы посредством циркуля и линейки 63
§ 9. Полярные координаты. Примеры построения кривых, уравнения которых даны в полярных координатах 65
Упражнения 67

Глава IV. **Элементарная теория конических сечений** 70

§ 1. Эксцентриситет и директрисы эллипса 70
§ 2. Эксцентриситет и директрисы гиперболы 72
§ 3. Эксцентриситет и директриса параболы 74
§ 4. Уравнение конического сечения в полярных координатах 74
§ 5. Диаметры эллипса. Сопряжённые диаметры. 76
§ 6. Диаметры гиперболы. Сопряжённые диаметры. 80
§ 7. Диаметры параболы. 83
§ 8. Касательная 85
§ 9. Эллипс как проекция окружности 88
Упражнения 89

Глава V. **Преобразование координат. Классификация линий** . . 95

§ 1 Задача преобразования координат 95
§ 2. Перенос начала координат 96
§ 3. Поворот осей координат 96
§ 4. Общий случай 98
§ 5. Механическое истолкование формул преобразования координат 99
§ 6. Некоторые приложения формул преобразования координат 103
§ 7. Составление формул преобразования координат в случае, когда даны уравнения новых осей 106
§ 8. Связь декартовых координат с полярными 108
§ 9. Классификация линий 110
Упражнения 112

Глава VI. **Определители 2-го и 3-го порядка** 114

§ 1. Определители 2-го порядка 114
§ 2. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными 118
§ 3. Определители 3-го порядка 120
§ 4. Основные свойства определителей 3-го порядка 122
§ 5. Система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными 127
§ 6. Однородная система 129
§ 7. Общее исследование системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными 133
§ 8. Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии 138
Упражнения 140

Глава VII. **Исследование общего уравнения второй степени** . . 141

§ 1. Общее уравнение линии 2-го порядка 141
§ 2. Преобразование общего уравнения линии 2-го порядка к новому началу координат. 142
§ 3. Центр линии 2-го порядка 143
§ 4. Два инварианта уравнения линии 2-го порядка 146
§ 5. Упрощение уравнения центральной линии 2-го порядка . . 148
§ 6. Исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка 153

§ 7. Третий инвариант уравнения линии 2-го порядка 157
§ 8. Главные диаметры центральной линии 2-го порядка . . . 158
§ 9. Построение центральной линии 2-го порядка 160
§ 10. Исследование уравнения линии 2-го порядка, не имеющей определённого центра ($AC - B^2 = 0$) 161
§ 11. Определение главного диаметра и вершины параболы . . 167
§ 12. Упрощение уравнения параболы 168
§ 13. Построение параболы 170
Упражнения 171

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава I. **Координаты в пространстве** 174

§ 1. Прямоугольные координаты 174
§ 2. Основные задачи 176
§ 3. Определение направлений в пространстве 180
§ 4. Формулы Эйлера 181
Упражнения 183

Глава II. **Элементы векторной алгебры** 185

§ 1. Векторы и скаляры 185
§ 2. Сложение векторов 186
§ 3. Вычитание векторов 189
§ 4. Умножение вектора на скаляр 190
§ 5. Проекции вектора 191
§ 6. Действия над векторами, заданными своими проекциями 194
§ 7. Скалярное произведение векторов 195
§ 8. Основные свойства скалярного произведения 196
§ 9. Скалярное произведение векторов, заданных проекциями 198
§ 10. Направление вектора 199
§ 11. Векторное произведение 202
§ 12. Основные свойства векторного произведения 204
§ 13. Векторное произведение векторов, заданных проекциями 207
§ 14. Векторно-скалярное произведение 209
§ 15. Векторно-скалярное произведение в проекциях 211
§ 16. Двойное векторное произведение. 213
Упражнения 216

Глава III. **Плоскость** 217

§ 1. Нормальное уравнение плоскости 217
§ 2. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду 220
§ 3. Уравнение плоскости в отрезках 223
§ 4. Исследование общего уравнения плоскости 225
§ 5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку . 226
§ 6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки 227
§ 7. Угол между двумя плоскостями 230
§ 8. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей 231
§ 9. Точка пересечения трёх плоскостей 234
§ 10. Расстояние от точки до плоскости 235
Упражнения 238

Глава IV. Прямая линия 241

§ 1. Уравнения прямой линии 241
§ 2. Уравнения прямой линии в проекциях 244
§ 3. Угол между двумя прямыми линиями 246
§ 4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых 247
§ 5. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки 249
§ 6. Угол между прямой и плоскостью 249
§ 7. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости 250
§ 8. Общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую 252
§ 9. Пересечение прямой с плоскостью 254
§ 10. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости 256
Упражнения 260

Глава V. Геометрическое значение уравнений 266

§ 1. Изображение поверхностей посредством уравнений . . . 266
§ 2. Геометрический смысл уравнений 267
§ 3. Две основные задачи 267
§ 4. Шаровая поверхность 267
§ 5. Цилиндрические поверхности 268
§ 6. Поверхности вращения 269
§ 7. Уравнения линии в пространстве 271
§ 8. Цилиндрические поверхности (общий случай) 272
§ 9. Конические поверхности 273
Упражнения 274

Глава VI. Поверхности 2-го порядка 275

§ 1. Порядок поверхности 275
§ 2. Эллипсоид 276
§ 3. Однополостный гиперболоид 277
§ 4. Двухполостный гиперболоид. 279
§ 5. Эллиптический параболоид 280
§ 6. Гиперболический параболоид 282
§ 7. Конус 2-го порядка 283
§ 8. Цилиндры 2-го порядка 284

Ответы 285

ВВЕДЕНИЕ

Предмет аналитической геометрии заключается в исследовании геометрических форм с помощью алгебраического анализа. В различных отделах элементарной математики алгебра прилагается к решению многих геометрических вопросов. Так, например, в геометрии с помощью чисел приходится определять длины отрезков и дуг, площади некоторых фигур, объёмы тел; в тригонометрии пользуются числовыми соотношениями для установления зависимостей между углами и отношениями отрезков. Но в то время как в этих отделах математики с помощью анализа решается вопрос о размерах геометрических форм, в аналитической геометрии с помощью чисел характеризуется самая существенная их особенность—их положение.

Числа, определяющие собой положение геометрической формы, называются её *координатами*. Способ же; с помощью которого определяется положение геометрической формы; носит название способа или метода координат. Геометрические формы весьма разнообразны; и при построении аналитической геометрии естественно мы должны принять одну какую-нибудь из форм за первичную; с помощью которой мы будем образовывать все остальные. Проще всего за такую начальную форму принять геометрическую точку. Тогда всякую другую геометрическую форму, например линию или поверхность, можно рассматривать как геометрическое место точек.

Приняв за начальный элемент точку, мы должны прежде всего показать, каким образом определяется положение точки в пространстве с помощью чисел. В отчётливой форме метод координат был введён в науку французским математиком Декартом, который в 1637 г. в своём сочинении «La géométrie» положил его в основу решения различных геометрических задач. Вторая основная идея Декарта заключается в установлении того, каким образом геометрические свойства линии отражаются на координатах точек, принадлежащих этой линии. Само собою разумеется, что в небольшом сочинении самого Декарта, очень сжато написанном, его основные идеи ещё не получили значительного развития. Но плодотворные идеи Декарта очень скоро нашли себе применение во всех отраслях

математики и механики; благодаря работам Ньютона, Лейбница, Лагранжа и др. они сделались весьма мощным орудием математического исследования.

Приступая к изложению аналитической геометрии, мы, ради удобства, делим весь курс на две части. В первой части мы будем заниматься исследованием плоских геометрических форм средствами алгебры, основанными на применении координат. Во второй части мы будем аналогично поступать с пространственными геометрическими формами.

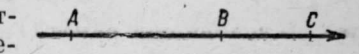
Служебную роль в курсе имеет глава, посвящённая изложению теории определителей 2-го и 3-го порядков. Эта глава, равно как и дальнейшие её приложения, может быть опущена.

В целях большей геометрической наглядности исходные уравнения плоскости и прямой в пространстве даны в векторной форме. Соответственно с этим включена глава, в которой изложены необходимые сведения из векторной алгебры. Однако, учитывая потребности тех втузов, в которых при изучении аналитической геометрии не проходится векторная алгебра, мы даём, параллельно векторному изложению теории плоскости и прямой, также и координатное.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 1
МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. Понятие о направленных отрезках. Рассмотрим неограниченную прямую и две точки A и B на этой прямой. Эти две точки определяют отрезок $\overline{AB}$ (черт. 1). В элементарной геометрии обычно рассматривают абсолютную длину отрезка $\overline{AB}$, не делая различия между его началом A и его концом B; т. е. отрезки $\overline{BA}$ и $\overline{AB}$ считают эквивалентными. Однако, во многих вопросах геометрии и механики имеет значение не только абсолютная длина отрезка, но и его направление. Так, если рассматривать отрезок как путь, пройдённый движущейся точкой, то отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ будут различны, так как они изображают два пути, равные по величине, но противоположные по направлению. Таким образом приходится рассматривать не только абсолютную длину отрезка, но и его направление; последнее характеризуют знаком. Так, если мы условимся отрезок $\overline{AB}$ считать положительным, то отрезок $\overline{BA}$ будет отрицательным; причём



Черт. 1.

$$\overline{BA} = -\overline{AB},$$

т. е. при взаимной перемене начала и конца отрезка абсолютная его величина не изменяется, а знак изменяется на обратный. Когда имеется несколько отрезков на одной прямой, то для сравнения между собой их направлений выбирают на этой прямой определённое направление за положительное и считают отрезки, откладываемые в этом направлении, положительными, а в обратном—отрицательными. Так, например, на черт. 1 за положительное направление принято направление слева направо, указанное на чертеже стрелкой. В этом случае

отрезок $\overline{AB}$ считается положительным; а отрезок $\overline{CB}$—отрицательным. Неограниченная прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью*.

§ 2. Сложение отрезков. Рассматривая отрезки как величины относительные, мы установим правило их сложения. Будем рассматривать отрезок как путь, пройдённый движущейся точкой, и примем за сумму двух отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ тот отрезок, на который сместится точка в итоге непрерывного последовательного прохождения обоих слагаемых отрезков; другими словами, *чтобы получить сумму двух данных направленных отрезков, нужно конечную точку первого отрезка совместить с начальной точкой второго; тогда начальная точка первого отрезка будет представлять начало отрезка-суммы, а конечная точка второго—конец отрезка-суммы, т. е.*

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \qquad (1)$$

при любом положении трёх точек A, B, C на прямой. Считая, в частности; C совпадающей с точкой A; из соотношения (1) получим:

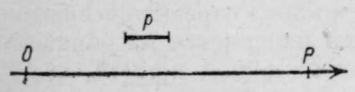
$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=0, \quad \text{или} \quad \overline{BA}=-\overline{AB}; \qquad (1')$$

как мы условились ранее. Очевидно; из соотношения (1) следует, что если имеется на прямой ряд точек $A; B, C, D, \ldots, K, L$, то отрезки между ними удовлетворяют соотношению:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\ldots+\overline{KL}=\overline{AL}.$$

§ 3. Координаты на прямой линии. *Координатами точки* называются такие числа, которые вполне определяют положение точки; обратно, если задано положение точки; то эти числа являются вполне определёнными.

Посмотрим сперва, как можно определить положение точки на прямой линии. Возьмём на этой прямой некоторую произвольную точку O (от латинского origo—начало), примем её за начало всех откладываемых на прямой отрезков и установим положительное направление на этой прямой, например слева направо (черт. 2). Тогда всякой точке P на прямой соответствует отрезок $\overline{OP}$ и, обратно, каждому отрезку $\overline{OP}$ соответствует одна точка P—конец этого отрезка. Очевидно, точкам, лежащим вправо от O, будут соответствовать положи-



Черт. 2.

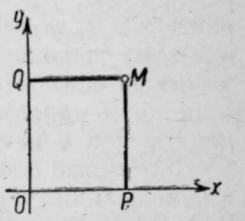
тельные отрезки, а точкам, лежащим влево от O,—отрицательные отрезки. Итак, положение точки P вполне определяется направленным отрезком $\overline{OP}$. Чтобы перейти от отрезков к числам, выберем отрезок p произвольной длины за единицу масштаба (черт. 2) и рассмотрим отношение отрезка $\overline{OP}$ к отрезку, принятому за единицу масштаба:

$$\frac{\overline{OP}}{p}=x;$$

при этом будем приписывать числу x знак плюс в случае положительного отрезка $\overline{OP}$ и знак минус в случае отрицательного отрезка $\overline{OP}$.

Это число x есть *алгебраическая мера* направленного отрезка $\overline{OP}$ при выбранной единице измерения. Число x вполне определяет положение точки P на прямой и называется координатой этой точки. Очевидно, точки P; лежащие вправо от O, имеют положительные координаты; точки же; лежащие влево от O,—отрицательные; сама же точка O имеет координату, равную нулю.

§ 4. Координаты на плоскости. Чтобы определить положение точки на плоскости, выбирают две взаимно перпендикулярные прямые; называемые осями координат; точку их пересечения принимают за начало отрезков, откладываемых на осях, и называют *началом координат* (черт. 3). Кроме того, одно из двух возможных направлений каждой оси считают положительным, противоположное же направление—отрицательным. Обыкновенно на горизонтальной оси координат; называемой *осью абсцисс*, положительным направлением считается направление слева направо; на вертикальной оси, называемой *осью ординат*,—направление снизу вверх. Для краткости ось абсцисс называют *осью x-ов*; ось ординат—*осью y-ов*.



Черт. 3.

Наконец, примем определённый отрезок за единицу масштаба. Тогда положение всякой точки M плоскости определяется двумя числами,—координатами этой точки. А именно, всякой точке M соответствуют на осях координат две точки P и Q, являющиеся её проекциями на эти оси, и обратно, зная точки P и Q на осях, можно построить единственную точку M на плоскости, для которой P и Q являются проекциями на оси. Таким образом, определение положения точки M плоскости

сводится к определению положений её проекций P и Q, лежащих соответственно на постоянных осях Ox и Oy.

Мы уже знаем, что положение точки P прямой Ox вполне; т. е. однозначно; определяется одним числом x; представляющим собою количество единиц масштаба в отрезке $\overline{OP}$, причём это число x положительно, если точка P лежит вправо от O, и отрицательно; если точка P лежит влево от O. Это число x; координата точки P—проекции M на ось абсцисс;—является первой координатой точки M и называется её *абсциссой*.

Совершенно так же положение точки Q, другой проекции точки M, лежащей на оси y-ов; вполне; т. е. однозначно; определяется числом y, представляющим собою количество единиц масштаба в отрезке $\overline{OQ}$, причём это число y берётся положительным, если точка Q лежит вверх от O, и отрицательным, если она лежит вниз от O. Число y, координата точки Q—проекции M на ось ординат,—является второй координатой точки M и называется её *ординатой*.

Оси делят плоскость на четыре части; называемые *квадрантами*. Часть между $+Ox$ и $+Oy$ есть I квадрант; между $+Oy$ и $-Ox$ II квадрант; между $-Ox$ и $-Oy$ III квадрант и между $-Oy$ и $+Ox$ IV квадрант. Для всех точек в I квадранте обе координаты x и y положительны; т. е. больше нуля (знак $>$ означает больше; знак $<$ — меньше); для точек во II квадранте $x<0$, $y>0$; в III квадранте $x<0$; $y<0$ и в IV квадранте $x>0$, $y<0$. Если точка M лежит на оси Ox (совпадает с P), то; очевидно, её ордината y равна нулю; если точка M лежит на оси Oy (совпадает с Q), то её абсцисса x равна нулю; если же M находится в начале координат O, то обе её координаты x и y равны нулю.

Описанный способ определения положения точки плоскости с помощью чисел называется способом или методом координат. Это — не единственный возможный способ координат для определения положения точки; но он является простейшим из всех возможных; и мы в дальнейшем им преимущественно будем пользоваться.

Координаты, которые применяются здесь для определения положения точки, называются *прямоугольными координатами*, так как точка M является пересечением двух прямых PM и QM, встречающихся под прямым углом; а также *декартовыми*, по имени Декарта; который в 1637 г. опубликовал первый труд по аналитической геометрии. Из описанного метода координат вытекает решение двух основных задач.

Задача I. *По данной точке M определить её координаты.*

Из данной точки M опускаем перпендикуляры на оси Ox и Oy. Подошвы эти перпендикуляров—точки P и Q, называемые проекциями точки M на оси, определят обе искомые координаты. Первая координата точки M, её абсцисса, получится, если число x единиц масштаба, содержащихся в отрезке $\overline{OP}$, взять со знаком $+$ или $-$; смотря по тому, лежит ли точка P вправо или влево от O. Вторая же координата точки M, её ордината, изобразится числом y единиц масштаба в отрезке $\overline{OQ}$, причём y нужно взять с $+$ или $-$, смотря по тому, лежит ли точка Q вверху или внизу от O.

Задача II. *Зная координаты x и y точки M, построить точку M.*

Откладывая по оси Ox отрезок $\overline{OP}$, равный x единицам масштаба (вправо, если x положительно, и влево, если x отрицательно), получим точку P—проекцию искомой точки на ось Ox; откладывая по оси Oy отрезок $\overline{OQ}$, равный y единицам масштаба (вверх, если y положительно, и вниз, если y отрицательно), мы получим точку Q—проекцию искомой точки на ось Oy. Зная же P и Q, легко по этим точкам, как проекциям, построить искомую точку M. Для этого нужно провести через P и Q прямые, параллельные осям координат: в пересечении этих прямых получится искомая точка M. Из этого построения видно, что по данным координатам x и y точка M определяется однозначно.

Пример. По координатам $(-2, -3)$ построить точку.

Откладываем на оси Ox влево от O отрезок $\overline{OP}$, равный 2 единицам масштаба, и получаем точку P—проекцию искомой точки на ось Ox; откладывая по оси Oy вниз от O отрезок $\overline{OQ}$, равный 3 единицам масштаба, получим точку Q—проекцию искомой точки на ось Oy. Проведя через P и Q прямые параллельно осям координат, в пересечении их получим искомую точку.

Замечание. При решении этих основных задач не является необходимым определять обе проекции точки M, достаточно определить одну, например проекцию на ось абсцисс — точку P. Так, в задаче I опускаем из данной точки M перпендикуляр на ось абсцисс. Его основание P определяет проекцию точки M на эту ось. Измеряем отрезок $\overline{OP}$ с помощью единицы масштаба и получаем абсциссу x данной точки. Чтобы получить её ординату, измеряем той же единицей масштаба отрезок $\overline{PM}$ (вместо $\overline{OQ}$ при первом решении, так как из черт. 3 $\overline{OQ}=\overline{PM}$).

Для решения задачи II, построения точки по данным координатам x и y, например:

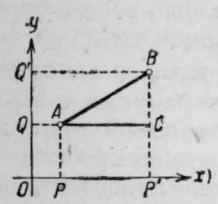
$$x=-2, \quad y=-3,$$

откладываем влево от O по оси абсцисс отрезок $\overline{OP}$, равный 2 единицам масштаба; через полученную точку P проводим прямую, параллельную оси ординат, и на ней откладываем вниз от P отрезок $\overline{PM}$, равный 3 единицам масштаба; конец этого отрезка и есть искомая точка M. (Это ясно из черт. 3, так как $\overline{OQ}=\overline{PM}$.)

§ 5. Основные задачи. Изложенный здесь метод координат приложим к решению многих задач.

Задача I. *Определить расстояние между двумя данными точками.*

Дана система координат (черт. 4). Пусть A будет точка с координатами x_1 и y_1, или, кратко, $A(x_1, y_1)$. Пусть $B(x_2, y_2)$ будет другая точка. Тогда длина отрезка AB, т. е. расстояние d между точками A и B; имеет вполне определённое значение.



Черт. 4.

Посмотрим, как d выразится через координаты данных точек. На черт. 4 имеем:

$$\overline{OP}=x_1, \quad \overline{PA}=y_1,$$

$$\overline{OP'}=x_2, \quad \overline{P'B}=y_2.$$

Проводим из точки A прямую параллельно оси абсцисс до пересечения в точке C с ординатой $P'B$. Из прямоугольного треугольника ACB следует:

$$d^2=AC^2+CB^2.$$

Так как при любом положении точек P и P' имеет место равенство:

$$\overline{OP}+\overline{PP'}=\overline{OP'},$$

то

$$\overline{PP'}=\overline{OP'}-\overline{OP}=x_2-x_1.$$

Проектируя точки A и B на ось Oy, аналогично найдём:

$$\overline{QQ'}=\overline{OQ'}-\overline{OQ}=y_2-y_1.$$

Заметив, что

$$AC=|\overline{PP'}|=|x_2-x_1| \text{ и } CB=|\overline{QQ'}|=|y_2-y_1|,$$

получим:

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2,$$

или

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

откуда

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{2}$$

т. е. *расстояние между двумя данными точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответственных координат этих точек.*

Пример. Найти расстояние между точками (3, 4) и (6, 0).

Искомое расстояние вычисляется по только что выведенной формуле. Здесь $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=6$, $y_2=0$. Получаем:

$$d=\sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

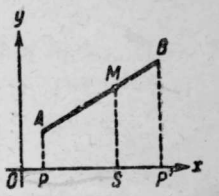
В частности, расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат $O(0, 0)$ определится согласно формуле (2) так:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Задача II. *Найти координаты точки M, делящей данный отрезок AB в данном отношении.*

Обозначая через x_1, y_1 координаты данной точки A, через x_2, y_2 координаты другой данной точки B, определим координаты x, y искомой точки M, делящей отрезок AB в данном отношении λ, т. е. так, что

$$\frac{AM}{MB}=\lambda. \tag{4}$$



Черт. 5.

Пусть P, S, P' суть проекции точек A, M, B на ось Ox (черт. 5). Из черт. 5 следует, что $AM:MB=\overline{PS}:\overline{SP'}$, так как отрезки двух прямых, заключённые между параллельными прямыми, пропорциональны. В силу условия (4) эта пропорция заменится равенством:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{SP'}}=\lambda. \tag{5}$$

Так как при любом положении точек P, S, P' на оси Ox имеют место равенства:

$$\overline{OS}=\overline{OP}+\overline{PS} \text{ и } \overline{OS}+\overline{SP'}=\overline{OP'},$$

то

$$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}=x-x_1 \quad \text{и} \quad \overline{SP'}=\overline{OP'}-\overline{OS}=x_2-x.$$

Следовательно, равенство (5) примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

откуда

$$x-x_1=\lambda(x_2-x), \quad \text{или} \quad x-x_1=\lambda x_2-\lambda x,$$

т. е.

$$x+\lambda x=x_1+\lambda x_2.$$

Вынося в левой части x за скобку, получим:

$$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2,$$

и, наконец:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{6}$$

Чтобы получить ординату y искомой точки M, нужно проектировать точки A, M, B на ось ординат; аналогично предыдущему получим:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{7}$$

Полагая в формулах (6) и (7) $\lambda=1$, найдём координаты середины отрезка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{8}$$

т. е. *координаты середины отрезка равны полусуммам соответственных координат его концов.*

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок между точками $A(1, 2)$ и $B(-1, 4)$ в отношении $1:2$.

Здесь $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=4$ и $\lambda=\frac{1}{2}$. Следовательно:

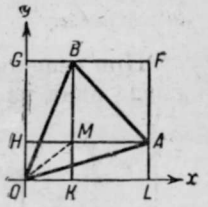
$$x=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}, \quad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}.$$

Задача III. *Определить площадь треугольника по координатам его вершин, если одна из вершин находится в начале координат.*

Пусть дан треугольник OAB, одна из вершин которого находится в начале координат $O(0, 0)$, а две других суть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (черт. 6).

Проведём через точки A и B прямые, параллельные осям координат, и вспомогательную линию OM. Из черт. 6 следует:

$$2\,\text{пл.}\,\triangle MAB=\text{пл.}\,AFBM,$$
$$2\,\text{пл.}\,\triangle MBO=\text{пл.}\,MBGH,$$
$$2\,\text{пл.}\,\triangle MOA=\text{пл.}\,MKLA.$$



Черт. 6.

Поэтому, если S есть площадь искомого треугольника OAB, то мы имеем:

$$2S=2\,\text{пл.}\,\triangle MAB+2\,\text{пл.}\,\triangle MBO+$$
$$+2\,\text{пл.}\,\triangle MOA=$$
$$=\text{пл.}\,AFBM+\text{пл}\,MBGH+\text{пл.}\,MKLA=$$
$$=\text{пл.}\,OLFG-\text{пл.}\,OKMH.$$

Так как площадь $OLFG=\overline{OL}\cdot\overline{OG}=x_1y_2$ и площадь $OKMH=\overline{OK}\cdot\overline{OH}=x_2y_1$, то

$$2S=x_1y_2-x_2y_1,$$

откуда

$$S=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1), \tag{9}$$

Выражение в скобках $x_1y_2-x_2y_1$ сокращённо принято записывать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

и называть *определителем*[1]). Для его вычисления нужно числа, стоящие в таблице между чертами, перемножить по диагоналям таблицы и второе произведение x_2y_1 вычесть из первого x_1y_2. Итак,

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{9'}$$

Замечание. Площадь S, вычисленная по этой формуле, может оказаться отрицательной, так как знак S изменится, если переставить вершины A и B. Поэтому, считая площадь положительной, нужно записать формулу (9) так:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \tag{9''}$$

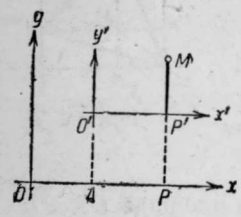
[1]) Подробнее об определителях будет изложено позднее, в главе VI.

Карело-Финская База Академии Наук СССР
БИБЛИОТЕКА
7491

беря в этой формуле знак + или —, смотря по тому, будет ли определитель положительным или отрицательным.

На чертеже можно убедиться, что определитель $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ всегда будет положительным, если обход вершин треугольника OAB, начиная от точки O и затем последовательно через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, совершается в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки.

При решении этой задачи мы ограничились частным случаем, когда одна из вершин находится в начале координат. Прежде чем рассмотреть общий случай любого положения всех вершин, мы обратимся к решению следующей задачи.



Черт. 7.

З а д а ч а IV. *Зная координаты точки относительно некоторой системы осей, найти координаты той же точки относительно новой системы, оси которой параллельны прежним осям.*

Пусть дана система осей координат xOy и пусть относительно этой системы координаты некоторой точки M суть x и y. Возьмём другую систему координат $x'O'y'$, оси которой $O'x'$ и $O'y'$ параллельны соответственно осям Ox и Oy (черт. 7). Координаты точки O' — нового начала по старой системе — пусть будут a и b. Спрашивается, как связаны между собой координаты точки M по старой и новой системам?

Обозначая через x', y' координаты точки M по новой системе, из черт. 7 находим:

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + \overline{O'P'},$$

или

$$x = a + x'. \tag{10}$$

Совершенно так же, проектируя точки O' и M на ось ординат, найдём:

$$y = b + y'. \tag{10'}$$

Эти формулы позволяют, зная x', y', найти x и y. Чтобы, обратно, зная x, y, найти новые координаты x', y', нужно разрешить уравнения (10) и (10′) относительно x', y'. Будем иметь:

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{11}$$

Итак, *новая координата равна старой минус координата нового начала по старой системе.*

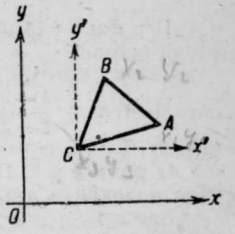
П р и м е р. Координаты точки суть (3, 2). Найти координаты той же точки относительно новой системы, оси которой параллельны старым осям, а начало находится в точке $O'(-1, 1)$.

Здесь $x = 3$, $y = 2$, $a = -1$, $b = 1$. Следовательно:

$$x' = x - a = 3 + 1 = 4, \quad y' = y - b = 2 - 1 = 1.$$

З а д а ч а V. *Определить площадь треугольника по координатам его вершин при любом положении вершин.*

Пользуясь задачей IV, можно решить задачу о площади треугольника при любом положении его вершин. Обозначим координаты вершин A, B и C треугольника соответственно через x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. Рассмотрим вспомогательную систему осей, параллельных данным осям, с началом в точке C и определим сначала координаты вершин относительно этой новой системы (черт. 8).



Черт. 8.

Вследствие формул (11) имеем следующие значения для координат точек A, B в новой системе:

$$A(x_1 - x_3,\ y_1 - y_3), \quad B(x_2 - x_3,\ y_2 - y_3).$$

Следовательно, по формуле (9″) задачи III площадь треугольника ABC будет равна:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

или

$$S = \pm \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]. \tag{12'}$$

В формуле (12) нужно взять знак + или —, смотря по тому, будет ли определитель положительным или отрицательным.

П р и м е р. Определить площадь треугольника ABC, вершины которого суть $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 5)$.

Здесь $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = -2$, $y_2 = 3$, $x_3 = 0$, $y_3 = 5$. Следовательно, по формуле (12′) площадь треугольника ABC равна:

$$S = \pm \frac{1}{2} [(1 - 0)(3 - 5) - (-2 - 0)(2 - 5)] = 4 \text{ кв. единицам.}$$

Если три точки A, B, C лежат на одной прямой, то треугольник ABC обращается в отрезок и имеет площадь, равную нулю, т. е. $S = 0$. В этом случае формула (12′) для S обратится в равенство

$$0 = \pm \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)],$$

или

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)=(x_2-x_3)(y_1-y_3),$$

что можно записать в виде пропорции:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}. \qquad (13)$$

Последнее равенство связывает координаты трёх точек A, B, C тогда и только тогда, когда эти точки лежат на одной прямой. Следовательно, написанная пропорция выражает *условие, при котором три точки лежат на одной прямой*.

Пример 1. Узнать, лежат ли точки $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(3, 4)$ на одной прямой.

Здесь $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=2$, $y_2=3$, $x_3=3$, $y_3=4$. Условие (13) обращается в $\frac{1-3}{2-3}=\frac{2-4}{3-4}$, т. е. $2=2$, и, следовательно, удовлетворяется. Таким образом, три данные точки лежат на одной прямой.

Пример 2. При каком условии точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и начало координат лежат на одной прямой?

Здесь координаты третьей точки x_3, y_3 равны нулю, и условие (13) переходит в равенство:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2},$$

т. е. две точки лежат на одной прямой с началом координат тогда, когда их координаты пропорциональны.

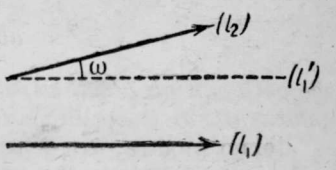
§ 6. О направленных углах. Понятие об угле между двумя направлениями аналогично понятию отрезка между двумя точками. Подобно тому как при рассмотрении отрезка мы обращаем внимание не только на его абсолютную величину, но и на его направление, характеризуемое знаком, точно так же и при операциях с углами мы будем обращать внимание на их абсолютную величину, а затем на их знак, показывающий направление отсчёта. Абсолютная величина угла измеряется либо в градусной, либо в дуговой мере. В градусной мере за единицу угла принимается центральный угол, опирающийся на одну трехсотшестидесятую часть окружности; в дуговой же мере за единицу угла принимается центральный угол; опирающийся на дугу длины, равной радиусу.

Этот угол; принимаемый за единицу, называется радианом и равен приблизительно 57°17′45″. За величину угла между двумя направлениями принимается число, показывающее, сколько раз радиан укладывается в данном угле, т. е. отношение данного угла к углу, принятому за единицу измерения. Так как из элементарной геометрии известно, что центральные

углы относятся как соответствующие им дуги, то величину угла мы получим, если длину соответствующей ему дуги окружности разделим на длину радиуса этой окружности. Таким образом, дуговая мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$, дуговая мера угла в 180° равна π, и т. д. Вообще, между градусной и дуговой мерами существует простое соотношение: если дуговая мера угла в $n°$ обозначена через x, то $x=\frac{\pi n}{180}$, откуда $n=\frac{180}{\pi}x$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, углы будут измеряться в дуговой мере.

Обратим теперь внимание на знак угла. Условимся понимать под углом (l_1, l_2) между двумя направлениями (l_1) и (l_2) на плоскости (черт. 9) тот угол, на который нужно повернуть в сторону, обратную движению часовой стрелки, направление (l_1), чтобы оно совпало с (l_2). Отсчитываемый таким образом угол будем считать положительным. Если угол отсчитывается в обратном направлении; т. е. по движению часовой стрелки, то будем его считать отрицательным.



Черт. 9.

Одному и тому же углу можно приписать бесчисленное множество значений; потому что направление (l_1) не изменится, если мы его повернём на целое число полных оборотов в ту или другую сторону. Очевидно, одно из этих значений можно всегда выбрать так; чтобы оно было неотрицательным и меньшим 2π.

Обозначив это значение через ω, будем иметь вообще

$$(l_1, l_2)=\omega+2k\pi,$$

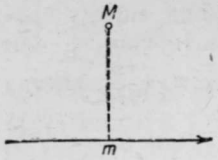
где k есть любое целое число—положительное, отрицательное или нуль.

§ 7. Основные положения теории проекций. Проекцией точки M на данную прямую (ось проекций) называется основание m перпендикуляра; опущенного из M на ось проекций (черт. 10).

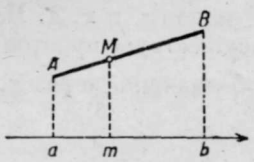
Пусть установлено положительное направление на оси проекций и на прямой, на которой расположен некоторый отрезок $\overline{AB}$. Проекцией отрезка $\overline{AB}$ на ось назовём геометрическое место проекции m точки M; описывающей данный отрезок (черт. 11).

Из этого определения следует, что *проекция отрезка* $\overline{AB}$ *на ось есть отрезок* $\overline{ab}$, *заключённый между проекциями начальной точки* A *и конечной точки* B *данного отрезка.*

Обозначим через α угол между положительными направлениями оси проекций и прямой, на которой лежит отрезок $\overline{AB}$.



Черт. 10.



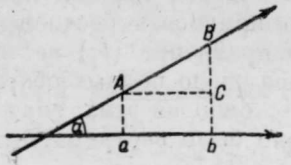
Черт. 11.

Т е о р е м а. *Проекция отрезка равна произведению проектируемого отрезка на косинус угла* α *между положительными направлениями оси проекций и прямой, на которой дан отрезок, т. е.*

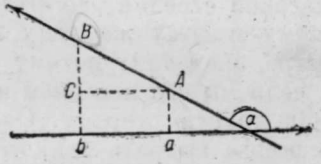
$$\overline{ab} = \overline{AB}\cos\alpha, \qquad (14)$$

где отрезки $\overline{ab}$ *и* $\overline{AB}$ *выражаются положительными или отрицательными числами, смотря по их направлению.*

Легко видеть, что если α — острый угол, то проекция и данный отрезок имеют одинаковые знаки; если же α — тупой угол, то знаки их противоположны (черт. 12, 13).



Черт. 12.



Черт. 13.

Для вывода формулы (14) проведём через точку A прямую, параллельную оси проекций; и пусть C есть точка пересечения её с прямой Bb. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол при A равен α, если α — острый угол (черт. 12), и равен $\pi - \alpha$, если α — тупой (черт. 13). Следовательно, или

$$\cos A = \cos\alpha,$$

или

$$\cos A = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$

в обоих случаях

$$\cos A = |\cos\alpha|.$$

Из прямоугольного треугольника ABC получим:

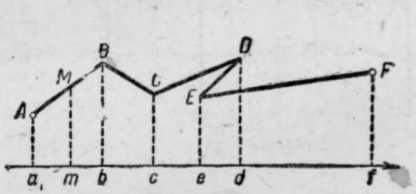
$$|\overline{ab}| = |\overline{AB}|\cos A,$$

или

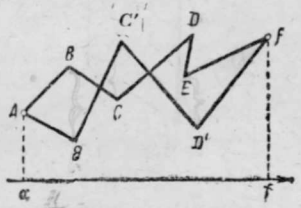
$$|\overline{ab}| = |\overline{AB}|\,|\cos\alpha| = |\overline{AB}\cos\alpha|.$$

Итак, мы доказали, что абсолютные значения $\overline{ab}$ и $\overline{AB}\cos\alpha$ совпадают; но, очевидно, эти значения совпадают и по знаку, так как если α — острый угол, то $\cos\alpha$ положителен и при этом знаки отрезка и проекции одинаковы; если же α — тупой угол, то $\cos\alpha$ отрицателен, но зато отрезок и его проекция имеют разные знаки. Отсюда вытекает справедливость формулы (14).

Возьмём теперь произвольную ломаную линию $\overline{ABCDEF}$, на которой установим положительное направление (черт. 14). Чтобы получить проекцию этой ломаной на ось, заставим точку M описать последовательно все звенья ломаной, от начальной точки A до конечной точки F. При этом проекция



Черт. 14.



Черт. 15.

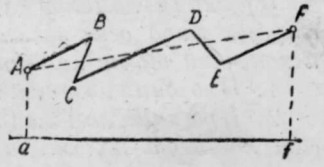
точки M — точка m — переместится на оси из точки a — проекции точки A, в точку f — проекцию точки F. Отсюда естественно понимать под проекцией ломаной линии на ось отрезок на этой оси, заключённый между точками a и f. Итак, *проекция ломаной линии на ось есть отрезок* af *этой оси, заключённый между проекциями начальной точки* A *ломаной и конечной её точки* F.

Очевидно, *проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев.* В самом деле:

$$\overline{af} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ef},$$

или

$$\text{пр.}\,\overline{(ABCDEF)} = \text{пр.}\,\overline{(AB)} + \text{пр.}\,\overline{(BC)} + \text{пр.}\,\overline{(CD)} + \text{пр.}\,\overline{(DE)} + \text{пр.}\,\overline{(EF)}. \qquad (15)$$



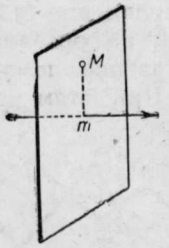
Черт. 16.

Далее ясно, что *проекции двух ломаных линий с общими концами равны между собой* (черт. 15); в частности, *проекция ломаной линии равна проекции замыкающей прямой* (черт. 16).

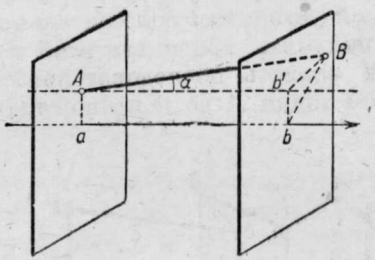
Если ломаная линия замкнутая, т. е. её начало и конец совпадают, *то её проекция равна нулю.*

Все изложенные в этом параграфе положения теории проекций на плоскости легко переносятся на пространство. В этом случае проекцией точки M пространства на ось называют точку m, получаемую в пересечении оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку M (черт. 17).

Проекция *отрезка $\overline{AB}$ на ось, по определению, есть отрезок этой оси $\overline{ab}$, заключённый между проекциями начальной точки A и конечной точки B* (черт. 18).



Черт. 17.



Черт. 18.

Теорема о проекции отрезка остаётся в силе и в этом случае, т. е.

$$\overline{ab} = \overline{AB}\cos\alpha, \qquad (14)$$

где α есть угол между положительными направлениями оси и той прямой, на которой лежит отрезок.

Доказательство этой теоремы для случая пространства сводится к теореме на плоскости, если через точку A провести вспомогательную ось параллельно данной оси и заметить, что проекция отрезка на вспомогательную ось равна его проекции $\overline{ab}$ на данную ось.

Проекция ломаной линии на ось есть, по определению, отрезок этой оси, заключённый между проекциями начальной и конечной точек ломаной (черт. 19). Отсюда следует:

1. *Проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев.*
2. *Проекция ломаной линии не зависит от её формы, а зависит лишь от положения начальной и конечной точек.*
3. *Проекция ломаной линии равна проекции замыкающей.*
4. *Проекция замкнутой ломаной линии равна нулю.*

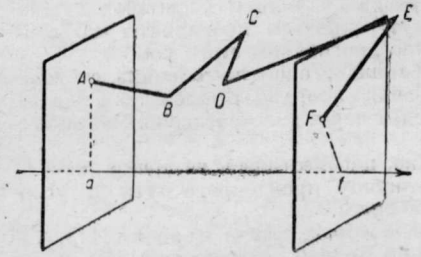
В заключение рассмотрим зависимость между проектируемой площадью и её проекцией на какую-либо плоскость. Если площадь A, расположенную в одной плоскости, спроектировать

на другую плоскость, то проекция B выразится формулой

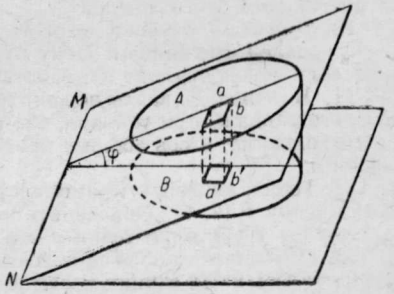
$$B = A\cos\varphi,$$

где φ есть угол между обеими плоскостями.

Чтобы это доказать, разделим площадь A на прямоугольники двумя системами прямых, соответственно параллельных линии MN пересечения плоскостей и перпендикулярных к ней (черт. 20). Пусть a и b — стороны одного из этих прямоугольников, причём сторона b параллельна линии MN. Этот прямоугольник в проекции даст прямоугольник со сторонами



Черт. 19.



Черт. 20.

$b' = b$, $a' = a\cos\varphi$ и площадью $a'b' = ab\cos\varphi$. Рассмотрим сумму площадей проекций всех прямоугольников:

$$\sum a'b' = \sum ab\cos\varphi = \cos\varphi \sum ab.$$

Уменьшая стороны этих прямоугольников и переходя к пределу в предположении, что стороны стремятся к нулю, получим $B = A\cos\varphi$, что и нужно.

Упражнения [1])

1. Построить точки, определяемые в данном масштабе координатами:

$x=2,\ y=5;\quad x=-3,\ y=0;\quad x=3,\ y=-4;$

$x=0,\ y=4;\quad x=3,\ y=-3;\quad x=\sqrt{2},\ y=1.$

2. Дана точка, определяемая координатами $x=5$, $y=-2$. Найти координаты точки, симметричной с данной относительно оси абсцисс.

3. Найти точку B, симметричную точке $A\,(2, -4)$ относительно биссектрисы координатного угла.

4. Если координаты точки A_1 суть $x=a$, $y=b$, то каковы координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно оси абсцисс?

[1]) Ответы к упражнениям помещены в конце книги; к упражнениям, номера которых помечены звёздочкой, даны решения.

5. Если координаты точки A_1 суть $x=a$, $y=b$, то каковы координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно оси ординат?

6. Если координаты точки A_1 суть $x=a$, $y=b$, то каковы координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно начала координат?

7. Показать, что если координаты точки A_1 суть $x=a$, $y=b$, то координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно биссектрисы координатного угла, суть $x=b$, $y=a$.

8. Дан квадрат со стороной, равной 2 единицам масштаба. Чему будут равняться координаты вершин этого квадрата, если оси координат направить по каким-нибудь двум из его непараллельных сторон?

9. Дан квадрат, сторона которого равна 2 единицам масштаба. Чему будут равняться координаты его вершин, если оси координат направить по диагоналям этого квадрата?

10. Дан ромб, сторона которого равна 5 единицам масштаба, а одна из диагоналей 6 единицам. Чему будут равняться координаты его вершин, если оси координат направить по диагоналям этого ромба?

11. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна a, при условии, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две противоположные его вершины.

12. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из точки $A(-3, -2)$ в точку $B(4, 5)$. Определить величину пройдённого пути и угол наклона (φ) траектории точки к оси абсцисс.

13. Определить положение точки, которая, выйдя из точки $A(3, 2)$, переместилась на 12 единиц масштаба по прямой, образующей угол в 60° с осью абсцисс.

14. Доказать, что треугольник, вершинами которого служат точки $A(3, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 10)$, — прямоугольный.

15. Найти периметр треугольника с вершинами $A(2, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(0, -1)$.

16. Найти длины медиан треугольника с вершинами $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(0, 3)$.

17. Провести отрезок от точки $(1, -1)$ до точки $(-4, 5)$. До какой точки нужно продолжить его в том же направлении, чтобы его длина утроилась?

18. Найти на оси абсцисс точку, которая отстоит на одинаковом расстоянии от начала координат и от точки $(-5, 3)$.

19. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от осей координат и от точки $(3, 6)$.

20. Найти точку, находящуюся на расстоянии 10 единиц масштаба от оси абсцисс и от точки $(-5, 2)$.

21*. Найти точку B, симметричную точке $A(4, 2\sqrt{3})$ относительно прямой, проведённой из начала координат под углом в 60° к оси Ox.

22. Расстояние между точками $(x, 5)$ и $(-2, y)$ делится в точке $(1, 1)$ пополам. Найти эти точки.

23. Разделить отрезок между точками $(0, 2)$ и $(8, 0)$ в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

24. Две вершины треугольника даны координатами $x=3$, $y=7$ и $x=-2$, $y=5$. Найти третью вершину при условии, чтобы середины проходящих через неё сторон лежали на осях координат.

25. Основание треугольника равно a, высота равна h и одна из двух других сторон равна b. Принимая основание и высоту за оси координат, найти координаты середины третьей стороны.

26*. Определить точку пересечения медиан треугольника, вершины которого суть $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$.

27. Вершины треугольника суть $(5, 0)$, $(3, -8)$, $(1, -4)$. Найти точки, в которых медианы его делятся на три равные части.

28. Определить координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.

29. Показать, что если система состоит из n материальных точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, m_3, ..., m_n, то координаты центра тяжести этой системы определятся формулами

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

30. Координаты точки суть $(1, 2)$. Найти координаты этой точки относительно новой системы координат, оси которой параллельны прежним осям и начало которой имеет координаты $(0, 3)$ относительно старой системы.

31. Координаты точки относительно некоторой системы координат суть $x=-1$, $y=1$. Чему будут равняться координаты той же точки, если система координат будет перемещена так, что направления осей останутся прежними, а начало координат совпадёт с одной из точек $(3, 4)$, $(3, -4)$, $(-3, 4)$, $(-3, -4)$?

32. Относительно двух систем координат, имеющих одни и те же направления осей, координаты некоторой точки суть $(9, -5)$ и $(0, 12)$. Чему равняются координаты начала каждой из этих систем относительно другой?

33. Как изменятся координаты какой-нибудь точки, если ось абсцисс примем за ось ординат, а ось ординат — за ось абсцисс?

34. Как изменятся координаты какой-нибудь точки, если направление одной или обеих осей координат изменится на противоположное?

35. Две системы координат имеют одинаковые направления осей, но разные начала. Зная, что одна и та же точка определяется относительно этих систем координатами $(8, -3)$, $(-2, -7)$, найти относительно каждой системы координаты середины расстояния между началами.

36. Определить площадь треугольника с вершинами в точках $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, $C(-1, -1)$.

37*. Вывести формулу (12) (стр. 19) площади треугольника по координатам его вершин, не прибегая к переносу начала координат в одну из вершин треугольника.

38. Узнать, лежат ли точки $(2, 3)$, $(5, 7)$, $(11, 15)$ на одной прямой.

39. Определить величину и направление силы P, зная, что её составляющие по осям координат соответственно равны $P_x=5$, $P_y=12$.

40. Даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Найти величины проекций отрезка AB на оси координат.

41*. К одной и той же точке приложены силы P, Q, S, причём составляющие по обеим осям координат суть $P_x=3$, $P_y=8$; $Q_x=4$, $Q_y=6$; $S_x=5$, $S_y=-5$. Найти величину равнодействующей этих сил.

42*. При каком условии точка $M(x, y)$ находится на окружности радиуса r с центром в начале координат?

43. При каком условии точка лежит: a) на биссектрисе угла между осями, b) на биссектрисе угла, смежного с ним?

44*. При каком условии точка $M(x, y)$ находится на окружности радиуса 3 с центром в точке $(-1, 2)$?

45. Каково геометрическое место точек (x, y), координаты которых удовлетворяют условию $x^2+y^2=4$?

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

ГЛАВА II

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Нормальное уравнение прямой линии. Положение прямой линии на плоскости будет вполне определено, если будут заданы её расстояние от начала координат p, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и угол α между положительным направлением оси Ox и направлением этого перпендикуляра (черт. 21).

Когда точка M с координатами x и y движется по прямой, то её координаты, изменяясь, остаются всё время связанными между собой некоторым условием. Посмотрим, каково это условие. Построим на чертеже координаты произвольной точки M прямой линии: $\overline{OR}=x$, $\overline{RM}=y$. Рассмотрим ломаную линию $ORMP$. Возьмём её проекцию на направление OP. Заметив, что проекция ломаной на какую-либо ось равна проекции её замыкающей (гл. I, § 7), будем иметь:

$$\text{пр.}(ORMP)=\text{пр.}(\overline{OP}). \qquad (1)$$

С другой стороны, известно, что проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 7), следовательно, равенство (1) перепишется так:

$$\text{пр.}(\overline{OR})+\text{пр.}(\overline{RM})+\text{пр.}(\overline{MP})=\text{пр.}(\overline{OP}). \qquad (1')$$

Так как проекция отрезка равна самому отрезку, умноженному на косинус угла между положительными направлениями оси проекций и той прямой, на которой лежит отрезок (гл. I, § 7), то

$$\text{пр.}(\overline{OR})=x\cos\alpha, \quad \text{пр.}(\overline{RM})=y\cos(90^\circ-\alpha)=y\sin\alpha,$$

$$\text{пр.}(\overline{MP})=0, \quad \text{пр.}(\overline{OP})=p.$$

Подставляя эти значения в равенство (1′), получим:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,$$

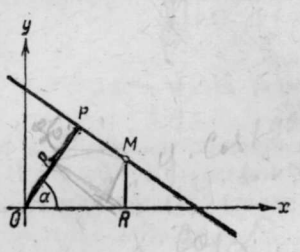
или

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (2)$$

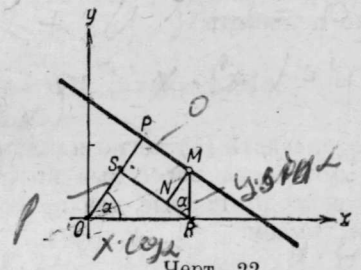
Уравнение (2) выражает собою условие, при котором точка $M(x, y)$ лежит на данной прямой: это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Координаты x и y произвольной точки M прямой называются *текущими координатами прямой*.

Полученное уравнение (2) — первой степени относительно x, y, т. е. *всякая прямая изображается уравнением первой степени относительно её текущих координат*.

Замечание. Зависимость между текущими координатами x, y и постоянными α, p, выражаемая нормальным уравнением (2), может быть геометрически истолкована непосредственно на черт. 22. В самом деле,



Черт. 21.



Черт. 22.

$$\overline{OS}+\overline{SP}=\overline{OP}.$$

Из прямоугольного треугольника OSR имеем:

$$\overline{OS}=\overline{OR}\cos\alpha=x\cos\alpha.$$

С другой стороны, $\overline{SP}=\overline{NM}$ определяем из прямоугольного треугольника MNR:

$$\overline{SP}=\overline{NM}=\overline{RM}\sin\alpha=y\sin\alpha.$$

Внося значения $\overline{OS}$ и $\overline{SP}$ в первое равенство, перепишем его так:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=\overline{OP}, \text{ или } x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

§ 2. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду. Возьмём уравнение первой степени общего вида:

$$Ax+By+C=0 \qquad (3)$$

и спросим себя, каково геометрическое место тех точек плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют нашему уравнению? Мы покажем, что искомым геометрическим местом точек

будет прямая линия. С этой целью помножим наше уравнение на постоянный множитель M, подобрав его так, чтобы получилось нормальное уравнение, т. е. уравнение вида (2). Уравнение (3) преобразуется к виду

$$MAx \pm MBy \pm MC = 0. \qquad (3')$$

Чтобы уравнение (3′) было вида, одинакового с уравнением (2), нужно положить

$$MA = \cos\alpha,\ MB = \sin\alpha,\ MC = -p. \qquad (4)$$

Из равенств (4) легко найдём неизвестные M, α и p выраженными через известные коэффициенты A, B, C. В самом деле, возводя первые два из равенств (4) в квадрат и складывая, имеем:

$$M^2A^2 + M^2B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

или

$$M^2(A^2 + B^2) = 1,$$

откуда

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (5)$$

В формуле (5) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена C, как это видно из последнего равенства (4).

Подставляя найденное значение M в равенства (4), получим формулы для $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \\ p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Итак, уравнение (3) приводится к нормальному виду путём умножения его на множитель M, определяемый по формуле (5). Этот множитель M носит название *нормирующего множителя*. Так как нормальное уравнение изображает, как мы видели в предыдущем параграфе, прямую линию, то отсюда следует, что и общее уравнение (3) изображает прямую линию. Итак, *всякое уравнение первой степени между x и y изображает прямую линию* как геометрическое место точек плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют этому уравнению.

Пример. Уравнение прямой линии $3x - 4y - 5 = 0$ привести к нормальному виду.

Нормирующий множитель равен: $M = +\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$. Умножая на него данное уравнение, получим:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Для данной прямой, следовательно, имеем: $p = 1$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

§ 3. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Разрешим уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0$$

относительно y. С этой целью, оставляя член с y в левой части, перенесём два другие в правую сторону; получим:

$$By = -Ax - C.$$

Разделив полученное равенство на B, найдём:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая для сокращения письма $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим уравнение

$$y = kx + b. \qquad (6)$$

К виду (6) можно привести всякое уравнение первой степени за исключением, очевидно, случая, когда $B = 0$. В этом случае уравнение будет иметь вид:

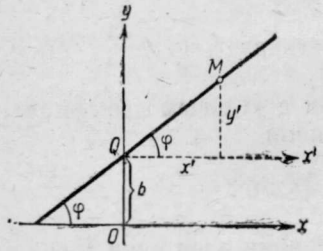
$$Ax + C = 0,$$

откуда

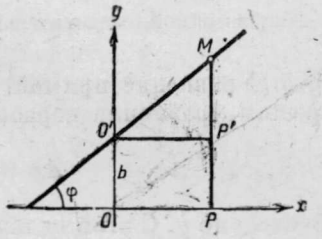
$$x = -\frac{C}{A} = a.$$

Последнее уравнение изображает, очевидно, прямую, все точки которой имеют постоянную абсциссу x, равную a, т. е. прямую, параллельную оси ординат и проходящую от неё на расстоянии, равном a. Таким образом, к виду (6) можно привести уравнение всякой прямой, за исключением случая, когда прямая параллельна оси ординат. Выясним теперь геометрический смысл постоянных k и b, входящих в уравнение прямой (6).

Легко видеть, что уравнение (6) удовлетворяется, если положить $x=0$, $y=b$, т. е. точка $Q(0, b)$ лежит на прямой. Так как абсцисса этой точки равна нулю, то она лежит одновременно



Черт. 23.



Черт. 24.

и на оси Oy, т. е. эта точка является точкой пересечения прямой с осью ординат (черт. 23). Другими словами, b *есть отрезок, отсекаемый данной прямой на оси ординат.*

Чтобы выяснить геометрический смысл постоянного k, перенесём начало координат в точку Q, сохраняя направления осей. Как мы знаем из гл. I, формулы преобразования координат в этом случае будут:

$$x=x',\ y=y'+b.$$

Поэтому данное уравнение преобразуется к виду

$$y'+b=kx'+b,\ \text{или}\ y'=kx';$$

откуда

$$k=\frac{y'}{x'}.$$

Беря произвольную точку $M(x', y')$ на прямой линии, из черт. 23 видим, что $\frac{y'}{x'}=\operatorname{tg}\varphi$, где φ есть угол между положительным направлением оси Ox и данной прямой, отсчитываемый против движения часовой стрелки. Следовательно; $k=\operatorname{tg}\varphi$,

т. е. *k равно тангенсу угла между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой, отсчитываемого от оси Ox против движения часовой стрелки.* Число k называют *угловым коэффициентом* данной прямой. Читателю рекомендуется проверить, что геометрический смысл коэффициента k будет тем же в случае тупого угла φ.

З а м е ч а н и е. Связь между текущими координатами x, y и постоянными k, b, выражаемая уравнением (6), может быть геометрически истолкована непосредственно на черт. 24. В самом деле:

$$\overline{PM}=\overline{PP'}+\overline{P'M}.$$

Но

$$\overline{PM}=y,\ \overline{PP'}=OO',$$

а $\overline{P'M}$ определяется из прямоугольного треугольника $O'P'M$:

$$\overline{P'M}=\overline{O'P'}\operatorname{tg}\varphi=x\operatorname{tg}\varphi=kx.$$

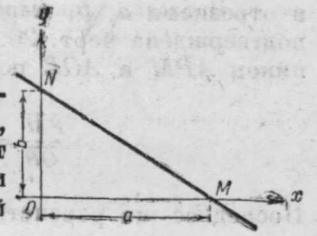
Внося эти значения в первое равенство, мы получим:

$$y=b+kx,\quad \text{или}\quad y=kx+b.$$

П р и м е р. Составить уравнение прямой линии, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 1, и наклонённой к оси абсцисс под углом в 45°.

Здесь $b=1$ и $k=\operatorname{tg}45°=1$. Следовательно, искомое уравнение

$$y=x+1.$$



Черт. 25.

§ 4. Уравнение прямой линии в отрезках. Обозначим через a и b отрезки, отсекаемые прямой на осях координат (черт. 25), предполагая, что эти отрезки отличны от нуля. Уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By+C=0. \qquad (7)$$

Так как точка $M(a, 0)$ лежит на данной прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению (7):

$$Aa+C=0,$$

или

$$A=-\frac{C}{a}. \qquad (8)$$

Аналогично и координаты точки $N(0, b)$ должны удовлетворять уравнению (7), что даёт

$$Bb + C = 0,$$

или

$$B = -\frac{C}{b}. \qquad (9)$$

Подставляя значения A и B из равенств (8) и (9) в уравнение (7) прямой, получим:

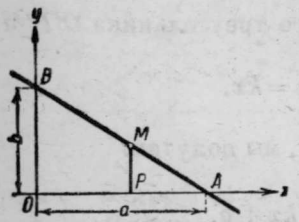
$$-C\frac{x}{a} - C\frac{y}{b} + C = 0.$$

Но $C \neq 0$, так как при $C = 0$ прямая проходила бы через начало координат; в противоречие с предположением. Сокращая на C, найдём:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1 = 0,$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (10)$$



Черт. 26.

Это и есть искомое *уравнение данной прямой в отрезках*.

Замечание. Связь между текущими координатами x, y и отрезками a, b; выражаемая уравнением (10), может быть подтверждена черт. 26. Действительно, из подобия треугольников APM и AOB получаем:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}, \text{ или } \frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}.$$

Последнее же равенство переписывается так:

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Пример. Уравнение прямой $2x - 3y + 2 = 0$ написать в отрезках.

Полагая в уравнении $2x - 3y + 2 = 0$ ординату $y = 0$, найдём абсциссу точки её пересечения с осью Ox, т. е. отрезок a: $2x + 2 = 0$, откуда $x = -1$,

Искомое расстояние d определяется формулой

$$d = P - p.$$

Так как точка $A(x', y')$ лежит на вспомогательной прямой, то её координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой:

$$x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - P = 0;$$

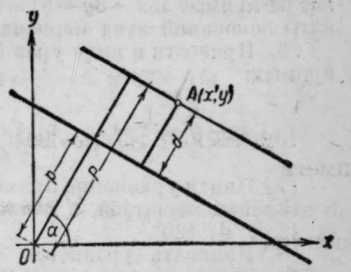
откуда

$$P = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha.$$

Подставляя это значение P в формулу для d, найдём:

$$d = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p.$$

Расстояние d, вычисленное по этой формуле, окажется положительным, если данная точка A и начало O лежат по разные стороны от данной прямой ($P > p > 0$); наоборот, оно будет отрицательным, если точка A и начало O лежат по одну сторону от данной прямой. В этом последнем случае либо направление P противоположно направлению p ($P < 0$), либо эти направления совпадают и $0 < P < p$.



Черт. 32.

Пример. Найти расстояние от точки $(-1, 1)$ до прямой $3x - 4y + 10 = 0$.

Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель $M = -\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -\frac{1}{5}$. Получим нормальное уравнение прямой:

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

Искомое расстояние равно:

$$d = -\frac{3}{5} \cdot (-1) + \frac{4}{5} \cdot 1 - 2 = \frac{7}{5} - 2 = -\frac{3}{5};$$

Отрицательный знак для d указывает на то, что данная точка лежит от прямой с той же стороны, что и начало координат.

Упражнения

1. Даны уравнения прямых: a) $4x-7y+9=0$; b) $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y-3=0$; c) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; d) $\frac{1}{3}x+y-5=0$; e) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+5=0$. Какие из этих уравнений являются уравнениями в нормальном виде?

2. Найти уравнение прямой по следующим условиям: длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, равна 7 единицам длины, и угол, образуемый этим перпендикуляром с осью Ox, равен 120°.

3. Написать уравнение прямой, если известно, что её расстояние от начала координат равно 5 и что перпендикуляр, опущенный на неё из начала координат, составляет с осью Ox угол в 60°.

4. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых:

a) $3x+4y+15=0$; b) $6x-8y-9=0$; c) $2x+2\sqrt{3}y-7=0$; d) $x+y+5=0$.

5*. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые $15x-8y-51=0$ и $4x+3y+35=0$. Найти также координаты оснований этих перпендикуляров.

6. Привести к виду уравнений с угловым коэффициентом уравнения прямых:

a) $x-y-1=0$; b) $4x-2y+3=0$; c) $3x+2y-5=0$.

7. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, равный 5 единицам масштаба, и наклонённой к оси Ox под углом: a) 45°; b) 60°; c) 135°; d) 180°.

8. Написать уравнение прямой, составляющей с осью Ox угол в 30° и отсекающей на оси Oy отрезок -3.

9. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонённой к оси Ox под углом: a) 45°; b) 135°; c) 180°.

10. Написать уравнение прямой, отрезки которой на осях соответственно равны 3, -4.

11. Привести уравнения прямых:

a) $3x+2y-6=0$; b) $y=6x-3$; c) $y=x-1$; d) $2x-3y+7=0$

к уравнениям в отрезках.

12. Найти угол, составляемый прямою $x-y-5=0$ с осью Ox.

13. Построить прямые, изображаемые уравнениями

$$3x-5y+15=0,\quad 5x+3y=0,\quad 2x+3=0,\quad 3y-7=0.$$

14. Какое расположение относительно осей координат имеют четыре прямые, выражаемые уравнениями

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1,\quad \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1,\quad -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1,\quad -\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1?$$

15. Диагонали ромба, равные 8 и 6 единицам длины, приняты за оси координат. Найти уравнения сторон этого ромба.

16. Определить площадь треугольника, заключённого между осями координат и прямою $2x+5y-20=0$.

17. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми

$$y-2=0,\quad 3x-2y+4=0,\quad x-2y-7=0.$$

18. Какая зависимость должна быть между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ была наклонена к оси Ox под углом: a) 45°; b) 60°; c) 135°?

19. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые: a) $x-2y=0$; b) $x-1=0$; c) $y+1=0$; d) $x-y=0$; e) $x+y=0$; f) $5x=0$; g) $3y=0$; h) $3x+2y-6=0$. Построить также графики этих прямых.

20. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2, 3) и составляющей с осью абсцисс угол в 45°.

21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2, —3) параллельно прямой, соединяющей точки (1, 2) и (—1, —5).

22. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1, 2) и перпендикулярной к прямой, соединяющей точки (4, 3) и (— 2, 1).

23. Даны вершины четырёхугольника $ABCD$: $A(2, 2)$, $B(5, 1)$, $C(3,6)$, $D(0,3)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

24. Вычислить угол между прямыми:

a) $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=3x-7$; b) $y=3x-4$, $y=3x+5$;

c) $y=3x-1$, $y=-\frac{1}{3}x+4$; d) $2x+3y-1=0$, $4x+6y+2=0$;

e) $\sqrt{3}x-y-1=0$, $\sqrt{3}x-3y+6=0$; f) $\frac{y}{12}-\frac{x}{3}=1$, $\frac{x}{25}-\frac{y}{15}=1$.

25. Найти угол между прямыми: $3x-2y+7=0$, $2x+3y-5=0$.

26. Провести через точку (3, 3) прямые, составляющие углы в 45° с прямой $5x-4y-1=0$.

27*. Найти углы треугольника, стороны которого выражены уравнениями

$$x-y-3=0,\quad x-3y-4=0,\quad 4x+2y+3=0.$$

28. Найти стороны и внутренние углы треугольника с вершинами $A(2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 2)$.

29. Даны две вершины треугольника $A(2, 2)$, $B(3, 0)$ и точка пересечения его медиан $D(3, 1)$. Найти третью вершину C.

30. Найти уравнение прямой, которая проходит через начало координат и a) параллельна прямой $y=2x+3$; b) перпендикулярна прямой $y=\frac{1}{3}x-1$; c) образует угол в 45° с прямой $y=3x+5$.

31. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку (—2, 3) и a) параллельна оси Ox; b) параллельна биссектрисе координатного угла; c) параллельна прямой $y=4x-7$; d) образует угол в 60° с прямой $y=2x-1$; e) перпендикулярна прямой $y=\frac{1}{2}x+8$.

32. Найти уравнения двух перпендикуляров к прямой $y=5x+1$, восставленных в точках пересечения её с осями координат.

33. Провести через точку пересечения прямых $x-y-3=0$, $2x+3y-11=0$, прямую, параллельную прямой $5x-4y-17=0$.

34. Провести через точку пересечения прямых $3x-y-3=0$, $4x+3y-4=0$ прямую, перпендикулярную к первой из них.

35. Провести прямую, соединяющую точку пересечения прямых

$$11x-17y-9=0, \quad 12x+13y-5=0$$

с началом координат.

36. Через точку пересечения прямых $x+y-6=0$, $2x-y-3=0$ провести прямую под углом в 45° к прямой $3x-5=0$.

37. Найти прямую, проходящую через точку (2, —3) и образующую с осью Ox угол, вдвое больший угла, образуемого с той же осью прямою $y=\frac{1}{2}x+3$.

38. Через точку пересечения прямых $x-2y-5=0$ и $2x-3y-8=0$ провести прямую, параллельную прямой $3x-2y+2=0$.

39. Через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $x-4y+5=0$ провести прямую под углом в 45° к прямой $2x-3=0$ (угол отсчитывается от прямой $2x-3=0$).

40. Стороны треугольника выражаются уравнениями

$$x+3y-2=0, \quad 2x+y+5=0, \quad 3x-4=0.$$

Найти уравнения высот этого треугольника.

41. Вершины треугольника суть (0, 5), (1, —2), (—6, 5). Найти уравнения перпендикуляров, восставленных в серединах его сторон, а также точку пересечения этих перпендикуляров.

42. Вершины треугольника суть (0, 1), (1, 0), (1, 1). Найти уравнения медиан.

43. Вершины треугольника суть (2, 1), (0, 7), (—4, —1). Найти уравнения медиан и точку их пересечения.

44*. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку пересечения медиан треугольника, стороны которого выражаются уравнениями $y=4x+4$, $y=-x+4$, $4y=x+1$.

45. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку пересечения медиан треугольника, стороны которого выражаются уравнениями $x-y-4=0$, $2x-11y+37=0$, $2x+7y-17=0$.

46*. На прямой $4x+3y-12=0$ найти точку, равноудалённую от точек (—1, —2) и (1, 4).

47. На прямой $3x+2y-5=0$ найти точку, равноудалённую от точек (—1, —1) и (3, 3).

48. Найти точку, равноудалённую от точек (2, 3), (4, 2), (—1, 0).

49. Даны уравнения двух сторон параллелограмма:

$$x+y-1=0, \quad 3x-y+4=0$$

и точка пересечения его диагоналей (3, 3). Найти уравнения двух других сторон.

50. Даны две вершины равностороннего треугольника ABC: A (2, 1) и B (2, 5). Найти третью вершину C.

51. Вершиной треугольника служит точка (6, —2), а основанием—отрезок, соединяющий точки (—3, 2) и (4, 3). Найти длину высоты этого треугольника.

52. Вершиной треугольника служит точка (5, —3), а основанием—отрезок, соединяющий точки (0, —1) и (3, 3). Найти длины высоты треугольника.

53*. Дана прямая $3x-4y-10=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии 3 единиц масштаба.

54. Дана прямая $3x-4y-7=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии 8 единиц масштаба.

55*. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$3x+4y-15=0 \quad \text{и} \quad 3x+4y+20=0.$$

56. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$5x+12y-24=0 \quad \text{и} \quad 5x+12y+15=0.$$

57. Даны уравнения оснований трапеции: $2x+y-5=0$, $4x+2y-7=0$. Найти её высоту.

58*. Из точки A (5, 2) провести касательную к окружности радиуса 4, центр которой лежит в точке (—3, 1).

59. Из точки (1, —2) провести касательные к окружности радиуса $\frac{2}{5}\sqrt{85}$, центр которой лежит в точке (3, 6).

60*. Найти биссектрисы углов, образуемых прямыми $3x+4y-9=0$ и $12x+9y-8=0$. Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны друг другу.

61. Найти биссектрисы углов, образуемых прямыми

$$x+8y-26=0 \quad \text{и} \quad 4x+7y-29=0.$$

62. Найти уравнение биссектрисы внешнего угла A треугольника с вершинами A (0, 0), B (3, 0), C (0, 7).

ГЛАВА III

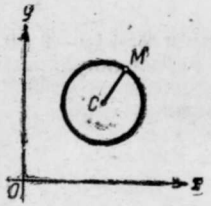
ЛИНИИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Изображение линий посредством уравнений. В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек. В определении линии как геометрического места точек содержится свойство, общее всем её точкам. Обозначая через x и y координаты произвольной точки данной линии относительно некоторой декартовой системы координат, мы затем выражаем посредством уравнения между x и y свойство, общее всем точкам линии. Таким образом составляется уравнение между переменными координатами x и y, которому удовле-

творяют координаты произвольной точки данной линии. Это уравнение называют *уравнением линии*, а входящие в него координаты x и y—*текущими координатами*. Так, например, в предыдущей главе мы видели, что прямая линия изображается уравнением первой степени относительно текущих координат. В качестве другого примера возьмём *окружность* и составим её уравнение. Положение окружности относительно некоторой декартовой системы координат будет определено, если даны координаты её центра C. Обозначим их через a и b. Размер окружности определяется радиусом R. Обозначая через x и y координаты произвольной точки M окружности, выразим аналитически свойство, общее всем точкам M. Из определения окружности следует, что расстояние точки M до центра C окружности (черт. 33) есть величина постоянная, равная радиусу R, т. е.

$$CM = R. \qquad (1)$$

Определяя CM как расстояние между двумя точками C и M (гл. I, § 5), мы выразим равенство (1) с помощью текущих координат точки M:



Черт. 33.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R. \qquad (1')$$

Возвышая обе части последнего уравнения в квадрат, освободимся от радикала и получим уравнение окружности в окончательном виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (2)$$

В этом уравнении постоянные a, b, R суть соответственно координаты центра и радиус окружности; переменные x и y являются координатами произвольной точки окружности. В частности, если центр окружности находится в начале координат, то $a=b=0$, и уравнение (2) принимает более простой вид:

$$x^2+y^2 = R^2. \qquad (2')$$

§ 2. Геометрический смысл уравнений. Мы видели, что всякая линия, рассматриваемая как геометрическое место точек, изображается уравнением между координатами её точек. Обратно, всякое уравнение между двумя переменными x и y, вообще говоря, изображает линию как геометрическое место точек, координаты которых x и y ему удовлетворяют.

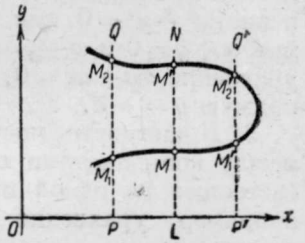
В самом деле, рассмотрим какое-нибудь уравнение между переменными x и y. Перенося все его члены в левую часть, придадим уравнению вид:

$$F(x, y) = 0, \qquad (3)$$

где F означает символ функции двух переменных. Пусть при любом фиксированном числовом значении x уравнение (3), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестной y, имеет, например, два корня.

Дадим переменному x произвольное числовое значение $x=a$ и найдём из уравнения (3) соответствующие значения y. Для определения y получаем уравнение с одним неизвестным:

$$F(a, y) = 0. \qquad (4)$$



Черт. 34.

Пусть это уравнение имеет корни, например, $y=b_1$, $y=b_2$. Отметим на черт. 34 две точки M_1 и M_2, координаты которых (a, b_1) и (a, b_2) удовлетворяют данному уравнению (3).

Дадим теперь переменному x другое числовое значение, $x=a'$ и определим соответствующие значения y из уравнения

$$F(a', y) = 0. \qquad (4')$$

Пусть корни этого уравнения будут $y=b_1'$, $y=b_2'$. Отметим на черт. 34 две точки M_1' и M_2', координаты которых (a', b_1') и (a', b_2') удовлетворяют данному уравнению. Если переменное x мы будем непрерывно изменять от значения a до значения a', то прямая LN будет перемещаться параллельно самой себе, отправляясь от положения PQ и приходя в положение $P'Q'$, причём в любом её положении на ней будут две точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (3). Таким образом, точки M и M' описывают линию. Эта линия получается в результате двух движений: с одной стороны, движения прямой LN параллельно самой себе (изменение x), а с другой—движения точек M и M' по этой прямой (изменение y).

Итак, *уравнение (3) между координатами x и y изображает линию как геометрическое место тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.*

Замечание. Рассмотрим ещё некоторые особые виды уравнений.

1) Уравнение может содержать только одну из текущих координат и тем не менее определять некоторое геометрическое место точек или линию. Так, мы уже знаем, что уравнение $y-2=0$ определяет прямую $y=2$, параллельную оси Ox, а уравнение $x+1=0$ определяет прямую $x=-1$, параллельную оси Oy.

2) Если левая часть уравнения $F(x, y)=0$ разлагается на множители, то, приравнивая нулю каждый множитель в отдельности, мы получим несколько новых уравнений, каждое из которых может определять некоторую линию. Например, уравнение $x^2-y^2=0$ или $(x+y)(x-y)=0$ определяет пару прямых $x+y=0$ и $x-y=0$ — биссектрис координатных углов, а уравнение $xy+ax=0$, или $x(y+a)=0$, определяет ось Oy и прямую $y=-a$.

3) В частности, может случиться, что уравнение $F(x, y)=0$ между координатами x и y изображает геометрическое место, состоящее из одной или нескольких отдельных точек. Так, например, уравнение $x^2+y^2=0$ определяет точку $O(0, 0)$; уравнению

$$(x^2-1)^2+(y^2-4)^2=0$$

соответствует геометрическое место, состоящее из четырёх точек:

$$(1, 2);\ (1, -2);\ (-1, 2);\ (-1, -2).$$

4) Может, наконец, случиться, что уравнение $F(x, y)=0$ не определяет никакого геометрического места точек. Так, например, уравнение

$$x^2+y^2+1=0$$

не удовлетворяется ни при каких действительных значениях координат x и y. Если уравнение удовлетворяется, как в только что приведённом примере, лишь для мнимых значений координат, то говорят, что уравнению соответствует *мнимое место точек*.

§ 3. Две основные задачи. Из изложенного в §§ 1 и 2 вытекает постановка двух основных задач.

I. *Дана линия как геометрическое место точек. Составить уравнение этой линии.*

II. *Дано уравнение между координатами x и y. Построить линию, изображаемую этим уравнением.*

Мы рассмотрим в следующих параграфах примеры на обе задачи.

FMF', описать точкой M эллипс (в точке M поместить остриё карандаша).

Если $a=b$, эллипс обращается в окружность радиуса a.

§ 6. Гипербола и её асимптоты. *Гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная, равная $2a$.*

Чтобы составить уравнение гиперболы, выберем оси координат так же, как в § 5; будем иметь:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

где $2c$ есть расстояние FF' между данными точками, называемыми *фокусами* гиперболы. Освобождаясь от радикалов, получим, как и в § 5, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (6')$$

В самом деле, перенося первый радикал направо, получим:

$$-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения эллипса лишь знаком в левой части; следовательно, различие совершенно исчезает при возведении обеих частей уравнения в квадрат.

В данном случае $c>a$, а потому количество c^2-a^2 положительно. Обозначая его через b^2, т. е. полагая

$$b^2=c^2-a^2, \qquad (8')$$

найдём уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7')$$

Замечание. Для полноты вывода следовало бы также рассмотреть соотношение

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-2a.$$

Очевидно, в результате преобразований мы придём к тому же уравнению (6′), потому что последнее содержит букву a в квадрате, а наше соотношение отличается от исследованного лишь знаком при a.

Исследуем форму гиперболы.

1) Симметрия гиперболы. Так как уравнение (7′) содержит только квадраты текущих координат, то оно не изменится, если изменить знак любой координаты; следовательно, гипербола симметрично расположена относительно осей Ox и Oy.

2) Точки пересечения с осями координат. Определим точки пересечения гиперболы с осями координат. Полагая в уравнении (7′) $y=0$, найдём абсциссы точек пересечения гиперболы с осью Ox:

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \text{ откуда } x^2=a^2 \text{ и } x=\pm a.$$

Эти две точки пересечения гиперболы с осью симметрии Ox называются её *вершинами*; расстояние между ними равно $2a$. Чтобы найти точки пересечения с осью Oy, положим в уравнении (7′) $x=0$. Получим для определения ординат этих точек уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ или } y^2=-b^2,$$

откуда

$$y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm b\sqrt{-1},$$

т. е. ординаты точек пересечения гиперболы с осью Oy будут мнимые числа: это означает, что ось Oy не пересекает гиперболу. В соответствии с полученными результатами, ось Ox называется *действительной* (или *фокальной*) *осью* гиперболы, а ось Oy — её *мнимой осью*.

3) Форма гиперболы. При исследовании формы гиперболы достаточно рассматривать положительные x и y, потому что кривая симметрично расположена относительно осей координат. Так как из уравнения (7′) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$, то x может изменяться от a до $+\infty$. Когда x увеличивается от a до $+\infty$, то y тоже увеличивается от 0 до $+\infty$. Кривая имеет форму, изображённую на черт. 37.

4) Асимптоты гиперболы. Чтобы более ясно представить себе вид гиперболы, рассмотрим две прямые линии, тесно с нею связанные — так называемые *асимптоты*.

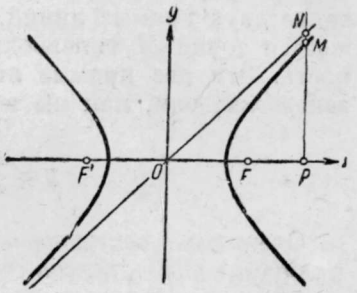
Предполагая x и y положительными, разрешим уравнение (7′) гиперболы относительно ординаты y:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,$$

откуда

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (7'')$$

Сопоставим уравнение (7″) с уравнением прямой линии $Y=\frac{b}{a}x$, называя соответствующими две точки $N(x, Y)$ и $M(x, y)$, расположенные соответственно на этой прямой и на гиперболе и имеющие одну и ту же абсциссу. Очевидно (черт. 37), $Y>y$ и разность $Y-y$ ординат соответствующих точек выражает расстояние между ними, т. е. $\overline{MN}=Y-y$.



Черт. 37.

Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние $\overline{MN}$, убывая, стремится к нулю. В самом деле,

$$\overline{MN}=Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

откуда

$$\overline{MN}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

После упрощения получим:

$$\overline{MN}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Из последней формулы мы усматриваем, что при неограниченном возрастании абсциссы x расстояние $\overline{MN}$ убывает и стремится к нулю. Это означает следующее: когда точка M, двигаясь по гиперболе в первом квадранте, удаляется в бесконечность, то её расстояние до прямой $y=\frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. Вследствие симметрии гиперболы и этой прямой относительно начала координат O, то же обстоятельство будет иметь место при движении точки M по гиперболе в третьем квадранте. Наконец, вследствие симметрии гиперболы относительно оси Oy, мы получим вторую прямую $y=-\frac{b}{a}x$, сим-

метрично расположенную с прямой $y=\frac{b}{a}x$, к которой также будет неограниченно приближаться точка M при движении по гиперболе и удалении в бесконечность (во втором и четвёртом квадрантах).

В результате нашего исследования мы установили существование двух прямых линий, к которым неограниченно приближается точка M гиперболы при своём удалении в бесконечность. Эти две прямые линии и носят название *асимптот гиперболы*; они, как мы видели, имеют уравнения

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x. \tag{9}$$

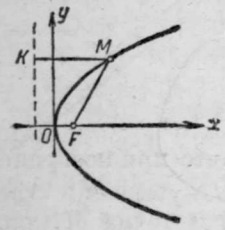
Очевидно, *асимптоты гиперболы являются диагоналями прямоугольников, первая сторона которых равна a и откладывается по оси Ox от точки O (вправо и влево), а другая равна b и откладывается по оси Oy от точки O (вверх и вниз).*

При вычерчивании гиперболы по её уравнению рекомендуется предварительно построить её асимптоты.

Равносторонняя гипербола. В случае $b=a$ гипербола называется *равносторонней*; её уравнение получается из (7′) и имеет вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Очевидно, угловые коэффициенты асимптот $\left(k=\pm\frac{b}{a}\right)$ для равносторонней гиперболы будут ± 1. Следовательно, асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны между собою и делят пополам углы между её осями симметрии.



Черт. 38.

§ 7. Парабола. *Парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки и данной прямой.*

Чтобы составить уравнение параболы, примем за ось Ox прямую, проходящую через данную точку F перпендикулярно к данной прямой; за начало координат возьмём середину O отрезка от точки F до данной прямой, равного p (черт. 38). Координаты точки F будут $\left(\frac{p}{2},0\right)$. Обозначим через x и y координаты произвольной точки M параболы. Тогда координаты точки K — основания перпендикуляра, опущенного из M на данную прямую, — будут $\left(-\frac{p}{2},y\right)$. Так как по определению $FM=MK$,

то, применяя формулу расстояния между двумя точками (гл. I, § 5), получим:

$$\sqrt{\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2}.$$

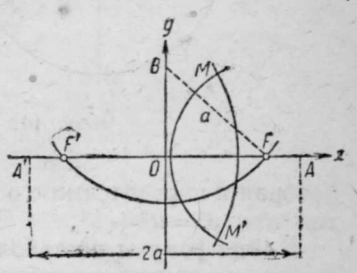
Возводя обе части в квадрат, найдём:

$$\left(x-\tfrac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2, \text{ или } x^2-px+\tfrac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\tfrac{p^2}{4},$$

откуда

$$y^2=2px. \tag{10}$$

Чтобы исследовать форму параболы по её уравнению (10), заметим, что x может получать лишь положительные значения, т. е. все точки параболы лежат справа от оси Oy. Каждому значению x соответствуют два значения y, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, т. е. кривая симметрично расположена относительно оси Ox. С увеличением x ордината y увеличивается, причём, когда x неограниченно растёт, то y тоже неограниченно растёт; кривая имеет вид, данный на черт. 38.



Черт. 39.

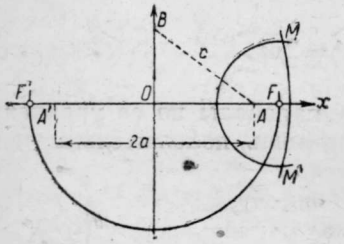
Парабола имеет одну ось симметрии, один *фокус* F, одну *вершину* в точке O. Данная прямая называется её *директрисой*.

Все три рассмотренных типа линий (эллипс, гипербола, парабола) могут быть получены путём пересечения круглого конуса плоскостью, а потому они называются *коническими сечениями*.

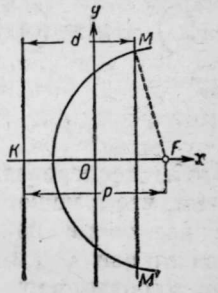
§ 8. Построение точек эллипса, гиперболы и параболы посредством циркуля и линейки. Из уравнения эллипса (§ 5) определяем a и b, изображая их отрезками OA и OB на осях координат (черт. 39). Из точки B, как из центра, радиусом, равным a, описываем окружность, которая в пересечении с осью Ox даст фокусы эллипса F и F', так как при таком построении соблюдается зависимость $c^2=a^2-b^2$. Найдя фокусы эллипса, делим отрезок $2a$ произвольно на две части: r и $r'=2a-r$, и радиусами, равными r и r', описываем две окружности, принимая за их центры соответственно фокусы

F и F'. Эти окружности пересекутся в двух точках M и M', лежащих на эллипсе, так как сумма расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна $2a$. Меняя r, будем получать новые точки эллипса.

Аналогично проводится построение точек гиперболы. Определяя из уравнения гиперболы (§ 6) a и b, изображаем их отрезками OA и OB на осях координат (черт. 40). Из точки O, как из центра, радиусом, равным $c = AB$, описываем окружность,



Черт. 40.



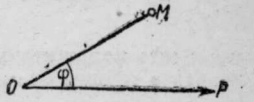
Черт. 41.

которая в пересечении с осью Ox даст фокусы гиперболы F и F'; так как $c^2 = a^2 + b^2$.

Найдя фокусы гиперболы, описываем из них, как из центров, две окружности радиусов r и $r' = 2a + r$, где r произвольно. Эти окружности в пересечении дадут точки M и M' правой ветви гиперболы, так как разность расстояний каждой из этих точек до фокусов будет равна $r' - r = 2a$. Меняя r, будем получать новые точки правой ветви гиперболы. Изменяя роль фокусов, получим точки левой ветви гиперболы.

Перейдём, наконец, к построению точек параболы. Прежде всего строим фокус и директрису параболы, откладывая по оси Ox вправо от O отрезок OF, равный $\frac{p}{2}$, такой же отрезок OK — влево от O и проводя через точку K прямую, перпендикулярную к фокальной оси (черт. 41). Параметр p определяется из уравнения параболы. Проводим прямую линию, перпендикулярную к фокальной оси, на произвольном расстоянии d $\left(d > \frac{p}{2}\right)$ от директрисы и из фокуса F, как из центра, описываем окружность радиуса d. Точки пересечения M и M' проведённой прямой линии с окружностью принадлежат параболе, так как для каждой из этих точек расстояния до фокуса и директрисы равны между собой.

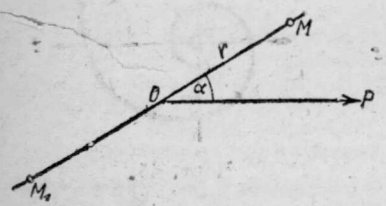
§ 9. Полярные координаты. Примеры построения кривых, уравнения которых даны в полярных координатах. Пусть на плоскости дана точка O, — будем называть её *полюсом*, и полупрямая OP, — будем называть её *полярной осью* (черт. 42). Положение любой точки M на плоскости можно определить двумя числами, а именно: числом r, выражающим (в данном масштабе) длину отрезка $\overline{OM}$, называемого *радиусом-вектором* точки M, и числом φ — *полярным углом* между направлениями полярной оси OP и радиуса-вектора $\overline{OM}$. Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M.



Черт. 42.

Если мы условимся длину радиуса-вектора считать всегда положительной и полярный угол брать в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то каждой точке будет соответствовать одна пара чисел r, φ, и обратно. Исключение представляет полюс, для которого $r = 0$, а φ — произвольно.

При изучении уравнений, связывающих r и φ, удобнее, однако, не назначать пределов для изменения r и φ. В этих целях можно ввести следующее обобщение понятия о полярных координатах:



Черт. 43.

1) Пусть луч OM (черт. 43) получается вращением полярной оси OP на наименьший положительный угол α. Тогда тот же луч может быть получен и вращением OP на угол $\varphi = \alpha + 2\pi k$, где k — любое целое положительное или отрицательное число. Угол $\varphi = \alpha + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) назовём *обобщённым полярным углом* всех точек на луче OM, а также на его продолжении за полюс в противоположном лучу направлении.

2) Чтобы отличить далее точки M и M_1, лежащие на луче OM и его продолжении и отстоящие от полюса на одинаковом расстоянии ρ, будем считать длину r радиуса-вектора положительной в точке M ($r = +\rho$) и отрицательной в точке M_1 ($r = -\rho$)[1]. При этих условиях, полярные координаты φ и r принимают какие угодно значения от $-\infty$ до $+\infty$.

При этом каждая пара значений (φ, r) определяет единственную точку плоскости, но одной и той же точке уже соответствует бесчисленное множество пар координат. В самом деле,

[1]) Построение отрицательного $r = -\rho$ аналогично построению линии секанса при отрицательном значении $\sec\alpha$.

если координаты точки M суть: $\varphi=\alpha$, $r=\rho$, то той же точке M соответствуют координаты $\varphi=\alpha+2\pi k$, $r=\rho$, а также $\varphi=\alpha+\pi+2\pi k$, $r=-\rho$, где k есть любое целое число.

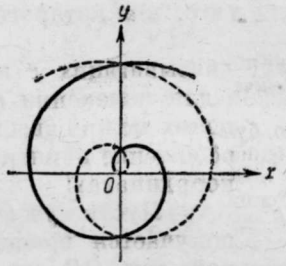
При исследовании формы линии на основании её уравнения приходится часто пользоваться полярными координатами. Это удобно делать всякий раз, когда уравнение линии в полярных координатах проще, нежели в декартовых. В качестве примеров мы рассмотрим три линии, встречающиеся часто в приложениях.

Пример 1. Линия, называемая *спиралью Архимеда*, изображается в полярных координатах уравнением

$$r=a\varphi,$$

где a есть положительное постоянное. Чтобы начертить эту линию, будем давать φ произвольные значения и определять соответствующие значения r. Приводимая таблица значений (φ, r), удовлетворяющих данному уравнению, показывает, что при возрастании угла φ в арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{2}$ радиус-вектор r возрастает тоже в арифметической прогрессии с разностью $a\frac{\pi}{2}$. Кроме того, заметим, что всякой точке этой линии с положительными координатами (φ, r) соответствует на этой же линии точка $(-\varphi, -r)$, т. е. спираль Архимеда симметрично расположена относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси. На черт. 44 сплошной линией изображена ветвь, соответствующая отрицательным значениям φ, а пунктирной — положительным.

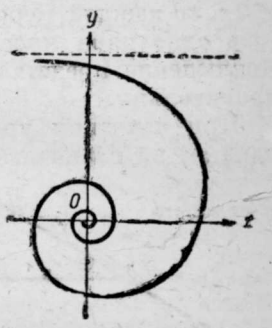
φ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
π	πa
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}a$
2π	$2\pi a$



Черт. 44.

Пример 2. Линия, называемая *гиперболической спиралью*, изображается в полярных координатах уравнением $r\varphi=a$, где a есть некоторое постоянное.

Прежде всего заметим, что уравнение $r\varphi=a$ не изменится, если заменим r и φ соответственно через $-r$ и $-\varphi$. Это значит, что всякой точке линии с полярными координатами (r, φ) соответствует точка той же линии с координатами $(-r, -\varphi)$, т. е. гиперболическая спираль расположена симметрично относительно прямой линии, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси.



Черт. 45.

Чтобы начертить эту линию, будем давать φ произвольные положительные значения и определять соответствующие значения r. С возрастанием полярного угла φ радиус-вектор r уменьшается и стремится к нулю при неограниченном увеличении φ. С уменьшением φ радиус-вектор r увеличивается и стремится к бесконечности при стремлении φ к нулю.

На черт. 45 изображена та часть гиперболической спирали, которая соответствует отрицательным значениям угла φ. К полюсу O кривая неограниченно приближается. Такая точка O называется асимптотической точкой спирали. Вторая часть кривой, соответствующая положительным значениям угла φ, как сказано выше, будет симметричным отображением около оси Oy начерченной половины гиперболической спирали.

Легко видеть, что точка гиперболической спирали при стремлении полярного угла φ к значению 0 неограниченно приближается к прямой $y=a$. В самом деле, ордината $y=r\sin\varphi=a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, возрастая, приближается к значению a, когда φ стремится к нулю. Таким образом, прямая $y=a$ есть асимптота гиперболической спирали.

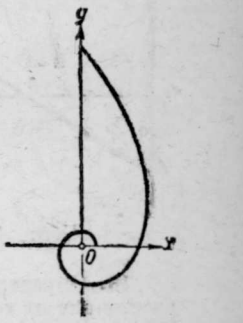
Пример 3. Линия, изображаемая в полярных координатах уравнением

$$r=ae^{k\varphi},$$

где a и k суть положительные постоянные, называется *логарифмической спиралью*.

Чтобы начертить эту линию, будем давать φ произвольные значения и определять соответствующие значения r. Приводимая здесь таблица значений (φ, r), удовлетворяющих данному уравнению, показывает, что при возрастании угла φ в арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{2}$ радиус-вектор r возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем $e^{k\pi/2}$. Когда угол φ неограниченно возрастает, то r тоже неограниченно растёт; когда угол φ стремится к отрицательной бесконечности, то радиус-вектор r стремится к нулю. Точка O является асимптотической точкой логарифмической спирали (черт. 46).

φ	r
$-\pi$	$ae^{-k\pi}$
$-\frac{\pi}{2}$	$ae^{-k\pi/2}$
0	a
$\frac{\pi}{2}$	$ae^{k\pi/2}$
π	$ae^{k\pi}$



Черт. 46.

Упражнения

1*. Построить кривую, данную уравнением $x^2y=4a^2(2a-y)$. (Эта кривая носит название *локона Аньези*.)

2*. Построить кривую, данную уравнением $r=10\sin 2\varphi$. (Эта кривая называется *четырёхлепестной розой*.)

3. Построить кривые, данные уравнениями:

a) $y=x^3$; b) $y=x^5$; c) $y=x^4$; d) $y=x^3+2$; e) $y=\frac{1}{2}x^4-5$; f) $y^2=x^3$.

4. Построить окружность по уравнениям: a) $x^2+y^2-4x+2y=0$; b) $x^2+y^2=4x$.

5. Построить эллипс по уравнению $x^2+2y^2=4$.

6. Построить гиперболу по уравнению $x^2-2y^2=4$.

7. Построить параболу по уравнению $y^2=4x$.

8. Построить кривые, выражаемые в полярных координатах уравнениями:

a) $r = a \sin 3\varphi$; b) $r = a \cos 3\varphi$; c) $r = a \cos 2\varphi$; d) $r = a(1 - \cos\varphi)$.

9. Построить кривые, заданные в полярных координатах уравнениями:

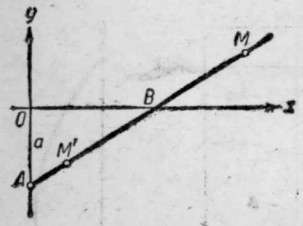
a) $r = 2 - \cos\varphi$; b) $r = 3 - 2\sin 2\varphi$; c) $r = 2 - \sin 3\varphi$.

10. Выяснить геометрический смысл уравнений в декартовых координатах:

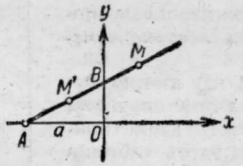
a) $x^2y - y^3 = 0$; b) $y^3 - 25 = 0$; c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 0$; d) $(x-2)^2 + 3(x+1)^2 = 0$.

11. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от начала координат и от точек $A(-5, 3)$.

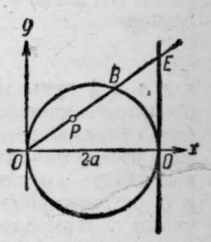
12. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от оси Ox и от точки $F(0, 4)$. Построить кривую.



Черт. 47.



Черт. 48.



Черт. 49.

13. Определить траекторию точки M, которая движется так, что её расстояние от точки $A(3, 0)$ остаётся вдвое меньше расстояния от точки $B(-6, 0)$.

14. Определить траекторию точки M, которая движется так, что её расстояние от точки $F(-1, 0)$ остаётся вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$.

15. Даны точки $A(-6, 0)$ и $B(2, 0)$. Найти геометрическое место точек, из которых отрезки OA и OB видны под равными углами.

16. Все хорды ON окружности $x^2 + y^2 = 2ax$, проведённые из начала координат, продолжены за точку N на расстояние $NM = ON$. Определить геометрическое место точек M.

17. Даны точки $A(-1, 0)$ и $B(2, 0)$. Точка M движется так, что в $\triangle AMB$ угол B остаётся вдвое больше угла A. Определить траекторию движения.

18. Вывести уравнение прямой в полярных координатах.

19*. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек P и Q есть величина постоянная, равная m^2. (Это геометрическое место точек называется *овалом Кассини.*) Построить также график этого геометрического места.

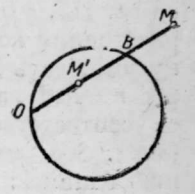
20*. Овал Кассини (см. упражнение 19) для случая, когда $m = n$, называется *лемнискатой Бернулли.* Найти уравнение лемнискаты: a) в декартовых координатах и b) в полярных координатах. Построить также график этой кривой.

21*. Даны прямая Ox и на расстоянии a от неё точка A (черт. 47). Если прямая AB будет вращаться около точки A, то точки M и M', лежащие на этой прямой и отстоящие от точки B пересечения прямой AB с основной прямой Ox на данное расстояние b, опишут некоторую линию. Она называется *конхоидой Никомеда.* Найти уравнение конхоиды и построить её график для случаев $a > b$, $a = b$ и $a < b$.

22*. Даны прямая Oy и точка A на расстоянии a от неё (черт. 48). Вокруг точки A вращается луч AB и на нём в обе стороны от точки B (точки пересечения луча с осью Oy) отложены переменные отрезки $BM = BM' = OB$. При вращении луча AB точки M и M' описывают кривую, называемую *строфоидой.* Составить уравнение этой кривой и построить её график.

23*. Даны окружность диаметра $OD = 2a$ и касательная к ней DE (черт. 49). Через точку O, диаметрально противоположную точке D, проведена прямая OE и на ней отложен отрезок OP, равный отрезку BE, заключающемуся между окружностью и касательной. Если прямая OE будет вращаться около точки O, то точка P опишет кривую, называемую *циссоидой Диокле са.* Найти уравнение этой кривой и построить её график.

24*. Даны окружность радиуса a и на ней точка O (черт. 50). Если прямая OB будет вращаться около точки O, то точки M и M', находящиеся на данной прямой и отстоящие на данном расстоянии m от точки B пересечения прямой с окружностью, опишут кривую, называемую *улиткой Паскаля*[1]). Найти уравнение этой кривой в полярных координатах и построить её график. (Графики вычертить для случаев $m > 2a$, $m = 2a$ и $m < 2a$.)



Черт. 50.

25. Составить уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух данных точек.

26. Две прямые вращаются вокруг двух неподвижных точек, оставаясь всё время перпендикулярными друг к другу. Найти геометрическое место их точки пересечения.

27. Из точки M проведены к двум окружностям радиусов R и r две равные касательные. Найти уравнение геометрического места точек M при условии, что расстояние между центрами окружностей равно $2d$.

28. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OM. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров в полярных координатах и построить график этого геометрического места.

29. Определить геометрический смысл уравнений:

a) $x^2 - y^2 = 0$; b) $xy = 0$; c) $x^2 + xy = 0$; d) $x(y - a) = 0$.

30. Дан треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию

$$\text{пл. } \triangle ACM = \text{пл. } \triangle BCM.$$

31. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек равна постоянной величине.

---

[1]) Для частного случая, когда $m = 2a$, эта линия называется *кардиоидой.*

32. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от сторон квадрата равна постоянной величине.

33. Основание треугольника неподвижно, а вершина движется по данной прямой. Найти геометрическое место центра тяжести этого треугольника.

34. Две прямые вращаются около двух неподвижных точек в противоположных направлениях и с одинаковой угловой скоростью. При начале движения одна из этих прямых совпадает с прямой, соединяющей данные точки, а другая перпендикулярна к этой прямой. Найти геометрическое место точки пересечения этих прямых.

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 1. Эксцентриситет и директрисы эллипса. Как известно из гл. III, § 5, эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых его фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Обозначая через $r=FM$ и $r'=F'M$ расстояния любой точки M эллипса соответственно до его правого и левого фокусов F и F' (черт. 36), мы имеем согласно вышеупомянутому определению эллипса:

$$r+r'=2a. \qquad (1)$$

С другой стороны, применяя формулу расстояния между двумя точками, мы получим (гл. III, § 5):

$$r'=F'M=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r=FM=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

где x, y обозначают координаты точки M эллипса, а c — половину фокусного расстояния FF'. Возводя два последние равенства в квадрат и вычитая, находим:

$$r'^2-r^2=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$r'^2-r^2=4cx. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2), считая в них искомыми величинами r и r', мы определяем эти последние. С этой целью, переписав уравнение (2) в виде

$$(r'-r)(r'+r)=4cx,$$

воспользуемся уравнением (1), что нам даст:

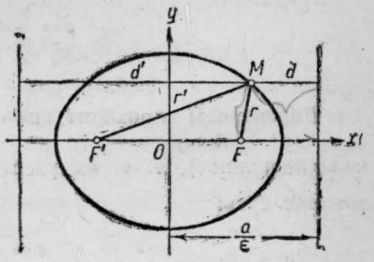
$$r'-r=2\frac{c}{a}x.$$

Решая полученное уравнение совместно с уравнением (1), найдём r и r':

$$r=a-\frac{c}{a}x,\quad r'=a+\frac{c}{a}x.$$

Величину $\frac{c}{a}$, входящую в последние формулы, мы будем называть *эксцентриситетом* эллипса и обозначать через ε. Очевидно, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине фокальной оси $2a$, причём $0\leqslant\varepsilon<1$, так как $0\leqslant c<a$. Таким образом, мы имеем следующие формулы для r и r':

$$r=a-\varepsilon x,\quad r'=a+\varepsilon x. \qquad (3)$$



Черт. 51.

Рассмотрим прямую $x=l$, параллельную оси y, и найдём, во-первых, расстояние r произвольной точки $M(x, y)$ эллипса от его правого фокуса, и во-вторых — расстояние d этой точки M от прямой $x=l$ (черт. 51). Вычислим отношение этих расстояний.

Так как $d=l-x$, то

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{l-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{l-x}.$$

Если $l=\frac{a}{\varepsilon}$, то написанное отношение $\frac{r}{d}$ будет сохранять постоянное значение, равное ε.

Таким образом, прямая $x=\frac{a}{\varepsilon}$, называемая *директрисой эллипса*, обладает следующим свойством: *отношение расстояний любой точки эллипса до правого фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная* ε.

В силу симметрии то же заключение можно сделать относительно левого фокуса F' и соответствующей ему директрисы,

уравнение которой будет:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Пример. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2 + 2y^2 = 2$. Написав уравнение эллипса в виде

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

заключаем, что $a^2 = 2$, $b^2 = 1$. Следовательно: $c^2 = a^2 - b^2 = 2 - 1 = 1$, откуда

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Директрисы проходят на расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса (начала координат), т. е. на расстоянии, равном $\frac{2}{1} = 2$. Уравнения директрис суть:

$$x = +2, \quad x = -2.$$

§ 2. Эксцентриситет и директрисы гиперболы. Сохраняя обозначения прошлого параграфа, в силу определения гиперболы (гл. III, § 6) имеем:

$$r' - r = \pm 2a, \tag{4}$$

где знак плюс относится к правой ветви гиперболы, а знак минус к левой. С другой стороны, как и в прошлом параграфе, найдём:

$$r'^2 - r^2 = 4cx. \tag{2}$$

Из уравнений (4) и (2) находим искомые величины r и r'. Для этого, переписав уравнение (2) в виде

$$(r' - r)(r' + r) = 4cx,$$

воспользуемся уравнением (4), что нам даст:

$$r' + r = \pm 2\frac{c}{a}x.$$

Наконец, решая последнее уравнение совместно с уравнением (4), получим выражения для r и r':

$$r = -a + \frac{c}{a}x; \quad r' = a + \frac{c}{a} \qquad \text{(правая ветвь)};$$

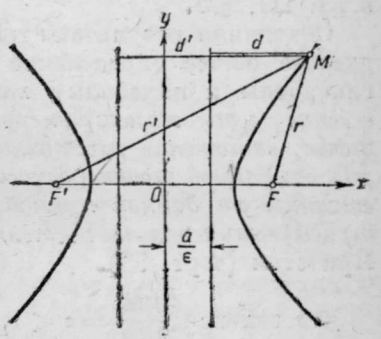
$$r = a - \frac{c}{a}x; \quad r' = -a - \frac{c}{a}x \text{ (левая ветвь)}.$$

Величину $\frac{c}{a}$; входящую в последние формулы, мы будем называть *эксцентриситетом* гиперболы и обозначать через ε. Очевидно, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ есть отношение фокусного расстояния $2c$ к длине фокальной оси $2a$, причём теперь $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. Итак, мы имеем следующие формулы для r и r':

$$\left.\begin{aligned} &r = -a + \varepsilon x; \; r' = a + \varepsilon x \quad \text{(правая ветвь)};\\ &r = a - \varepsilon x; \quad r' = -a - \varepsilon x \text{ (левая ветвь)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Назовём прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ *директрисами* гиперболы, соответствующими правому и левому фокусам.

Легко показать, *что отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная* ε. Это свойство достаточно, вследствие симметрии, обнаружить относительно правого фокуса и соответствующей ему директрисы.



Черт. 52.

Обозначая через d расстояние точки M гиперболы до правой директрисы, из черт. 52 усматриваем, что $d = x - \frac{a}{\varepsilon}$ в случае, если M находится на правой ветви гиперболы, и $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$, если M лежит на левой ветви. Составим теперь отношение

$\frac{r}{d}$, пользуясь формулами (5):

$$\frac{r}{d}=\frac{-a+\varepsilon x}{x-\frac{a}{\varepsilon}} \quad \text{(правая ветвь)};$$

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x} \quad \text{(левая ветвь)}.$$

В обоих случаях отношение $\frac{r}{d}$ будет одинаково и равно:

$$\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a-\varepsilon x}{\varepsilon}}=\varepsilon,$$

что и требовалось показать.

§ 3. Эксцентриситет и директриса параболы. В гл. III, § 7 мы определили параболу как геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки—фокуса и данной прямой—директрисы. Таким образом, обозначая через r расстояние любой точки M параболы до фокуса, а через d её расстояние до директрисы, мы имеем $r=d$, или $\frac{r}{d}=1$ (черт. 38). Следовательно, *эксцентриситет параболы должно принять равным* 1. Уравнение директрисы параболы будет:

$$x=-\frac{p}{2},$$

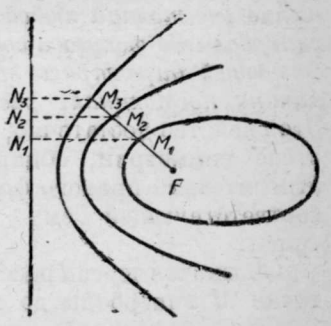
если оси координат выбраны так, как это было сделано в гл. III, § 7.

Объединяя результаты трёх параграфов, мы получаем следующее общее определение конического сечения (эллипса, гиперболы и параболы): *коническое сечение есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки (фокуса) к расстоянию от данной прямой (директрисы) есть величина постоянная* (ε). При этом (черт. 53)

для эллипса $\frac{FM_1}{M_1N_1}=\varepsilon<1$,

для параболы $\frac{FM_2}{M_2N_2}=\varepsilon=1$,

для гиперболы $\frac{FM_3}{M_3N_3}=\varepsilon>1$,



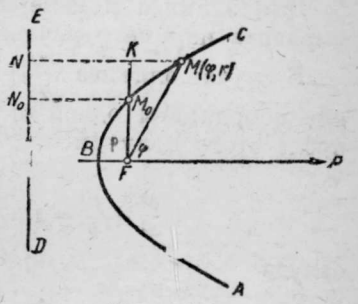
Черт. 53.

§ 4. Уравнение конического сечения в полярных координатах. Задача настоящего параграфа—вывести уравнение

конического сечения в полярных координатах, принимая за полюс один из фокусов и за полярную ось—фокальную ось этого конического сечения.

Пусть ABC (черт. 54)—дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B—вершина, F—фокус и DE—соответствующая директриса.

Примем точку F за полюс, а прямую BFP—за полярную ось и обозначим эксцентриситет кривой через ε, а длину FM_0 радиуса-вектора, перпендикулярного к фокальной оси, через p. Пусть $M(\varphi, r)$—произвольная точка кривой. Составим уравнение, выражающее зависимость между её полярными координатами φ, r и данными числами (*параметрами*) ε, p. По общему свойству всех точек конического сечения имеем:



Черт. 54.

$$\frac{FM}{MN}=\frac{FM_0}{M_0N_0}=\varepsilon,$$

или

$$\frac{r}{MN}=\frac{p}{M_0N_0}=\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{r-p}{MN-M_0N_0}=\varepsilon. \tag{6}$$

Из черт. 54 мы находим:

$$MN-M_0N_0=KM=r\cos\varphi. \tag{7}$$

Следовательно, из (6) и (7) получим:

$$\frac{r-p}{r\cos\varphi}=\varepsilon$$

или

$$r-p=\varepsilon r\cos\varphi,$$

откуда

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{8}$$

Уравнение (8) будет изображать эллипс, если $\varepsilon<1$, параболу при $\varepsilon=1$, гиперболу, когда $\varepsilon>1$.

В уравнении (8) параметр p для параболы имеет, очевидно, прежнее значение, т. е. то же, что и в уравнении $y^2=2px$. В самом деле, для параболы $p=FM_0=M_0N_0$, т. е. p есть расстояние фокуса до директрисы.

Для эллипса и гиперболы можно поставить вопрос: как выразить параметр p через полуоси a и b?

В случае эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ мы подставим в его уравнение координаты одной из точек эллипса, а именно $M_0(-c, p)$; после этого получим:

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p=\frac{b^2}{a}. \tag{9}$$

В случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, координаты её точки $M_0(c, p)$ подставим в уравнение, после чего получим:

$$\frac{c^2}{a^2}-\frac{p^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

откуда снова имеем

$$p^2=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p=\frac{b^2}{a}. \tag{9}$$

Итак, *уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (при указанном выборе полюса и полярной оси) имеют одинаковый вид:*

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{8}$$

причём для эллипса и гиперболы параметр p связан с параметрами a и b формулой

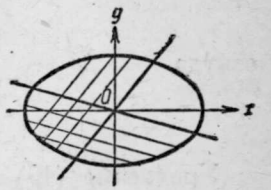
$$p=\frac{b^2}{a}.$$

§ 5. Диаметры эллипса. Сопряжённые диаметры. *Диаметром конического сечения* (в частности, эллипса) *называется геометрическое место середин параллельных между собою хорд.*

Рассмотрим эллипс, отнесённый к его осям симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{10}$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k (черт. 55). Возьмём любую из этих хорд и обозначим её концы через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину — через $M(x, y)$. Так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсе, то их координаты должны удовлетворять его уравнению (10), т. е.



Черт. 55.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \tag{11}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1. \tag{12}$$

С другой стороны, прямая линия M_1M_2 имеет угловой коэффициент k, что даёт нам соотношение (гл. II, § 11)

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{13}$$

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка, получим:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \tag{14}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{15}$$

Чтобы получить уравнение геометрического места середин хорд, нужно установить зависимость между текущими координатами x, y и постоянными величинами k, a, b, для чего следует из пяти соотношений (11)—(15) исключить четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (11) из равенства (12), найдём:

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$$

или

$$\frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_1+y_2)}{b^2}=0.$$

Внося в последнее равенство, согласно (14), вместо суммы x_1+x_2 её значение $2x$, а вследствие (15), вместо суммы y_1+y_2 её значение $2y$, и, согласно (13), вместо разности y_2-y_1 её выражение $k(x_2-x_1)$, мы придадим ему вид

$$\frac{(x_2-x_1)\,2x}{a^2}+\frac{k\,(x_2-x_1)\,2y}{b^2}=0;$$

сокращая на $2(x_2-x_1)$, мы получим окончательно:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=0,$$

откуда

$$y=-\frac{b^2}{a^2k}x. \qquad (16)$$

Уравнение (16) изображает прямую линию, проходящую через начало координат (центр эллипса). Итак, *все диаметры эллипса суть прямые, проходящие через центр*. Обозначая угловой коэффициент диаметра эллипса через k', напишем уравнение диаметра в виде

$$y=k'x.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (16), видим, что

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}, \qquad (17)$$

или

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}. \qquad (17')$$

Условимся называть диаметр эллипса *сопряжённым* хордам, если он делит пополам эти хорды. Условие (17) или (17′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и *сопряжённого им диаметра*. Так как это условие (17′) симметрично относительно k и k', т. е. не меняется после перестановки k и k', то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k' сопряжён хордам с угловым коэффициентом k, то и диаметр с угловым коэффициентом k сопряжён хордам с угловым коэффициентом k'.

Таким образом, мы получаем *пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру* (черт. 55). *Такие два диаметра эллипса называются сопряжённ-*

ными между собой. Их угловые коэффициенты k и k' связаны условием (17) или (17′).

Итак, у эллипса имеется бесчисленное множество пар сопряжённых между собой диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряжённый диаметр. Вообще говоря, угол между двумя сопряжёнными диаметрами отличен от прямого. Посмотрим, нет ли у эллипса такой пары сопряжённых диаметров, которые были бы перпендикулярны между собою.

В этом случае угловые коэффициенты k и k' должны удовлетворять двум условиям:

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k} \qquad (17)$$

и

$$k'=-\frac{1}{k}, \qquad (18)$$

из которых второе есть условие перпендикулярности. Если $b\neq a$, то условия (17) и (18) одновременно удовлетворяются лишь при $k=0$, $k'=\infty$, т. е. *оси координат* (*оси симметрии эллипса*) *представляют собой пару сопряжённых и перпендикулярных диаметров*. Такие диаметры называют *главными диаметрами* эллипса (*осями симметрии*).

Если $b=a$, т. е. эллипс обращается в окружность, то условие (17) обращается в условие (18) перпендикулярности. Таким образом, в случае окружности любые два сопряжённые диаметра перпендикулярны между собой, т. е. *всякий диаметр окружности есть главный диаметр* (ось симметрии).

Из условия (17) видно, что угловые коэффициенты k и k' двух сопряжённых диаметров эллипса имеют разные знаки, т. е. проходят в смежных четвертях. Таким образом, у эллипса нет диаметра, совпадающего со своим сопряжённым диаметром. При увеличении k, как следует из условия (17), k' по абсолютной величине уменьшается, т. е. алгебраически также увеличивается. Это показывает, что при вращении диаметра эллипса против часовой стрелки сопряжённый с ним диаметр вращается в ту же сторону.

Пример. Определить длину диаметра эллипса $x^2+2y^2=1$, сопряжённого диаметру, делящему пополам первый координатный угол.

Угловой коэффициент данного диаметра есть 1. Из условия находим угловой коэффициент k' диаметра, ему сопряжённого:

$$k'=-\frac{b^2}{a^2k}. \qquad (17)$$

Здесь $k=1$, $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}$. Следовательно, $k'=-\frac{1}{2}$. Уравнение этого диаметра будет:

$$y=-\frac{1}{2}x.$$

Чтобы найти его длину, нужно определить точки его пересечения с эллипсом, для чего решим совместно уравнения эллипса и диаметра:

$$x^2+2y^2=1 \quad \text{и} \quad y=-\frac{1}{2}x.$$

Подставляя в первое уравнение значение y из второго, найдём:

$$x^2+\frac{1}{2}x^2=1, \quad \frac{3}{2}x^2=1, \quad x^2=\frac{2}{3}, \quad \text{откуда} \quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}};$$

Зная абсциссы точек пересечения, найдём их ординаты:

$$y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

По формуле расстояния между двумя точками находим длину d искомого диаметра:

$$d^2=\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=\frac{10}{3},$$

откуда

$$d=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{30}.$$

§ 6. Диаметры гиперболы. Сопряжённые диаметры. Рассмотрим теперь гиперболу, отнесённую к её осям симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{19}$$

и систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k (черт. 56).

Производя вычисления, аналогичные проделанным для эллипса, найдём уравнение диаметра гиперболы, которое может быть получено из уравнения (16) заменой b^2 на $-b^2$, так как уравнение гиперболы отличается от уравнения эллипса лишь знаком при b^2.

Итак, уравнение диаметра гиперболы, делящего пополам хорды с угловым коэффициентом k, будет:

$$y=\frac{b^2}{a^2k}x. \tag{20}$$

Уравнение (20) изображает прямую линию, проходящую через начало координат—центр гиперболы. Итак, *все диаметры гиперболы суть прямые, проходящие через центр*. Обозначая угловой коэффициент диаметра гиперболы через k', напишем уравнение диаметра в виде

$$y=k'x.$$

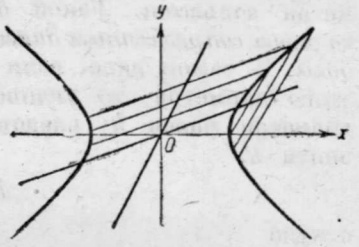
Сравнивая это уравнение с уравнением (20), мы видим, что

$$k'=\frac{b^2}{a^2k}, \tag{21}$$

или

$$kk'=\frac{b^2}{a^2}. \tag{21'}$$

Условимся называть диаметр гиперболы *сопряжённым* хордам, если он делит пополам эти хорды. Условие (21) или (21′) связывает между собой угловые коэффициенты параллельных хорд и сопряжённого им диаметра. Так как условие (21′) симметрично относительно k и k', то отсюда заключаем: если диаметр с угловым коэффициентом k' сопряжён хордам с угловым коэффициентом k, то диаметр с угловым коэффициентом k сопряжён хордам с угловым коэффициентом k'. Таким образом, мы получаем *пару диаметров, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому диаметру* (черт. 56). *Такие два диаметра гиперболы называются взаимно сопряжёнными между собой*. Их угловые коэффициенты k и k' связаны условием (21) или (21′).



Черт. 56.

Итак, у гиперболы имеется бесчисленное множество пар сопряжённых диаметров: каждому диаметру соответствует свой сопряжённый диаметр. Вообще говоря, угол между двумя сопряжёнными диаметрами отличен от прямого. Посмотрим,

нет ли у гиперболы такой пары сопряжённых диаметров, которые были бы и перпендикулярны между собой.

В этом случае угловые коэффициенты k и k' таких диаметров должны удовлетворять двум условиям:

$$k' = \frac{b^2}{a^2 k} \tag{21}$$

и

$$k' = -\frac{1}{k}, \tag{22}$$

из которых второе есть условие перпендикулярности. Очевидно, эти условия (21) и (22) одновременно удовлетворяются лишь при $k = 0$, $k' = \infty$, т. е. *оси координат (оси симметрии гиперболы) представляют собой пару сопряжённых и перпендикулярных диаметров*. Такие два диаметра называют *главными диаметрами* гиперболы (осями симметрии).

Из условия (21) видно, что угловые коэффициенты k и k' двух сопряжённых диаметров гиперболы имеют одинаковые знаки, т. е. диаметры проходят в одинаковых четвертях. При увеличении k ($k > 0$), как следует из условия (21), k', оставаясь положительным, уменьшается. Это показывает, что при вращении диаметра гиперболы против часовой стрелки сопряжённый с ним диаметр вращается в обратную сторону, т. е. по часовой стрелке. При этом наступит момент, когда оба диаметра сольются. Такой *диаметр гиперболы, совпадающий со своим сопряжённым диаметром, является асимптотой гиперболы*. В самом деле, если k означает угловой коэффициент этого диаметра, то угловой коэффициент k' сопряжённого диаметра равен k; следовательно, условие (21′) позволяет найти k:

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$k = \pm \frac{b}{a}. \tag{23}$$

Как известно (гл. III, § 6), формула (23) даёт значения угловых коэффициентов двух асимптот гиперболы. Из геометрических соображений очевидно, что сопряжённые диаметры гиперболы лежат по разные стороны асимптоты, причём один из них пересекает гиперболу в двух точках, а другой гиперболы не пересекает (черт. 57).

Угол между асимптотами вообще отличен от прямого угла. Асимптоты гиперболы будут перпендикулярны между собой,

если их угловые коэффициенты удовлетворяют условию перпендикулярности:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Подставляя в это условие значения угловых коэффициентов асимптот

$$k_1 = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{b}{a},$$

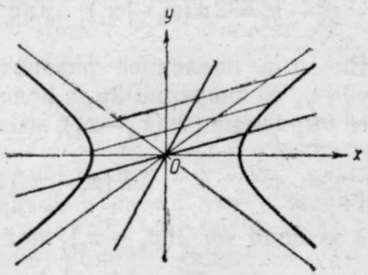
мы получим:

$$-\frac{b^2}{a^2} = -1, \quad \text{или} \quad b^2 = a^2,$$

откуда

$$b = a.$$

Таким образом, асимптоты гиперболы будут перпендикулярны в случае $b = a$, т. е. для равносторонней гиперболы. В случае равносторонней гиперболы угловые коэффициенты асимптот равны 1 и -1, т. е. асимптоты делят пополам углы между главными диаметрами гиперболы; принимая асимптоты за новые оси координат, мы должны повернуть оси симметрии на угол в 45°.



Черт. 57.

§ 7. Диаметры параболы. Рассмотрим, наконец, уравнение параболы, отнесённое к её вершине:

$$y^2 = 2px, \tag{24}$$

и возьмём систему параллельных между собой хорд с угловым коэффициентом k. Обозначим концы любой из этих хорд через $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а середину—через $M(x, y)$. Так как точки M_1 и M_2 лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять её уравнению (24), т. е.

$$y_1^2 = 2px_1, \tag{25}$$
$$y_2^2 = 2px_2. \tag{26}$$

С другой стороны, прямая линия M_1M_2 имеет угловой коэффициент k, что даёт нам соотношение (гл. II, § 11):

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{27}$$

Наконец, заметив, что точка M является серединой отрезка M_1M_2, получим:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad (28)$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (29)$$

Чтобы получить уравнение геометрического места середин хорд, нужно установить зависимость между текущими координатами x, y и постоянными величинами k, p, для чего следует из пяти соотношений (25)—(29) исключить четыре вспомогательные величины x_1, x_2, y_1, y_2. С этой целью, вычитая равенство (25) из равенства (26), найдём:

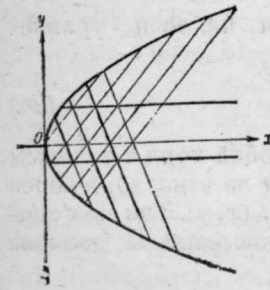
$$y_2^2-y_1^2=2p(x_2-x_1) \quad \text{или} \quad (y_2-y_1)(y_1+y_2)=2p(x_2-x_1).$$

Внося в последнее равенство, согласно (29), вместо суммы y_1+y_2 её значение $2y$, а вследствие (27) вместо разности y_2-y_1 её выражение $k(x_2-x_1)$, мы придадим ему вид

$$k(x_2-x_1)2y=2p(x_2-x_1);$$

сокращая на $2(x_2-x_1)$, получим окончательно:

$$ky=p,$$



Черт. 58.

откуда

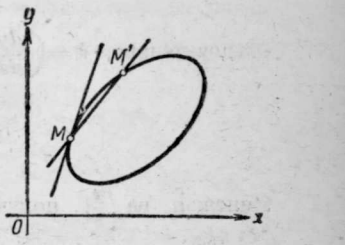
$$y=\frac{p}{k}, \qquad (30)$$

Уравнение (30) изображает диаметр параболы, делящий пополам хорды с угловым коэффициентом k. Такой диаметр параболы назовём *сопряжённым* хордам с угловым коэффициентом k. Как видно из уравнения (30), *все диаметры параболы параллельны между собой*, так как имеют один и тот же угловой коэффициент $k'=0$ (черт. 58).

Вообще говоря, угол между хордами параболы и сопряжённым с ними диаметром отличен от прямого; тангенс этого угла есть k. Этот угол будет прямым, если $k=\infty$; тогда уравнение диаметра (30) будет $y=0$, т. е. диаметр совпадает с осью Ox. Итак, у параболы имеется один диаметр (ось Ox), *перпендикулярный к своим сопряжённым хордам*. Такой диаметр называют

главным диаметром параболы (*осью симметрии*). Так как все диаметры параболы параллельны между собой, то у параболы нет сопряжённых диаметров.

§ 8. Касательная. Рассмотрим точку $M(x_0, y_0)$ на коническом сечении (эллипсе, гиперболе или параболе) и проведём через неё секущую MM' (черт. 59). Эта секущая пересекает коническое сечение в двух точках: M и M'. Оставляя точку M неподвижной, заставим вторую точку пересечения M' неограниченно приближаться к точке M, следуя по коническому сечению. При этом секущая MM' будет вращаться около точки M и то *предельное положение, которое займёт секущая, когда точка M' сольётся с M, называется касательной к коническому сечению в точке M*. Точка M называется *точкой прикосновения*. Уравнение касательной как прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, будет (гл. II, § 9):



Черт. 59.

$$y-y_0=k(x-x_0), \qquad (31)$$

где k есть угловой коэффициент касательной в точке M, подлежащий определению. Чтобы определить k, обозначим координаты точки M' через x_0+h, y_0+l; тогда угловой коэффициент секущей MM' как прямой, проходящей через две точки $M(x_0, y_0)$ и $M'(x_0+h, y_0+l)$, будет $\frac{l}{h}$ (гл. II, § 11). Угловой же коэффициент k касательной будет пределом $\frac{l}{h}$, когда h стремится к нулю (точка M' стремится к точке M), т. е.

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{l}{h}.$$

Так как h и l суть приращения соответственно абсциссы и ординаты точки M конического сечения, то k является пределом отношения приращения ординаты (функции) к приращению абсциссы (независимого переменного), когда это последнее стремится к нулю. Из дифференциального исчисления известно, что такой предел есть производная от ординаты y по абсциссе x, взятая для точки $M(x_0, y_0)$, т. е.

$$k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0,$$

где значок $_0$ указывает, что значение производной нужно брать для точки (x_0, y_0). Зависимость же функции y от независимого переменного x задаётся уравнением конического сечения.

Пример 1. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0, y_0).

Дифференцируя уравнение эллипса, получим:

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy=0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Следовательно, $k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Уравнение касательной будет:

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

Умножая на $\frac{y_0}{b^2}$, получим:

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на эллипсе, то правая часть последнего уравнения равна 1, и уравнение касательной примет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0, y_0).

Аналогично примеру 1 получим уравнение касательной к гиперболе в виде

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Посмотрим, во что обратится уравнение касательной к гиперболе, если точка (x_0, y_0) удалится в бесконечность. Перепишем уравнение касательной в виде

$$y=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x-\frac{b^2}{y_0}$$

и заметим, что (x_0, y_0) удовлетворяет условию

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \quad \text{откуда} \quad \frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{y_0^2}.$$

Заставляя теперь точку (x_0, y_0) удаляться в бесконечность, следуя по

гиперболе, получим, переходя к пределу в последнем равенстве:

$$\lim\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}, \quad \text{или} \quad \left[\lim\frac{x_0}{y_0}\right]^2=\frac{a^2}{b^2}, \quad \text{откуда} \quad \lim\frac{x_0}{y_0}=\pm\frac{a}{b};$$

Уравнение касательной в пределе примет вид

$$y=\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(\pm\frac{a}{b}x\right), \quad \text{или} \quad y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Это суть уравнения двух асимптот гиперболы. Таким образом, *когда точка прикосновения удаляется в бесконечность, касательная стремится к положению асимптоты гиперболы.*

Пример 3. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке (x_0, y_0).

Дифференцируя уравнение параболы, найдём:

$$2y\,dy=2p\,dx, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y};$$

Следовательно, $k=\frac{p}{y_0}$, и уравнение касательной будет:

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0),$$

или, умножая на y_0,

$$yy_0-y_0^2=px-px_0.$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит на параболе, то её координаты удовлетворяют уравнению параболы $y_0^2=2px_0$. Заменяя в уравнении касательной y_0^2 его значением, найдём:

$$yy_0=px+px_0, \quad \text{или} \quad yy_0=p(x+x_0).$$

Угловой коэффициент касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ конического сечения (эллипса, гиперболы, параболы) возможно определить, не применяя дифференциального исчисления. С этой целью заметим, что направление касательной к коническому сечению в точке M_0 совпадает с направлением хорд, сопряжённых диаметру, проходящему через точку M_0. Следовательно, из условия сопряжённости (17′) в случае эллипса получим угловой коэффициент k касательной в точке M_0, если заменим в нём k' через угловой коэффициент диаметра, проходящего через точку M_0; заметив, что $k'=\frac{y_0}{x_0}$, получим:

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Аналогично для гиперболы из условия (21′) найдём угловой коэффициент касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$:

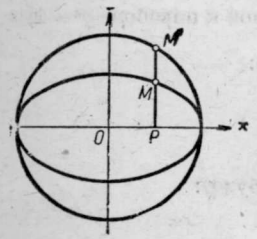
$$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Наконец, в случае параболы угловой коэффициент k касательной в точке M_0 определится из условия прохождения её диаметра, имеющего уравнение (30) $y=\frac{p}{k}$, через точку M_0, т. е. $y_0=\frac{p}{k}$, откуда

$$k=\frac{p}{y_0}.$$

§ 9. Эллипс как проекция окружности. Пусть дан эллипс своим уравнением относительно осей симметрии

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b).$$



Черт. 60.

Рассмотрим уравнение окружности

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1,$$

описанной около эллипса (черт. 60).

Назовём две точки M и M', лежащие соответственно на эллипсе и окружности, соответствующими точками, если они имеют одну и ту же абсциссу OP и лежат по одну и ту же сторону от оси Ox. Обозначая их общую абсциссу OP через x, ординаты PM и PM' через y и Y, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Сравнив два последние уравнения, заключаем, что

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{Y^2}{a^2},$$

или, решая это уравнение относительно y^2, получаем:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}Y^2,$$

откуда окончательно

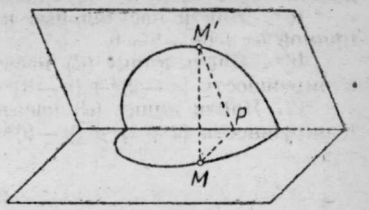
$$y=\frac{b}{a}Y.$$

Так как $\frac{b}{a}<1$, то мы вправе положить

$$\frac{b}{a}=\cos\varphi,$$

и зависимость между ординатами соответствующих точек представится в виде

$$y=Y\cos\varphi.$$



Черт. 61.

Последняя формула показывает, что отрезок $PM=y$ может быть рассматриваем как проекция отрезка $PM'=Y$ (черт. 60), если угол между этими отрезками принят равным φ.

Отсюда следует, что если поместить окружность в плоскости, наклонённой к плоскости эллипса под углом φ, то эллипс будет являться ортогональной проекцией этой окружности (черт. 61).

Упражнения

Окружность

1. Написать уравнение окружности, зная, что:

a) центр окружности лежит в точке $(-2, -3)$ и радиус её равен 3 единицам длины;

b) центр лежит в точке $(2, -3)$ и окружность проходит через точку $(5, 1)$;

c) концы одного из диаметров имеют координаты $(3, 9)$ и $(7, 3)$.

2*. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(9, 3)$, $(-3, 3)$, $(11, 1)$.

3*. Какие значения должны иметь коэффициенты уравнения

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

чтобы это уравнение выражало уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке $(3, 2)$?

4*. Определить координаты центра и радиус окружности, выражаемой уравнением: a) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$; b) $2x^2+2y^2+5x-3y+2=0$; c) $x^2+y^2-6x-7=0$.

5. Найти уравнение окружности, касающейся осей координат на расстояниях a единиц масштаба от начала координат.

6. Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке $(6, 0)$.

7. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке $(0, -8)$.

8. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в точке $(-5, 0)$ и имеющей радиус, равный 3 единицам длины.

9*. Найти уравнение окружности, центр которой лежит в точке $(4, 7)$ и которая касается прямой $3x-4y+1=0$.

10*. Вывести уравнение касательной к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в точке (x_0, y_0).

11. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=r^2$ в точке (x_0, y_0).

12. Написать уравнение касательной к окружности $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ в точке $(3, 6)$.

13*. Найти уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=10$, проходящих через точку $(-5, -5)$.

14. Найти уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=5$, проходящих через точку $(-7,\ 1)$.

15*. Найти касательные к окружности $x^2+y^2=13$, параллельные прямой $4x+6y-5=0$.

16*. Найти длину (d) касательной, проведённой из точки $M(7,\ 8)$ к окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=14$.

17. Найти длину (d) касательной, проведённой из точки $M(6,\ -3)$ к окружности $(x+1)^2+(y-5)^2=32$.

Эллипс

18. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

a) полуоси его равны соответственно 5 и 4;

b) расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10;

c) малая полуось равна 2 и расстояние между фокусами равно 6;

d) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен 0,6;

e) малая полуось равна 6 и эксцентриситет равен 0,8;

f) эксцентриситет равен 0,8 и расстояние между фокусами равно 8;

g) сумма полуосей равна 10 и расстояние между фокусами равно $4\sqrt{5}$.

19. Найти длины осей эллипса $16x^2+25y^2=400$; вычислить также координаты его фокусов и эксцентриситет.

20. Определить эксцентриситет эллипса, если:

a) расстояние между его фокусами видно из конца малой оси под прямым углом;

b) расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой осей;

c) его большая ось втрое больше малой;

d) его оси относятся, как 5 : 3.

21. Дан эксцентриситет эллипса ε. Найти отношение его полуосей.

22. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(5,\ 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что эксцентриситет его равен 0,6.

23. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(8,\ 0)$ и оси ординат в точке $(0,\ -5)$. Написать уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

24. Эллипс касается оси ординат в точке $(0,\ 5)$ и пересекает ось абсцисс в точках $(5,\ 0)$ и $(11,\ 0)$. Составить уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

25. Сколько касательных к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ можно провести из точки $(1,\ 1)$, сколько из точки $(3,\ 1)$ и сколько из точки $(0,\ 2)$?

26. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $(-3,\ 3)$.

27. Известно, что прямая $2x-5y-30=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{24}=1$. Найти их точку прикосновения.

28*. Найти уравнения касательных, проведённых из точки $(4,\ -1)$ к эллипсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

29. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, проходящие через точку $(1,\ 6)$.

30*. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$, параллельные прямой $6x-2y-5=0$.

31. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, перпендикулярные к прямой $x-y+5=0$.

32. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{96}+\frac{y^2}{32}=1$.

33. Написать уравнение эллипса, малая полуось которого равна $2\sqrt{6}$ и директрисами которого служат прямые $x=\pm 10$.

34. Найти уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равняется 2 и расстояние между директрисами 10.

35. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между его директрисами в три раза больше расстояния между фокусами.

36. Расстояние между директрисами эллипса равняется 36. Найти уравнение этого эллипса, зная, что фокальные радиусы-векторы некоторой его точки равны 9 и 15.

37. Расстояние между фокусами эллипса равно 8, расстояние между его директрисами равно 12,5. Найти простейшее уравнение этого эллипса.

38*. Дан эллипс $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$. Через точку $(1,\ 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

39. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Через точку $(2,\ -1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

40. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла.

41*. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведённые в концах одного и того же диаметра, параллельны.

42. Найти уравнения диаметров эллипса $x^2+\frac{y^2}{9}=1$, длина которых равна $2\sqrt{5}$.

43. Найти угол между двумя сопряжёнными диаметрами эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$, из которых один наклонён к большой оси под углом в 30°.

44. Найти для эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ направления и длины двух сопряжённых диаметров, из которых один проходит через точку $(4,\ 2)$.

45. Определить длины сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$, которые образуют между собой угол в 60°.

46*. Найти уравнения равных сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

47. Написать уравнения двух равных сопряжённых диаметров эллипса

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$$

48. Найти угол между двумя равными сопряжёнными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.$$

49*. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

50. Найти простейшее полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Гипербола

51. Составить простейшее уравнение гиперболы, зная, что:

a) полуоси её равны соответственно 5 и 4 единицам длины;

b) расстояние между фокусами равно 14, а расстояние между вершинами 12;

c) действительная полуось равна 5 и эксцентриситет равен 1,4;

d) расстояние между фокусами равно 16 и эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$;

e) действительная полуось равна $\sqrt{15}$ и гипербола проходит через точку $(5, -2)$;

f) гипербола проходит через точки $(2\sqrt{7}, -3)$ и $(-7, -6\sqrt{2})$.

52. Найти длины осей гиперболы $25x^2-144y^2=3\,600$; вычислить также координаты её фокусов и эксцентриситет.

53. Найти зависимость между эксцентриситетом гиперболы и углом между её асимптотами.

54. Найти уравнения диаметров гиперболы $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, длина которых равна $2\sqrt{5}$.

55. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 8 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы-векторы этой точки.

56. Дан эллипс $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы—в вершинах данного эллипса.

57. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ в точках пересечения её с прямой $3x-5y=0$.

58. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$, проходящие через точку $(2, 1)$.

59. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, параллельные прямой $3x-2y=0$.

60. Доказать, что для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ произведение расстояний от фокусов до касательной равно b^2.

61. Доказать, что асимптоты равнобочной гиперболы делят пополам углы между её сопряжёнными диаметрами.

62. Найти расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ от асимптоты.

63. Даны параметр p и эксцентриситет ε гиперболы. Найти полуоси.

64. Гипербола касается прямой $x-y-3=0$ в точке $(5, 2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

65. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$, перпендикулярные к прямой $x+2y-3=0$.

66. Найти уравнение гиперболы, зная, что расстояние между её директрисами равно 6, а расстояние между фокусами 10.

67. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что расстояние между её директрисами в три раза меньше расстояния между фокусами.

68. Найти уравнения двух сопряжённых диаметров гиперболы $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$, угол между которыми равен 45°.

69*. Дана гипербола $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. Найти уравнение диаметра, длина которого равна $2\sqrt{29}$.

70. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. Написать уравнение её асимптот.

71. Найти уравнение гиперболы, если известно, что:

a) $a=b$ и директрисы даны уравнениями $x=\pm 2$;

b) асимптоты даны уравнениями $y=\pm\frac{1}{2}x$ и расстояние между фокусами равно 10;

c) асимптоты даны уравнениями $y=\pm\frac{3}{5}x$ и гипербола проходит через точку $(10, -3\sqrt{3})$.

72*. Чему равен эксцентриситет гиперболы, если угол между её асимптотами равен: a) 90°; b) 60°?

73*. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до асимптот есть величина постоянная.

74. Составить уравнение касательной к гиперболе $xy=m$ в точке (x_0, y_0).

Парабола

75. Составить уравнение параболы, зная, что:
a) осью симметрии параболы служит ось Ox, вершина лежит в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4 единицам длины;
b) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $(2, -4)$ и вершина её лежит в начале координат;
c) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $(-2, 4)$ и вершина её лежит в начале координат;
d) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус лежит в точке $(0, 3)$ и вершина совпадает с началом координат;
e) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(4, 2)$ и вершина её лежит в начале координат;
f) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(-4, -2)$ и вершина совпадает с началом координат;
g) фокус имеет координаты $(3, 0)$, директриса служит осью ординат и ось симметрии—осью абсцисс;
h) фокус имеет координаты $(0, 3)$, директриса служит осью абсцисс и ось симметрии—осью ординат.

76*. Составить уравнение параболы, зная, что вершина её лежит в точке (a, b), параметр равен p и направление оси симметрии совпадает:
a) с положительным направлением оси Ox;
b) с отрицательным направлением оси Ox;
c) с положительным направлением оси Oy;
d) с отрицательным направлением оси Oy.

77*. Доказать, что кривые, выражаемые уравнениями:

$$\text{a) } y=Ax^2+Bx+C; \quad \text{b) } x=My^2+Ny+P,$$

суть параболы. Найти также координаты вершин этих парабол, параметры и направления осей симметрии.

78. Определить координаты вершины, параметр и направление оси симметрии, если парабола задана уравнением:

$$\text{a) } y=2x^2-4x+8; \quad \text{b) } y=10x-x^2; \quad \text{c) } x=y^2+6y+3.$$

79. Найти длину хорды, проходящей через фокус параболы $y^2=2px$ и перпендикулярной к её оси симметрии.

80*. Дана парабола $y^2=6x$. Через точку $(4, 1)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

81. Дана парабола $y^2=-8x$. Через точку $(1, -1)$ провести такую хорду, которая в этой точке делилась бы пополам.

82. Найти уравнения диаметров параболы $y^2=8x$, сопряжённых с хордами, наклонёнными к ним под углом в 45°.

83. Дана парабола $y^2=10x$. Найти к этой параболе касательные в точках, в которых она пересекается с прямой $y=4x-5$.

84. Найти такую точку на параболе $y^2=12x$, чтобы касательная в ней образовывала с осью симметрии параболы угол в 30°.

85. Найти касательные к параболе $y^2=4x$, проходящие через точку $(3, -4)$.

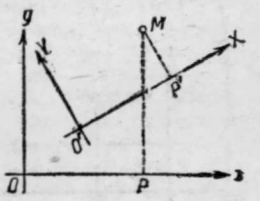
86. Найти уравнение касательной к параболе $y^2=16x$, которая была бы: a) параллельна прямой $2x-y+5=0$; b) перпендикулярна к прямой $x-y-7=0$.

87. Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

ГЛАВА V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ

§ 1. Задача преобразования координат. Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если мы выберем другую систему координат. Задача преобразования координат состоит в том, чтобы, *зная координаты точки в одной системе координат, найти её координаты в другой системе.* Эта задача будет разрешена, если мы установим формулы, связывающие координаты произвольной точки по двум системам, причём в коэффициенты этих формул войдут постоянные величины, определяющие взаимное положение систем.



Черт. 62.

Пусть даны две декартовы системы координат xOy и $XO'Y$ (черт. 62). Положение новой системы $XO'Y$ относительно старой системы xOy будет определено, если известны координаты a и b нового начала O' по старой системе и угол α между положительными направлениями осей Ox и $O'X$, т. е. угол, на который нужно повернуть около точки O старую систему, чтобы направления её осей совпали с направлениями новых осей.

Обозначим через x и y координаты произвольной точки M относительно старой системы, через X и Y — координаты той же точки относительно новой системы. Наша задача заключается в том, чтобы старые координаты x и y выразить через новые X и Y. В полученные формулы преобразования должны, очевидно, входить постоянные a, b и α. Решение этой общей задачи мы получим из рассмотрения двух частных случаев.

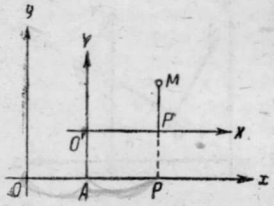
1. *Меняется начало координат, направления же осей остаются неизменными* ($\alpha=0$).

2. *Меняются направления осей, начало же координат остаётся неизменным* ($a=b=0$).

§ 2. Перенос начала координат. Пусть даны две системы декартовых координат с разными началами O и O' и одинаковыми направлениями осей (черт. 63). Обозначим через a и b координаты нового начала O' по старой системе и через x, y и X, Y—координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системам. Проектируя точку M на оси $O'X$ и Ox, а также точку O' на ось Ox, получим на оси Ox три точки O, A и P, между которыми существует соотношение (гл. I, § 2)

$$\overline{OA}+\overline{AP}=\overline{OP}. \qquad (1)$$

Заметив, что $\overline{OA}=a$, $\overline{OP}=x$, $\overline{AP}=\overline{O'P'}=X$, перепишем равенство (1) в виде



Черт. 63.

$$a+X=x, \text{ или } x=X+a. \qquad (2)$$

Аналогично, проектируя M и O' на ось ординат, получим:

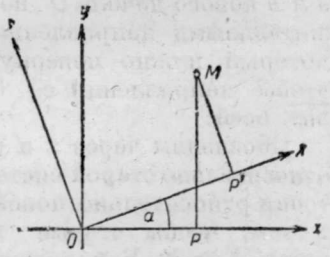
$$y=Y+b. \qquad (3)$$

Итак, *старая координата равна новой плюс координата нового начала по старой системе.*

Из формул (2) и (3), обратно, новые координаты можно выразить через старые:

$$X=x-a, \qquad (2')$$

$$Y=y-b. \qquad (3')$$



Черт. 64.

§ 3. Поворот осей координат. Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковым началом O и разными направлениями осей (черт. 64). Пусть α есть угол поворота новой системы относительно старой; обозначим через x, y и X, Y координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системам. На черт. 64 $x=\overline{OP}$, $y=\overline{PM}$, $X=\overline{OP'}$, $Y=\overline{P'M}$.

Рассмотрим ломаную линию $OP'MP$ и возьмём её проекцию на ось Ox. Замечая, что проекция ломаной линии равна проекции замыкающей (гл. I, § 7), имеем:

$$\text{пр.}\,\overline{OP'MP}=\text{пр.}\,\overline{OP}=\overline{OP}. \qquad (4)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций её звеньев (гл. I, § 7), следовательно, равенство (4) запишется так:

$$\text{пр.}\,\overline{OP'}+\text{пр.}\,\overline{P'M}+\text{пр.}\,\overline{MP}=\overline{OP}. \qquad (4')$$

Так как проекция отрезка равна самому отрезку, умноженному на косинус угла между положительными направлениями оси проекций и той прямой, на которой лежит отрезок (гл. I, § 7), то

$$\text{пр.}\,\overline{OP'}=X\cos\alpha, \quad \text{пр.}\,\overline{P'M}=Y\cos(90^\circ+\alpha)=-Y\sin\alpha,$$

$$\text{пр.}\,\overline{MP}=0.$$

Отсюда равенство (4′) нам даёт:

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha. \qquad (5)$$

Аналогично, проектируя ту же ломаную на ось Oy, получим формулу для y. В самом деле, имеем:

$$\text{пр.}\,\overline{OP'}+\text{пр.}\,\overline{P'M}+\text{пр.}\,\overline{MP}=\text{пр.}\,\overline{OP}=0.$$

Заметив, что

$$\text{пр.}\,\overline{OP'}=X\cos(90^\circ-\alpha)=X\sin\alpha, \quad \text{пр.}\,\overline{P'M}=Y\cos\alpha,$$

$$\text{пр.}\,\overline{MP}=-y,$$

будем иметь:

$$X\sin\alpha+Y\cos\alpha-y=0,$$

или

$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если разрешим уравнения (5) и (6) относительно X и Y.

Замечание. Формулы (5) и (6) могут быть непосредственно геометрически истолкованы. Действительно, из чертежа 65 находим:

$$x=\overline{OP}=\overline{OS}-\overline{PS}.$$

Карело-Финская База
Академии Наук СССР
БИБЛИОТЕКА

С другой стороны, из прямоугольного треугольника OSP':

$$\overline{OS} = \overline{OP'}\cos\alpha = X\cos\alpha,$$

а из треугольника $MP'N$:

$$\overline{PS} = \overline{NP'} = Y\sin\alpha.$$

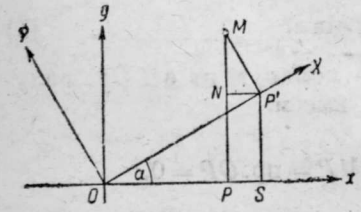
Подставляя значения $\overline{OS}$ и $\overline{PS}$ в формулу для x, мы получим:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

Аналогично из черт. 65 находим:

$$y = \overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM}.$$

Из прямоугольного треугольника OSP' получаем:



Черт. 65.

$$\overline{PN} = \overline{SP'} = X\sin\alpha,$$

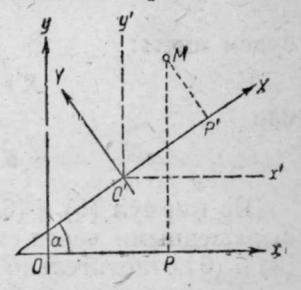
а из треугольника $MP'N$:

$$\overline{NM} = Y\cos\alpha.$$

Подставляя значения $\overline{PN}$ и $\overline{NM}$ в формулу для y, получим:

$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

§ 4. Общий случай. Пусть даны две декартовы системы координат с разными началами и разными направлениями осей (черт. 66). Обозначим через a и b координаты нового начала O' по старой системе, через α — угол поворота новой системы и, наконец, через x, y и X, Y — координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системе.



Черт. 66.

Чтобы выразить x и y через X и Y, введём вспомогательную систему координат $x'O'y'$, начало которой поместим в новом начале O', а направления осей возьмём совпадающими с направлениями старых осей. Пусть x' и y' обозначают координаты точки M относительно этой вспомогательной системы. Переходя от старой системы координат к вспомогательной, имеем (§ 2):

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Переходя, далее, от вспомогательной системы координат к новой, найдём (§ 3):

$$x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Заменяя x' и y' в предыдущих формулах их выражениями из последних формул, найдём окончательно:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Формулы (I) содержат как частный случай формулы § 2 и 3. Так, при $\alpha = 0$ формулы (I) обращаются в

$$x = X + a, \quad y = Y + b,$$

а при $a = b = 0$ имеем:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Из формул (I) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если уравнения (I) разрешим относительно X и Y.

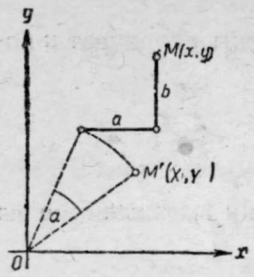
Отметим весьма важное свойство формул (I): они суть первой степени относительно X и Y, т. е. вида

$$x = AX + BY + C, \quad y = A_1X + B_1Y + C_1.$$

Обратно, новые координаты X и Y выразятся через старые x и y формулами того же вида.

§ 5. Механическое истолкование формул преобразования координат. Вообразим себе, что точка M (черт. 67) неизменно связана с новой системой $XO'Y$, и совместим эту систему координат со старой системой. Тогда точка M' (положение, занятое точкой M) будет иметь относительно старой системы координаты X и Y. Итак, мы будем иметь две точки M' и M, координаты которых X, Y и x, y относительно одной и той же старой системы связаны формулами (I) (черт. 67).

Чтобы перевести точку M' в точку M, очевидно, нужно сперва повернуть её радиус-вектор OM' на угол α около точки O, а затем передвинуть её параллельно оси Ox на расстояние a и параллельно оси Oy на расстояние b.



Черт. 67.

Таким образом, формулы (I), будучи отнесены к одной декартовой системе координат, связывают между собой координаты двух точек $M'(X, Y)$ и $M(x, y)$, из которых вторая получается из первой точки путём указанного движения.

Очевидно, формулы § 2 выражают лишь поступательное движение, а формулы § 3 — одно вращательное движение.

Пример 1. Дано уравнение $x^2-y^2+2x-4y-7=0$; преобразовать его так, чтобы оно не содержало членов первого измерения.

Перенесём начало координат в точку (a, b), пока произвольную. Формулы преобразования суть:

$$x=X+a, \quad y=Y+b.$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$(X+a)^2-(Y+b)^2+2(X+a)-4(Y+b)-7=0.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$X^2-Y^2+2(a+1)X-2(b+2)Y+a^2-b^2+2a-4b-7=0.$$

Так как a и b произвольны, то выберем их так, чтобы исчезли члены с X' и Y'. Для этого нужно положить

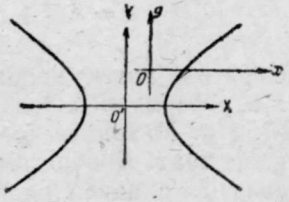
$$a+1=0, \quad b+2=0,$$

откуда $a=-1$, $b=-2$. Внося эти значения в преобразованное уравнение, получим:

$$X^2-Y^2-4=0.$$

Очевидно, полученное уравнение изображает гиперболу

$$\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}=1,$$



Черт. 68.

для которой новые оси координат являются осями симметрии (черт. 68). Следовательно, данное уравнение изображает эту же гиперболу относительно старых осей.

Пример 2. Дано уравнение $x^2+xy+y^2-1=0$; преобразовать его так, чтобы оно не содержало члена с произведением координат.

Повернём систему координат на угол α, пока произвольный. Формулы преобразования (§ 3) суть:

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,$$
$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha.$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)^2+(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)+$$
$$+(X\sin\alpha+Y\cos\alpha)^2-1=0.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$X^2(\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)+XY(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+$$
$$+Y^2(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)-1=0.$$

Так как угол α произволен, то выберем его так, чтобы исчез член с XY. Для этого нужно положить:

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0, \text{ или } \operatorname{tg}^2\alpha=1,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm 1.$$

Возьмём одно из значений $\operatorname{tg}\alpha$, например $\operatorname{tg}\alpha=-1$. Преобразованное уравнение разделим на $\cos^2\alpha$, чтобы его коэффициенты выразить через $\operatorname{tg}\alpha$. Получим:

$$X^2(1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)+Y^2(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha+1)-\frac{1}{\cos^2\alpha}=0,$$

или, замечая, что

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha+1,$$

и заменяя $\operatorname{tg}\alpha$ через -1, окончательно получим,

$$X^2+3Y^2=2.$$

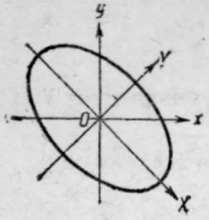
Это уравнение изображает эллипс

$$\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{\frac{2}{3}}=1,$$

для которого новые оси координат являются осями симметрии.

Уравнение оси OX (ось симметрии эллипса), как прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом $k=-1$, будет $y=-x$.

Построив новые оси, мы можем начертить эллипс (черт. 69); следовательно, данное уравнение изображает этот же эллипс относительно старых осей координат.



Черт. 69.

Пример 3. Дано уравнение

$$x^2-xy+y^2-2x+4y=0;$$

преобразовать его так, чтобы оно не содержало ни членов первого измерения, ни члена с xy.

Чтобы уничтожить члены первого измерения, перенесём начало координат в точку $O(a, b)$, пока произвольную. Формулы преобразования суть:

$$x=X+a, \quad y=Y+b.$$

Подставляя эти значения x и y в данное уравнение, получим:

$$(X+a)^2-(X+a)(Y+b)+(Y+b)^2-2(X+a)+4(Y+b)=0.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, будем иметь:

$$X^2-XY+Y^2+(2a-b-2)X+(-a+2b+4)Y+$$

$$+a^2-ab+b^2-2a+4b=0.$$

Положим $2a-b-2=0$, $-a+2b+4=0$, откуда $a=0$, $b=-2$. Внеся найденные значения a и b в уравнение, получим:

$$X^2-XY+Y^2-4=0.$$

Чтобы уничтожить член с XY, повернём теперь систему координат на угол α, пока произвольный. Формулы преобразования суть:

$$X=X'\cos\alpha-Y'\sin\alpha, \quad Y=X'\sin\alpha+Y'\cos\alpha.$$

Подставляя их в последнее уравнение, получим:

$$(X'\cos\alpha-Y'\sin\alpha)^2-(X'\cos\alpha-Y'\sin\alpha)(X'\sin\alpha+Y'\cos\alpha)+$$
$$+(X'\sin\alpha+Y'\cos\alpha)^2-4=0.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, найдём:

$$X'^2(\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)+X'Y'(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+$$
$$+Y'^2(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)-4=0.$$

Полагаем $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha=1$ и $\operatorname{tg}\alpha=\pm 1$.

Возьмём, например, $\operatorname{tg}\alpha=-1$. Разделим преобразованное уравнение на $\cos^2\alpha$ и подставим вместо $\operatorname{tg}\alpha$ его значение -1. Получим:

$$X'^2(1-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)+Y'^2(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1)-4(\operatorname{tg}^2\alpha+1)=0,$$

или

$$3X'^2+Y'^2-4\cdot 2=0, \text{ т. е. } 3X'^2+Y'^2=8.$$

Итак, полученное уравнение изображает эллипс

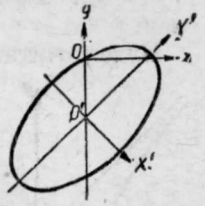
$$\frac{X'^2}{\frac{8}{3}}+\frac{Y'^2}{8}=1,$$

для которого новые оси координат $O'X'$ и $O'Y'$ являются осями симметрии. Уравнение оси $O'X'$ (оси симметрии) как прямой, проходящей через точку $O'(0,-2)$, с угловым коэффициентом $k=-1$, будет:

$$y+2=-(x-0),$$

или

$$x+y+2=0.$$



Черт. 70.

Чтобы начертить эллипс, нужно сначала построить новые оси координат (оси симметрии эллипса). Для этого строим точку $O'(0,-2)$ и прямую $O'X'$ по уравнению $x+y+2=0$ (черт. 70).

Очевидно, данное уравнение изображает этот эллипс относительно старых осей xOy.

§ 6. Некоторые приложения формул преобразования координат. 1. Уравнение равносторонней гиперболы относительно асимптот.

Принимая асимптоты за новые оси координат, мы должны повернуть ось симметрии на угол 45°. Формулы преобразования будут:

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha,$$
$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha;$$

где $\alpha=-45°$ (поворот по часовой стрелке), т. е.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y),$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X).$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение гиперболы $x^2-y^2=a^2$, получим

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2-\frac{1}{2}(Y-X)^2=a^2.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получим:

$$2XY=a^2 \quad \text{и} \quad XY=\frac{a^2}{2}; \qquad (7)$$

Это и есть *уравнение равносторонней гиперболы, когда осями координат служат её асимптоты* (черт. 71).

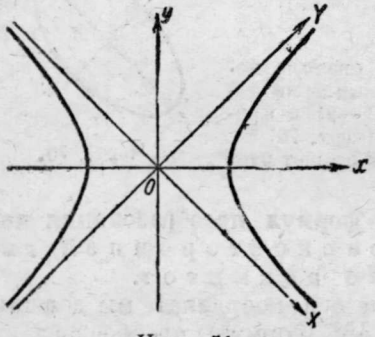
2. Геометрический смысл дробно-линейной функции. Дано уравнение

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Требуется исследовать кривую, изображаемую этим уравнением.

Будем считать $c\neq 0$, так как в случае $c=0$ наше уравнение изображает, очевидно, прямую линию. Разделив числитель и знаменатель на c, придадим уравнению вид

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{x+\delta},$$



Черт. 71.

где положено:

$$\alpha=\frac{a}{c},\quad \beta=\frac{b}{c},\quad \delta=\frac{d}{c}.$$

Предварительно упростим уравнение кривой, перенеся начало координат в новую точку плоскости. Пусть координаты нового начала x_0, y_0 пока произвольны. Формулы преобразования суть:

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0.$$

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$(X+x_0+\delta)(Y+y_0)=\alpha(X+x_0)+\beta.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$XY+(y_0-\alpha)X+(x_0+\delta)Y+(x_0y_0-\alpha x_0+\delta y_0-\beta)=0.$$

Так как x_0 и y_0 произвольны, то выберем их так, чтобы исчезли члены с X и Y. Для этого нужно положить $y_0-\alpha=0$, $x_0+\delta=0$, откуда

$$x_0=-\delta,\quad y_0=\alpha.$$

Внося эти значения в преобразованное уравнение, получим:

$$XY=\beta-\alpha\delta.$$

Очевидно, полученное уравнение изображает равностороннюю гиперболу, для которой новые оси координат являются асимптотами (см. предыдущий пример). Следовательно, *данное уравнение изображает равностороннюю гиперболу с центром в точке* (x_0, y_0), *асимптоты которой параллельны осям координат* (черт. 72).

3. Геометрический смысл квадратной функции.

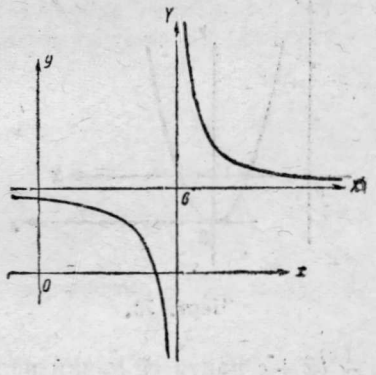
Дано уравнение

$$y=ax^2+bx+c.$$

Требуется исследовать кривую, изображаемую этим уравнением.

Предварительно упростим уравнение кривой, перенеся начало координат в новую точку плоскости. Пусть координаты нового начала x_0, y_0 пока произвольны. Формулы преобразования суть:

$$x=X+x_0;\quad y=Y+y_0.$$



Черт. 72.

Подставляя в данное уравнение вместо x и y их выражения через X и Y, найдём:

$$Y+y_0=a(X+x_0)^2+b(X+x_0)+c.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$Y=aX^2+(2ax_0+b)X+(ax_0^2+bx_0+c-y_0).$$

Так как x_0 и y_0 произвольны, то выберем их так, чтобы исчезли члены с x и свободный. Для этого нужно положить:

$$2ax_0+b=0;$$

$$ax_0^2+bx_0+c-y_0=0,$$

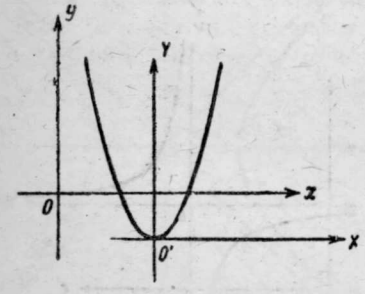
откуда

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Внося эти значения в преобразованное уравнение, получим:

$$Y = aX^2.$$

Очевидно, полученное уравнение изображает *параболу*, для которой новое начало координат является вершиной, а новая ось ординат служит осью симметрии. Следовательно, *данное уравнение изображает параболу с вершиной в точке* (x_0, y_0) *и осью симметрии, расположенной параллельно оси* Oy (черт. 73).



Черт. 73.

Для нахождения её вершины важно только запомнить, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ордината же $y_0 = f(x_0)$ находится подстановкой значения x_0 в уравнение кривой.

Часто бывает также полезно для построения кривой $y = ax^2 + bx + c$ найти её точки пересечения с осью Ox, полагая $y = 0$, если только эти точки существуют, т. е. если корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ действительны.

Заметим ещё, что при $a > 0$ парабола направлена вверх, а при $a < 0$ вниз.

В приведённом исследовании мы считали $a \neq 0$; в случае $a = 0$ наше уравнение будет иметь вид

$$y = bx + c$$

и, значит, ему будет соответствовать *прямая линия*.

§ 7. Составление формул преобразования координат в случае, когда даны уравнения новых осей. Пусть относительно некоторой декартовой системы осей координат xOy даны уравнения двух взаимно перпендикулярных прямых линий

$$Ax + By + C = 0 \qquad (8)$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (9)$$

которые принимаются за новые оси. Чтобы составить формулы преобразования координат, нет необходимости определять синус и косинус угла поворота и координаты нового начала. Действительно, принимая прямую линию (8) за ось $O'X$, заключаем, что уравнение (8) должно быть эквивалентно уравнению $Y = 0$ (уравнение оси $O'X$ в новой системе). Таким образом, $Ax + By + C$ и Y могут отличаться лишь постоянным множителем, т. е.

$$Y = \lambda(Ax + By + C). \qquad (10)$$

Чтобы найти величину множителя λ, заметим, что, согласно формулам (1) § 4, коэффициенты при x и y, равные λA и λB, изображают синус и косинус угла α между положительными направлениями осей $O'X$ и Ox, а потому сумма их квадратов равна 1, т. е. $\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 = 1$, откуда

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = 1,$$

или

$$\lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

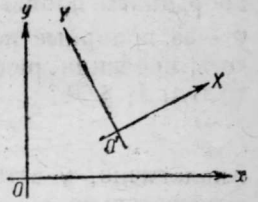
Подставляя найденное значение в выражение (10), получим:

$$Y = \pm\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (11)$$

Эта формула (11) даёт выражение новой ординаты Y через старые координаты x и y, причём выбор знака определяет собой положительное направление оси $O'y'$. Аналогично, принимая прямую линию (9) за ось $O'Y$, найдём:

$$X = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \qquad (12)$$

Выбор знака в формуле (12) определяется выбором положительного направления на оси $O'X$ (черт. 74).



Черт. 74.

Формулы (11) и (12) дают выражения новых координат X и Y через старые координаты x и y.

Замечание. Формулы (11) и (12) можно получить иначе, если заметить, что Y и X суть соответственно расстояния точки $M(x, y)$ до прямых линий, изображаемых уравнениями (8) и (9) (гл. II, § 13).

Чтобы иметь выражения старых координат через новые, нужно разрешить уравнения (11) и (12) относительно x и y.

Пример. Найти формулы преобразования координат, если за новые оси приняты две прямые линии: $x+y-1=0$, $x-y+1=0$.

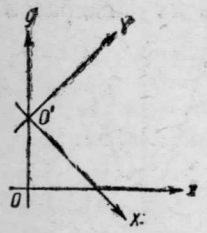
Принимая первую прямую за ось $O'X$, вторую — за ось $O'Y$, имеем:

$$X=\pm\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \qquad Y=\pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}.$$

Новые оси координат строим по их уравнениям:

$$x+y-1=0 \text{ и } x-y+1=0.$$

Что же касается выбора положительных направлений на новых осях, то он определён после фиксирования знаков в формулах для X и Y. Например, при таком выборе знаков:



Черт. 75.

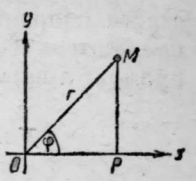
$$X=\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \qquad Y=-\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$$

положительные направления новых осей идут так, как показано на черт. 75. В самом деле, при $x=y=0$ имеем:

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad Y=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е. старое начало координат должно иметь положительную абсциссу и отрицательную ординату в новой системе.

§ 8. Связь декартовых координат с полярными. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале и полярной осью, направленной по оси абсцисс в положительном направлении (черт. 76). Обозначим через x и y декартовы координаты произвольной точки M, через r и φ — её полярные координаты. Так как $x=\overline{OP}$ есть проекция радиуса-вектора r на ось Ox, то (гл. I, § 7)



Черт. 76

$$x=r\cos\varphi. \qquad (13)$$

Аналогично, y есть проекция радиуса-вектора r на ось Oy, следовательно

$$y=r\sin\varphi. \qquad (14)$$

Формулы (13) и (14) выражают декартовы координаты точки M через её полярные координаты. Чтобы, обратно, полярные координаты выразить через декартовы, нужно разрешить уравнения (13) и (14) относительно r и φ. С этой целью, возводя оба равенства (13) и (14) в квадрат и складывая, получим:

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2,$$

или

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (15)$$

Далее, деля равенство (14) на равенство (13), получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16), кроме того, легко получить непосредственно из черт. 76.

По формуле (16) определяется тангенс полярного угла φ. Остаётся по данному тангенсу найти угол φ; при этом получаются два значения угла φ, разнящиеся между собой на 180°. Из этих двух значений угла φ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и y [формула (14)].

Пример 1. Декартовы координаты точки суть (1, —1). Каковы полярные координаты той же точки?

По формулам (15) и (16) имеем:

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=-1,$$

откуда

$$\varphi=-\frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

Так как y отрицательно, то $\sin\varphi$ должен быть тоже отрицательным, следовательно, нужно взять $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. Итак, полярные координаты данной точки суть:

$$r=\sqrt{2}, \quad \varphi=-\frac{\pi}{4}.$$

Пример 2. Дано уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$; написать его в полярных координатах.

Заменяя x и y по формулам (13) и (14), получим:

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=a^2,$$

или

$$r^2=a^2,$$

откуда

$$r=a.$$

Пример 3. Дано уравнение $r=2a\cos\varphi$; написать его в декартовых координатах.

Замечая, что

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ и } \cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

получим: $x^2+y^2=2ax$ или $x^2+y^2-2ax=0$, т. е. $(x-a)^2+y^2=a^2$. Очевидно, это уравнение изображает окружность радиуса a с центром в точке $(a, 0)$. Следовательно, данное уравнение изображает ту же окружность в полярных координатах, причём полюс лежит на окружности и полярная ось направлена по диаметру.

§ 9. Классификация линий. Так как в аналитической геометрии линии изображаются уравнениями, то в основу их классификации естественно положить свойства уравнений этих линий. В основу классификации линий мы положим свойства их уравнений в декартовых координатах. Перенося все члены уравнения в левую часть, мы придадим ему вид

$$F(x, y)=0, \tag{17}$$

где F есть символ функции от двух переменных x, y. *Если уравнение* (17) [*т. е. функция* $F(x, y)$]—*трансцендентное, то и линия, им изображаемая, называется трансцендентной; если же уравнение* (17)—*алгебраическое, то и линия, им изображаемая, называется алгебраической.* Например, линия, изображаемая уравнением

$$y=\sin x,$$

— трансцендентная; уравнение же

$$x^3+y^3-3axy=0$$

изображает алгебраическую линию. Так как одна и та же линия может быть изображена бесчисленным множеством различных уравнений, смотря по тому, к какой системе координат мы относим её уравнение, то, чтобы оправдать возможность указанной классификации линий на алгебраические и трансцендентные, необходимо показать, что *алгебраический или трансцендентный характер линии не зависит от положения осей координат.* Но действительно, так как формулы преобразования координат суть алгебраические, то всякое алгебраическое уравнение при любом преобразовании координат переходит в алгебраическое; отсюда уже следует, что трансцендентное уравнение при любом преобразовании координат переходит в трансцендентное же, так как если бы трансцендентное уравнение перешло в алгебраическое, то путём обратного преобразования алгебраическое уравнение переходило бы в трансцендентное, что невозможно.

Итак, алгебраический или трансцендентный характер линии (или, что то же, её уравнения) не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от структуры самой линии.

Далее, всякое алгебраическое уравнение можно освободить от радикалов и дробей, если таковые в нём имеются. Таким образом, уравнение алгебраической линии можно привести к виду

$$\sum Ax^sy^t=0,$$

т. е. левая часть такого уравнения есть сумма членов вида Ax^sy^t, где A есть постоянное число, s и t—целые положительные числа (или нули). Говоря кратко, левая часть уравнения алгебраической линии есть целый многочлен.

Каждый член Ax^sy^t многочлена имеет определённое измерение, равное сумме показателей при x и y, т. е. $s+t$. Наивысшее из измерений всех членов уравнения называется *степенью* этого уравнения. *Если алгебраическая линия изображается в декартовых координатах уравнением n-й степени, то она называется линией n-го порядка.*

Так, в предыдущем примере мы имели линию 3-го порядка; всякая прямая линия изображается в декартовых координатах уравнением первой степени, и, следовательно, прямая линия есть линия 1-го порядка; наконец, окружность, эллипс, гипербола и парабола суть линии 2-го порядка, потому что они изображаются в декартовых координатах уравнениями второй степени. Чтобы это деление алгебраических линий по их порядкам было законным, необходимо показать, что оно не зависит от выбора осей координат, т. е. что *порядок линии остаётся неизменным при любом преобразовании координат.* В самом деле, формулы преобразования декартовых координат в декартовы же, как мы в своё время отметили, являются линейными, т. е. первой степени. Следовательно, заменяя в алгебраическом уравнении n-го порядка x и y их выражениями первой степени через X и Y, мы не можем повысить порядок уравнения, т. е., обозначая через n' степень преобразованного уравнения, мы имеем:

$$n'\leqslant n. \tag{18}$$

С другой стороны, путём обратного преобразования мы переходим от нового уравнения степени n' к старому степени n, и следовательно, так как степень уравнения не может повыситься, то должно быть:

$$n\leqslant n'. \tag{19}$$

Из сопоставления этих неравенств заключаем: $n = n'$, т. е. *порядок уравнения не изменяется при преобразовании декартовых координат*. Итак, порядок алгебраической линии не зависит от выбора осей координат, а зависит лишь от свойств самой линии.

В указанной классификации линий весьма существенным является то обстоятельство, что в основу положена декартова система координат. Эта классификация теряет всякий смысл, если пользоваться полярными координатами. В самом деле, мы видели на примере в § 8, что окружность в полярных координатах может быть изображена двумя уравнениями:

$$r = a$$

и

$$r = 2a\cos\varphi,$$

смотря по выбору полюса и полярной оси. Первое из написанных уравнений относительно текущих координат r и φ есть алгебраическое и первой степени, второе же — трансцендентное. Таким образом, в полярных координатах одна и та же линия может изображаться как алгебраическим, так и трансцендентным уравнением, смотря по выбору полюса и полярной оси. Вследствие этого нельзя классифицировать линии на основе их уравнений в полярных координатах.

Упражнения

1. Координаты точки относительно некоторой системы координат суть $x = 2$, $y = -1$. Чему будут равны координаты этой точки, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку:

a) (4, 5); b) (4, −5); c) (−4, 5); d) (−4, −5)?

2. Относительно двух систем координат, имеющих одно и то же направление осей, координаты некоторой точки суть (12, −7) и (0, 15). Чему равны координаты начала каждой из этих систем относительно другой?

3. При замене осей координат новыми, имеющими те же направления, что и оси прежней системы, координаты точки (5, 2) обращаются в (2, 5). Найти координаты начала каждой из этих систем относительно другой.

4. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй суть (7, −5). Чему равны координаты начала второй системы относительно первой?

5. Некоторая линия выражается уравнением $4x^2 - 5xy + y^2 + x + 5y - 3 = 0$. Каким уравнением выразится та же линия, если прежняя система координат будет заменена новой, начало которой определяется координатами (3, 5), а оси параллельны прежним осям?

6. Дано уравнение $x^2 - y^2 - 2x + y = 0$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало членов первого измерения, а также начертить кривую, выражаемую этим уравнением.

7. Как изменятся координаты любой точки $M(x, y)$, если: a) изменить на противоположное направление на оси ординат; b) изменить на противоположные направления на обеих осях?

8. Как изменятся координаты любой точки $M(x, y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат и за ось ординат ось абсцисс?

9. Чему будут равны координаты точки $M(1, \sqrt{3})$, если повернуть оси координат на угол в 60°?

10. На какой угол надо повернуть оси координат, чтобы координаты точки $M(2, 0)$ стали равны между собой?

11. Какой вид примет уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$, если систему координат повернуть на произвольный угол α?

12. Какой вид примет уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, если систему координат повернуть на угол в 45°?

13. Какой вид примет уравнение гиперболы $xy = 1$, если систему координат повернуть на угол в 45°?

14. Дано уравнение $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало члена с произведением координат, а также начертить кривую, выражаемую данным уравнением.

15. Дано уравнение $x^2 + xy + y^2 - x + 2y - 9 = 0$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало членов первого измерения и члена с произведением текущих координат, а также начертить кривую, выражаемую данным уравнением.

16. Дано уравнение $y = 4x^2 - 8x + 5$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало члена с первой степенью x и свободного члена; начертить кривую.

17. То же для уравнения $y = -3x^2 + 5x$.

18. Дано уравнение $y = \dfrac{2x+3}{x+4}$. Преобразовать его так, чтобы оно не содержало членов первого измерения; начертить кривую.

19. Даны следующие кривые:

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$; b) $x^2 - y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$;

c) $y^2 - 8y = 4x$; d) $x^2 + 6x + 5 = 2y$.

Упростить их уравнения, применив перенос начала координат; начертить новые оси и кривые.

20. Поворотом осей на угол $\varphi = 45°$ упростить уравнения следующих линий и построить новые оси и кривые:

a) $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 32$; b) $x^2 - 6xy + y^2 = 0$;

c) $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 8 = 0$;

21. Найти координаты точки $A(0, 1)$ относительно новой системы координат, оси которой даны уравнениями $3x - 4y + 6 = 0$, $4x + 3y - 17 = 0$.

22. Найти координаты точки $A(-2, 0)$ относительно новой системы координат, оси которой даны уравнениями $12x - 5y - 2 = 0$, $5x + 12y - 29 = 0$.

23. Найти прямоугольные координаты точек, полярные координаты которых следующие:

$$A\left(r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}\right);\quad B\left(r=4,\ \varphi=\frac{\pi}{3}\right);$$

$$C\left(r=4\sqrt{2},\ \varphi=\frac{3\pi}{4}\right);\quad D\left(r=2,\ \varphi=-\frac{\pi}{6}\right);$$

24. Найти полярные координаты точек, прямоугольные координаты которых следующие:

$$A(3,\ -2),\quad B(-1,\ -1),\quad C(3,\ 0),\quad D(0,\ -4).$$

25. Написать уравнение циссоиды $x^2=y^2(2a-x)$ в полярных координатах.

26. Написать уравнения кривых: a) $r=m+2a\cos\varphi$ (улитка Паскаля); b) $r=a\sin 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза) в прямоугольных координатах.

27. Какого порядка алгебраическая кривая, выражаемая уравнением $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1$?

28. Какие из нижеписанных уравнений выражают алгебраические кривые и какие трансцендентные:

a) $x^a+y^b+1=0$; b) $a^x+b^y+1=0$;

c) $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$; d) $\alpha\cos x+\beta\cos y-p=0$

(количества a, b, α, β — постоянные)?

29. Даны уравнения кривых в полярных координатах:

a) $r=a\cos\varphi$; b) $r=a+\frac{b}{\cos\varphi}$; c) $r=a(1+\cos\varphi)$;

Показать, что они выражают алгебраические кривые.

ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го и 3-го ПОРЯДКА

§ 1. Определители 2-го порядка. Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Чтобы найти решение системы (1), исключим сначала неизвестное y посредством уравнения коэффициентов при нём и вычитания одного уравнения из другого. Умножая первое уравнение на b_2 и второе на b_1, а затем вычитая второе уравнение из первого, получим:

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad (2)$$

Аналогично исключим неизвестное x из системы (1) и найдём:

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \qquad (3)$$

Если

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

то из уравнений (2) и (3) получим определённое решение системы (1):

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (4)$$

Числитель и знаменатель полученных выражений называются определителями 2-го порядка. Вообще, если имеются четыре числа, расположенных в виде квадратной таблицы

$$A_1,\ B_1,$$
$$A_2,\ B_2,$$

то *определителем 2-го порядка*, соответствующим этой таблице, называется разность

$$A_1B_2-A_2B_1.$$

Для обозначения определителя принимают символ

$$A_1B_2-A_2B_1=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Числа A_1, A_2, B_1, B_2 называют *элементами определителя* (5); значок указывает номер строки, а алфавитный порядок буквы — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент. Элементы A_1, B_2 образуют *главную диагональ* определителя. Из формулы (5) явствует, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\quad\text{и}\quad\begin{vmatrix} B_1 & A_1\\ B_2 & A_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},$$

т. е. при замене строк столбцами величина определителя 2-го порядка не меняется, а при перестановке столбцов — меняет

знак на обратный. Очевидно, решение (4) системы (1) может быть выражено через определители таким образом:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (4')$$

Определитель, стоящий в знаменателе, составлен из коэффициентов при неизвестных системы (1) и носит название *определителя этой системы*. Определители, стоящие в числителях формул (4′), получаются из определителя системы путём замены соответственно первого и второго столбцов свободными членами этой системы.

Итак, если определитель системы (1) не равен нулю, то формулы (4′) дают единственное решение этой системы, причём значение неизвестного равно дроби, в знаменателе которой стоит определитель системы, в числителе же определитель, получающийся из определителя системы заменой коэффициентов при определяемом неизвестном свободными членами системы (стоящими в правой части).

Если определитель системы равен нулю, но по крайней мере один из определителей, стоящих в числителях выражений (4′) для x и y, отличен от нуля, то система (1) несовместна, т. е. не имеет никакого решения, как это следует из уравнений (2), (3). Наконец, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0,$$

то система (1) неопределённа, т. е. имеет бесконечное множество решений. В этом случае одно из уравнений (1) есть следствие другого. В самом деле, мы имеем:

$$a_1b_2=a_2b_1, \quad c_1b_2=c_2b_1, \quad a_1c_2=a_2c_1,$$

или

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

откуда вытекает, что одно из уравнений системы (1) есть следствие другого. Отмеченные три возможных случая для системы (1): a) система (1) имеет единственное решение, b) система (1) несовместна, c) система (1) неопределённа, могут быть истолкованы геометрически, если рассматривать уравнения (1) как

уравнения двух прямых линий. В первом случае две прямые пересекаются в определённой точке, координаты которой представляют решение системы (1); во втором случае прямые параллельны; наконец, в третьем случае они сливаются друг с другом.

Пример 1. Решить систему

$$2x+3y-8=0; \quad x-2y+3=0.$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7$ отличен от нуля, и следовательно, система имеет единственное решение. Чтобы найти его, перенесём свободные члены направо и воспользуемся формулами (4′):

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-7}=1, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-14}{-7}=2.$$

Пример 2. Решить систему

$$3x+y=1, \quad 6x+2y=5.$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=6-6=0$, причём определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=9$ отличен от нуля; следовательно, данная система несовместна, в чём убедимся непосредственно, если умножим первое уравнение на 2.

Пример 3. Решить систему

$$x-2y=3, \quad 2x-4y-6=0.$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0$, причём оба определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ тоже равны нулю; следовательно, данная система неопределённа. Действительно, сокращая второе уравнение на 2, видим, что система приводится к одному уравнению

$$x-2y=3$$

и, следовательно, имеет бесконечное множество решений:

$$x=2y+3,$$

где y может принимать произвольное значение.

В частности, однородная система

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0, \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

либо имеет определённое решение, либо неопределённа, так как для неё второй случай невозможен. Другими словами, система (6) имеет одно решение $x = y = 0$ (назовём его нулевым решением), если её определитель отличен от нуля. Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

то одно из уравнений (6) есть следствие другого; система (6) приводится к одному уравнению, например,

$$a_1x + b_1y = 0,$$

и имеет бесконечное множество решений, определяемых с точностью до произвольного множителя k: $x = kb_1$, $y = -ka_1$, и отличных от нулевого решения при $k \neq 0$. Геометрически уравнениям (6) соответствуют две прямые линии, проходящие через начало координат, которые либо различны и имеют единственную общую точку в начале координат, либо совпадают.

§ 2. **Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными.** Рассмотрим систему двух однородных уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Перенося члены с z в правую часть и решая уравнения относительно x и y, получим на основании (4′):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z.$$

Следовательно, систему (7) можно переписать в виде

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (8)$$

причём предполагается, что по крайней мере один из определителей, стоящих в знаменателе, отличен от нуля. Очевидно, система (7) будет иметь бесконечное множество решений; все они могут быть записаны в виде:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \qquad (9)$$

где k есть произвольный множитель пропорциональности. Если взять $k \neq 0$, то получим решение системы, отличное от очевидного нулевого решения $x = y = z = 0$, получающегося при $k = 0$. Заметим, что определители формулы (8), которым пропорциональны неизвестные системы (7), получаются из таблицы коэффициентов этой системы

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix}$$

путём вычёркивания соответствующего столбца, при этом для среднего неизвестного необходимо ещё переставить столбцы в полученном определителе.

Если все три определителя, стоящие в знаменателях отношений (8), равны нулю, то соответствующие коэффициенты уравнений (7) будут пропорциональны, и следовательно, система (7) приведётся к одному уравнению

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

откуда, считая, например, $a \neq 0$, получим:

$$x = -\frac{b_1y + c_1z}{a_1},$$

где y и z могут принимать любые значения.

Пример 1. Решить систему $x + 2y - 3z = 0$, $2x + 3y + z = 0$.
Составляем таблицу из коэффициентов данной системы:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & -3 \\ 2, & 3, & 1 \end{matrix}$$

и, вычёркивая поочерёдно столбцы, образуем определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

(в среднем определителе меняем порядок столбцов). Согласно формулам (9) решение системы будет:

$$x = 11k, \quad y = -7k, \quad z = -k,$$

где k произвольно.

Пример 2. Решить систему

$$2x - y - 5z = 0, \quad 4x - 2y - 10z = 0.$$

Составляя таблицу из коэффициентов

$$\begin{matrix} 2, & -1, & -5 \\ 4, & -2, & -10 \end{matrix}$$

и вычёркивая поочерёдно столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, данная система приводится к одному уравнению:

$$2x - y - 5z = 0,$$

в чём убеждаемся непосредственно, если сократим на 2 второе уравнение. Решение системы будет:

$$y = 2x - 5z,$$

где x и z могут принимать произвольные значения.

§ 3. Определители 3-го порядка. Рассмотрим систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Чтобы решить эту систему, исключим из уравнений (10) два неизвестных, например, y и z, следующим образом. Умножим данные уравнения почленно на l, m, n и, сложив, определим введённые множители так, чтобы коэффициенты при y и z были равны нулю. Таким образом, сперва получим:

$$(a_1l + a_2m + a_3n)\,x + (b_1l + b_2m + b_3n)\,y + (c_1l + c_2m + c_3n)\,z = d_1l + d_2m + d_3n.$$

Положив

$$\left.\begin{aligned} b_1l + b_2m + b_3n &= 0, \\ c_1l + c_2m + c_3n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

получим уравнение

$$(a_1l + a_2m + a_3n)\,x = d_1l + d_2m + d_3n. \qquad (12)$$

Из уравнений (11) определим l, m, n с точностью до общего множителя; мы можем принять (§ 2):

$$l = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Внося эти значения в уравнение (12), получим в результате уравнение, содержащее одно неизвестное x:

$$\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}x = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Коэффициент при x

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

назовём *определителем 3-го порядка*, соответствующим квадратной таблице из девяти элементов

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix} \qquad (15)$$

и обозначим его символически так:

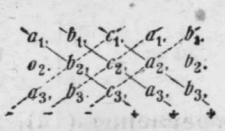
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Если заменить определители 2-го порядка их выражениями, то получим окончательно для определителя 3-го порядка следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \qquad (16)$$

Можно указать простое правило составления последнего выражения. Для этого напишем таблицу (15), приписывая к ней справа ещё раз первый и второй столбцы. Таким образом, получим прямоугольную таблицу



(17)

с шестью диагоналями, содержащими по три элемента. Составим произведения элементов, стоящих на каждой из этих диагоналей, и возьмём эти произведения диагоналей, параллельных главной диагонали, составленной из элементов a_1, b_2, c_3, перечёркнутых сплошной чертой, со знаком +, а для диагоналей, перечёркнутых пунктиром, параллельных побочной диагонали, со знаком —. Алгебраическая сумма этих шести произведений даёт, как это усматриваем из выражения (16), определитель 3-го порядка, соответствующий квадратной таблице (15).

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix};$$

Согласно определению (14) имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 - 11 - 2 = -27;$$

§ 4. Основные свойства определителей 3-го порядка.

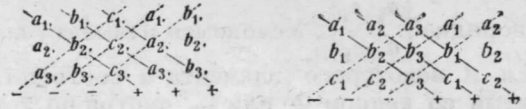
I. *При замене строк столбцами величина определителя не меняется (равноправность строк и столбцов).*

Это свойство может быть выражено так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Справедливость этого свойства легко проверить, вычисляя

определители, стоящие в левой и правой частях равенства, согласно схеме (17):



В самом деле, мы усматриваем, что в обоих случаях диагонали, перечёркнутые сплошной чертой, как и диагонали, перечёркнутые пунктиром, будут давать одни и те же произведения. Следовательно, в определителе строки вполне равноправны со столбцами, и все остальные свойства будут иметь место как по отношению к строкам, так и по отношению к столбцам.

II. *При перестановке двух столбцов (или строк) определитель лишь меняет знак.*

Так, например, переставляя первый и второй столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство легко проверить, пользуясь схемой (17). Действительно, при перестановке двух столбцов диагонали, перечёркнутые сплошной чертой, займут место диагоналей, перечёркнутых пунктиром, и обратно, что равносильно изменению знака определителя.

III. *Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.*

В самом деле, с одной стороны, при перестановке одинаковых столбцов определитель не изменяется; с другой же стороны, в силу свойства II он должен переменить знак, т. е. если через Δ обозначим величину определителя, то $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

Чтобы установить дальнейшие свойства определителей, введём предварительно некоторые новые понятия. Если из определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

вычеркнуть одну строку и один столбец, на пересечении которых стоит некоторый элемент, то получится определитель 2-го

порядка, который называется *минором* определителя Δ, соответствующим этому элементу. Так, например, минором определителя Δ, соответствующим элементу b_3, будет определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Условимся называть *алгебраическим дополнением* A некоторого элемента a соответствующий ему минор, взятый со знаком + или —, смотря по тому, будет ли сумма номеров строки и столбца, которым принадлежит данный элемент, чётным или нечётным числом. Так, например, алгебраическое дополнение элемента b_3 будет:

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Располагая сумму, стоящую в правой части формулы (16), по элементам, например, первого столбца, получим:

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

или

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

где A_i есть алгебраическое дополнение элемента a_i.

Легко проверить, что аналогичная формула имеет место и по отношению к любому столбцу, а значит, и к любой строке. Итак, получаем *разложение определителя по элементам некоторого ряда* (строки или столбца):

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, & \Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \\ \Delta &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, & \Delta &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \\ \Delta &= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, & \Delta &= a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

где большими буквами обозначены алгебраические дополнения элементов, обозначенных соответственными малыми буквами.

Если в определителе Δ заменим, например, элементы первого столбца a_1, a_2, a_3 элементами второго столбца b_1, b_2, b_3, то при этой замене алгебраические дополнения A_1, A_2, A_3, не содержащие элементов первого столбца, не изменятся, а потому, если в правой части первой формулы (18) вместо a_1, a_2, a_3 подставить элементы b_1, b_2, b_3, то сумма будет равна определителю, у которого первый и второй столбцы одинаковы, т. е. будет равна нулю:

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0.$$

Поступая аналогично, получим из первых трёх формул (18) следующую группу формул:

$$\left.\begin{aligned} b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 &= 0, & c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 &= 0; \\ a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 &= 0, & c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 &= 0; \\ a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 &= 0, & b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (18')$$

а из последних трёх:

$$\left.\begin{aligned} a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 &= 0, & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 &= 0, \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= 0, & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 &= 0, \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 &= 0, & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (19')$$

Написанные формулы (18), (19) и (19′) выражают следующее свойство определителя:

IV. *Сумма произведений элементов некоторого ряда (столбца или строки) на алгебраические дополнения этих элементов равна определителю, а сумма произведений элементов некоторого ряда (столбца или строки) на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда (столбца или строки) равна нулю.*

V. *Множитель, общий элементам некоторого ряда (столбца или строки), можно выносить за знак определителя.*

VI. *Определитель равен нулю, если все элементы некоторого его ряда (столбца или строки) равны нулю.*

Последние два свойства непосредственно вытекают из формул (18), определяющих разложение определителя по элементам одного из его рядов.

Столь же просто доказывается и следующее свойство.

VII. *Если элементы некоторого ряда (столбца или строки) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, у которых элементы рассматриваемого ряда равны соответственным слагаемым.*

Это свойство, очевидно, распространяется на любое число слагаемых. Чтобы доказать это свойство, предположим, например, что

$$a_1 = a_1' + a_1'', \quad a_2 = a_2' + a_2'', \quad a_3 = a_3' + a_3''.$$

Подставляя эти выражения в первую из формул (18), получим:

$$\Delta = (a_1'A_1 + a_2'A_2 + a_3'A_3) + (a_1''A_1 + a_2''A_2 + a_3''A_3) = \Delta' + \Delta''.$$

Очевидно, Δ' представляет определитель, получающийся из

определителя Δ, если в нём элементы первого столбца заменить через a_1', a_2', a_3'; определитель же Δ'' получится из определителя Δ после замены элементов первого столбца на a_1'', a_2'', a_3''.

VIII. *Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда (столбца или строки) прибавить (или от них вычесть) элементы параллельного ряда (столбца или строки), предварительно умножив эти последние на один и тот же множитель* l.

В самом деле, заменим элементы, например, первой строки, соответственно, через $a_1 + la_2$, $b_1 + lb_2$, $c_1 + lc_2$. Вследствие последнего свойства полученный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей. Первый из них будет иметь первую строку a_1, b_1, c_1, т. е. будет равен исходному определителю Δ. Первая же строка второго определителя будет la_2, lb_2, lc_2, и, вынося l за знак определителя (V), получим определитель с двумя одинаковыми строками; следовательно, второй определитель равен нулю (VI); вся же сумма равна исходному определителю Δ.

Пользуясь последним свойством, можно все элементы некоторого ряда, кроме одного, сделать равными нулю, не изменяя при этом величины определителя. Разлагая затем определитель по элементам этого ряда, приведём данный определитель 3-го порядка к одному определителю 2-го порядка. Действительно, пусть в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

элемент a_1 отличен от нуля. Вычтем из элементов второго столбца элементы первого столбца, умножив их предварительно на $\frac{b_1}{a_1}$; и из элементов третьего столбца—элементы первого столбца, умноженные на $\frac{c_1}{a_1}$. При таких преобразованиях, в силу свойства VIII, величина определителя не изменится и мы получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & m_2 & n_2 \\ a_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix},$$

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из элементов второго столбца элементы первого, умноженные на 2, а из элементов третьего столбца—элементы первого столбца, умноженные на 5, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -8.$$

Непосредственное вычисление данного определителя путём разложения его по элементам некоторого ряда потребовало бы несколько бо́льших выкладок и сводилось бы к следующему. Применяя, например, первую из формул (18), получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(-23) - (-10) + 4 \cdot 7 = -8.$$

§ 5. Система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными. К понятию определителя 3-го порядка мы пришли, поставив задачу о решении системы трёх уравнений с тремя неизвестными. Возвращаясь к этой задаче, рассмотрим систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

и предположим, что *определитель этой системы*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Умножим уравнения (20) почленно на A_1, A_2, A_3 и сложим. В силу формулы (18,1) коэффициент при x будет равен Δ, а в силу формул (19,1—2) коэффициенты при y и z будут равны нулю. Поступая аналогично, исключим x и z или x и y. Таким образом, из системы (20) вытекает следующая система:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3, \\ \Delta y &= d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3, \\ \Delta z &= d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Легко показать, что, обратно, система (20) есть следствие системы (21). В самом деле, умножая уравнения (21) почленно на a_1, b_1, c_1 и складывая, получим вследствие формул (18,1) и (19,3,5):

$$\Delta(a_1x+b_1y+c_1z)=d_1\Delta.$$

Сокращая на множитель Δ, отличный от нуля, получим первое из уравнений (20). Аналогично можно получить и остальные два уравнения.

Итак, мы показали, что системы (20) и (21) равносильны, если определитель Δ отличен от нуля. Из уравнений системы (21) находим:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\Delta}, \quad y=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\Delta},\\ z&=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Сумма $d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$ получается из суммы $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$, равной определителю Δ, заменой a_1, a_2, a_3 на d_1, d_2, d_3, т. е. эта сумма равна определителю, который получится из Δ, если в нём элементы первого столбца заменить на d_1, d_2, d_3. Аналогичное заключение имеет место относительно числителей в выражениях y и z. Таким образом, формулы (22) в более подробном виде запишутся так:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}; \qquad (22')$$

и мы приходим к следующему предложению: если определитель системы (20) отличен от нуля, то эта система имеет одно определённое решение, получаемое по формулам (22′). В знаменателе дробей, выражающих x, y, z, находится определитель Δ данной системы, а в числителях — определители 3-го порядка, которые получаются из Δ заменой коэффициентов при соответствующем неизвестном свободными членами (стоящими в правых частях).

Пример. **Решить систему**

$$2x-3y+z+1=0, \quad x+y+z=6, \quad 3x+y-2z=-1.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-23$$

отличен от нуля; следовательно, система имеет единственное решение. Согласно формулам (22′) будем иметь:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ 6 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ 7 & 4 & 0\\ -3 & -5 & 0\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 4\\ -3 & -5\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-23}{-23}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 7 & 1\\ 7 & -3 & -2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 7\\ 7 & -3\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-46}{-23}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-23}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -13\\ 1 & 1 & 6\\ 0 & -2 & -19\end{vmatrix}}{-23}=-\frac{\begin{vmatrix} -5 & -13\\ -2 & -19\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-69}{-33}=3.$$

§ 6. Однородная система. Перейдём теперь к исследованию системы однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} X_1&\equiv a_1x+b_1y+c_1z=0,\\ X_2&\equiv a_2x+b_2y+c_2z=0,\\ X_3&\equiv a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

причём для сокращения письма мы через X_1, X_2, X_3 обозначаем левые части уравнений. Исследование разобьём на три случая.

I. Если определитель Δ системы (23) отличен от нуля, то эта система будет иметь одно определённое решение согласно § 5. В нашем случае это будет очевидное решение $x=y=z=0$, которое называют *нулевым решением*.

II. Предположим, что определитель Δ системы (23) равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля. Устанавливая надлежащим образом порядок уравнений и неизвестных в системе (23), можно всегда достигнуть того, чтобы минор, отличный от нуля, стоял в левом верхнем углу определителя Δ. Итак, не уменьшая общности, мы можем считать

$$\Delta=0; \quad \delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Рассмотрим определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix},$$

где x, y, z, входящие в X_1, X_2, X_3, обозначают любые числа.

Заменяя X_1, X_2, X_3 их выражениями, мы можем вследствие свойств V и VII (§ 3) представить определитель D в виде суммы трёх определителей:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z.$$

Определители, стоящие при x и y, равны нулю, так как имеют по два одинаковых столбца, а определитель, стоящий при z, есть определитель Δ, равный нулю по условию, т. е. имеет место тождество относительно x, y, z:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Разлагая последний определитель по элементам последнего столбца, видим, что это тождество выражает линейную зависимость между X_1, X_2, X_3, причём коэффициент при X_3, очевидно, равен δ и заведомо отличен от нуля:

$$\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\delta X_3=0, \tag{24'}$$

где α_1 и α_2 суть алгебраические дополнения элементов X_1, X_2.

Это тождество показывает, что третье из уравнений (23) есть следствие первых двух. В самом деле, если при некоторых значениях x, y, z мы будем иметь $X_1=X_2=0$, то из тождества (24′) и условия $\delta\neq 0$ вытекает, что и $X_3=0$ для этих значений x, y, z.

Таким образом, в рассматриваемом случае остаётся решить совместно первые два уравнения системы (23). Согласно формулам (9) решение будет:

$$x=k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad y=k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad z=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$x=kA_3,\quad y=kB_3,\quad z=kC_3,$$

где k есть произвольный множитель. Если $k\neq 0$, то $z\neq 0$ и получаемое решение отлично от нулевого.

III. Предположим, наконец, что определитель Δ и все его миноры равны нулю. Не уменьшая общности, можем считать, что коэффициент a_1 отличен от нуля. Рассмотрим два определителя 2-го порядка:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix}.$$

Каждый из этих определителей можно представить в виде суммы трёх определителей (§ 4):

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} z.$$

Непосредственно видно, что определители, стоящие при x, равны нулю. Кроме того, равны нулю также и определители, стоящие при y и z, так как по условию все миноры определителя Δ равны нулю. Следовательно,

$$D_1\equiv 0,\quad D_2\equiv 0.$$

Итак, в рассматриваемом случае будут иметь место два тождества относительно x, y, z:

$$\begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_2 & X_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & X_1 \\ a_3 & X_3 \end{vmatrix}=0, \tag{25}$$

или

$$a_1X_2-a_2X_1=0,\quad a_1X_3-a_3X_1=0. \tag{25'}$$

Эти тождества показывают, что последние два из уравнений (23) суть следствия первого. В самом деле, из тождеств (25′) и условия $a_1\neq 0$ вытекает, что если $X_1=0$, то и $X_2=X_3=0$. Итак, в рассматриваемом случае достаточно решить одно первое уравнение, и мы получим решение системы (23) в виде

$$x=-\frac{b_1y+c_1z}{a_1},$$

а значения y и z остаются произвольными.

Резюмируя исследования этого параграфа, приходим к следующему предложению.

Для того чтобы однородная система (23) *имела решения, отличные от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю. Если этот определитель равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то одно из уравнений системы есть следствие двух других. Если же не только определитель системы* (23), *но и все его миноры равны нулю, то система приводится к одному уравнению.*

Пример 1. Решить систему

$$2x-3y+z=0, \qquad x+y+z=0, \qquad 3x+y-2z=0.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-23$$

отличен от нуля. Следовательно, данная система имеет единственное нулевое решение.

Пример 2. Решить систему

$$x+y+z=0, \qquad 3x-y+2z=0, \qquad x-3y=0.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Минор определителя Δ, например

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4,$$

отличен от нуля. Следовательно, третье уравнение данной системы есть следствие двух первых, и достаточно решить совместно два первые уравнения. Решая их, найдём (§ 2):

$$x=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3k, \quad y=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=k, \quad z=k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4k,$$

где k произвольно.

Пример 3. Решить систему

$$x-y+z=0, \qquad 2x-2y+2z=0, \qquad 3x-3y+3z=0.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Все миноры определителя Δ тоже равны нулю. Следовательно, система приводится к одному уравнению, что непосредственно становится ясным, если сократить вторсе уравнение на 2 и третье на 3. Чтобы найти решения системы, достаточно разрешить лишь первое уравнение, и получаем:

$$y=x+z,$$

где x и z остаются произвольными.

§ 7. Общее исследование системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными. Обращаясь теперь к исследованию неоднородной системы

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\equiv a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ X_2 &\equiv a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ X_3 &\equiv a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

рассмотрим отдельно ряд случаев.

I. Если определитель Δ этой системы отличен от нуля, то система эта имеет единственное решение, выражаемое формулами (22′) (§ 5).

II. Предположим, что определитель Δ равен нулю, но по крайней мере один из его миноров, за который мы можем принять, не уменьшая общности,

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

отличен от нуля. В этом случае, как мы видели в § 6, левые части уравнений (26) связаны линейной зависимостью (24). Отсюда вытекает, что если система (26) допускает решение, то и правые части d_1, d_2, d_3 уравнений этой системы должны удовлетворять той же линейной зависимости, т. е. должно быть:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

Итак, случай II подразделяется на два:

II_1. Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (26) несовместна, т. е. не имеет никакого решения.

II_2. Если же

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то будут иметь место два равенства:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \delta X_3 = 0,$$
$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \delta d_3 = 0,$$

из которых первое выполняется тождественно относительно x, y, z, как это было установлено в § 6, а второе представляет выражение данного условия II_2 разложенным по элементам последнего столбца.

Вычитая из первого равенства второе, получаем тождество

$$\alpha_1 (X_1 - d_1) + \alpha_2 (X_2 - d_2) + \delta (X_3 - d_3) = 0,$$

откуда усматриваем, что третье из уравнений (26), а именно $X_3 - d_3 = 0$, есть следствие первых двух: $X_1 - d_1 = 0$, $X_2 - d_2 = 0$. Чтобы найти решение системы (26), остаётся решить совместно первые её два уравнения, которые можно переписать в виде

$$a_1 x + b_1 y = d_1 - c_1 z,$$
$$a_2 x + b_2 y = d_2 - c_2 z.$$

Таким образом, решение этой системы, а следовательно, и системы (26) будет вида

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}}{\delta},$$

где z остаётся произвольным.

III. Пусть, наконец, определитель Δ и все его миноры равны нулю. Не уменьшая общности, можно считать $a_1 \neq 0$.

В этом случае, как было показано в § 6, будут иметь место две линейные зависимости (25) между левыми частями уравнений (26). Если данная система допускает решение, то и правые части d_1, d_2, d_3 должны удовлетворять тем же зависимостям, а именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

и случай III подразделяется на два:

III_1. Если хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система (26) несовместна, т. е. не имеет решений.

III_2. Если же одновременно

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то будут иметь место равенства:

$$a_1 X_2 - a_2 X_1 = 0, \quad a_1 X_3 - a_3 X_1 = 0,$$
$$a_1 d_2 - a_2 d_1 = 0, \quad a_1 d_3 - a_3 d_1 = 0,$$

из которых первые два выполняются тождественно относительно x, y, z, как это было установлено в § 6, а вторые два выражают условия разбираемого случая III_2.

Из последних равенств попарным вычитанием получаем

$$a_1 (X_2 - d_2) - a_2 (X_1 - d_1) = 0, \quad a_1 (X_3 - d_3) - a_3 (X_1 - d_1) = 0,$$

откуда мы усматриваем, что последние два из уравнений (26) суть следствия первого уравнения.

Таким образом, система (26) приводится к одному первому уравнению; решая его относительно x, получим решения системы (26):

$$x = \frac{d_1 - b_1 y - c_1 z}{a_1},$$

а y и z остаются произвольными.

Резюмируя исследования настоящего параграфа, приходим к следующим предложениям:

Если определитель Δ *неоднородной системы* (26) *отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам* (22′).

Если определитель Δ *равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то система* (26) *либо несовместна, либо неопределённа. В первом случае среди определителей 3-го порядка, принадлежащих таблице*

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, \end{matrix} \qquad (27)$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, во втором случае все эти определители равны нулю, и система (26) *приводится к двум уравнениям.*

Если, наконец, вместе с определителем системы (26) *все его миноры равны нулю, то система* (26) *либо несовместна, либо неопределённа. В первом случае среди определителей 2-го порядка, принадлежащих таблице* (27), *есть хоть один, отличный от нуля, во втором же случае все определители 2-го порядка этой таблицы равны нулю, и система* (26) *приводится к одному уравнению.*

Пример 1. Решить систему

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=2.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

но среди его миноров есть отличный от нуля, например: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2.$

Среди определителей 3-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 2 \end{matrix}$$

имеется определитель, отличный от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2.$$

Следовательно, данная система не имеет решения, что непосредственно очевидно, если сложить первые два уравнения и сравнить результат с третьим уравнением.

Пример 2. Решить систему

$$x+y+z=5, \quad x-y+z=1, \quad x+z=3.$$

Определитель системы—тот же, что и в предыдущем примере, следовательно, $\Delta=0$, но среди его миноров есть отличный от нуля. Определители 3-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 5 \\ 1, & -1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 3 \end{matrix}$$

все равны нулю. Следовательно, данная система приводится к двум уравнениям, что непосредственно становится ясным, если сложим первые два уравнения.

Решая совместно первые два уравнения, получим:

$$x+z=3, \quad y=2, \quad \text{или} \quad x=3-z, \quad y=2,$$

где z произвольно.

Пример 3. Решить систему

$$2x+y+z=4, \quad 4x+2y+2z=5, \quad 6x+3y+3z=10.$$

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Все его миноры тоже равны нулю. Среди определителей 2-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 2, & 1, & 1, & 4 \\ 4, & 2, & 2, & 5 \\ 6, & 3, & 3, & 10 \end{matrix}$$

есть отличный от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-3$. Следовательно, данная система несовместна, в чём убеждаемся непосредственно, умножив первое уравнение на 2 или на 3.

Пример 4. Решить систему

$$2x+y+z=4, \quad 4x+2y+2z=8, \quad 6x+3y+3z=12.$$

Определитель системы—тот же, что и в предыдущем примере; значит $\Delta=0$ и все его миноры тоже равны нулю. Определители 2-го порядка таблицы

$$\begin{matrix} 2, & 1, & 1, & 4 \\ 4, & 2, & 2, & 8 \\ 6, & 3, & 3, & 12 \end{matrix}$$

все равны нулю. Следовательно, данная система приводится к одному уравнению, в чём непосредственно убеждаемся, если сократим второе уравнение на 2, а третье на 3. Остаётся решить первое уравнение, чтобы

получить решение данной системы. Таким образом, находим:

$$z=4-2x-y,$$

где x и y произвольны.

§ 8. Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии.

1. Площадь треугольника.

В гл. 1, § 5 мы вычислили площадь S треугольника по координатам его вершин и получили формулу

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix},$$

которую можно переписать таким образом:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к элементам первых двух строк элементы третьей строки, найдём окончательно:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой.

Если три данные точки находятся на одной прямой линии, то $S=0$, и обратно. Следовательно, условием того, чтобы три данные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежали на одной прямой, будет:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Заменив в последнем условии (x_3, y_3) текущими координатами (x, y), получим уравнение первой степени:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

которое изображает прямую линию, проходящую через две данные точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Эту задачу возможно также решить помощью определителей, не прибегая к формуле для площади треугольника. Пусть уравнение искомой прямой линии будет: $Ax+By+C=0$. Так как эта прямая, согласно условию, должна проходить через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), то координаты последних должны удовлетворять уравнению прямой, т. е.

$$Ax_1+By_1+C=0, \qquad Ax_2+By_2+C=0.$$

Итак, имеем три уравнения:

$$Ax+By+C=0, \quad Ax_1+By_1+C=0, \quad Ax_2+By_2+C=0,$$

где x, y суть координаты любой точки нашей прямой. Эти уравнения являются однородными относительно неизвестных A, B, C. Эта система должна иметь решение, отличное от нулевого. Как мы знаем, необходимым и достаточным условием для этого является равенство нулю определителя системы, т. е.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Полученное уравнение первой степени относительно x, y изображает, очевидно, искомую прямую. Легко проверить, что координаты двух данных точек удовлетворяют составленному уравнению. Действительно, подставляя вместо x, y координаты данной точки, получим в левой части определитель с двумя одинаковыми строками, который, очевидно, равен нулю. Полученное уравнение можно рассматривать также, как условие того, что три точки (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой.

4. Условие, при котором три прямые пересекаются в одной точке.

Пусть три данные прямые линии

$$A_1x+B_1y+C_1=0; \quad A_2x+B_2y+C_2=0; \quad A_3x+B_3y+C_3=0$$

пересекаются в одной точке (x_0, y_0). Координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям данных прямых:

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0; \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2=0;$$
$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.$$

Эти равенства показывают, что однородная система

$$A_1x+B_1y+C_1z=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z=0$$

имеет ненулевое решение $x=x_0$, $y=y_0$, $z=1$. Следовательно, определитель этой системы должен быть равен нулю, что и даёт нам искомое условие:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

1. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

2. Решить системы:

a) $2x-z=1$, $2x+4y-z=1$, $x-8y-3z=-2$.
b) $x+y+z=a$, $x+(1+a)y+z=2a$, $x+y+(1+a)z=0$.
c) $x+y+z=0$, $2x-3y+4z=0$, $4x-11y+10z=0$.
d) $x+y+z=0$, $2x-3y+4z=0$, $5x-7y+8z=0$.
e) $x+y+z=2$, $2x-3y+4z=3$, $4x-11y+10z=5$.
f) $x-y+z=1$, $x+y-z=2$, $5x+y-z=7$.

3. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $(1,-2)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$.
4. Лежат ли три точки $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(0, 0)$ на одной прямой?
5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $(3, 2)$ и $(-1, 3)$.
6. Найти высоту треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
7. Пользуясь решением предыдущего упражнения, найти площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
8. Показать, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ равна

$$\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right].$$

При каком порядке обхода вершин выражение в скобках будет иметь знак $+$?

9. Упростить выражения:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{c)}\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

11. Найти x из уравнений:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad \text{b)}\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}=0;\quad \text{c)}\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}=0.$$

12. Доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}=a(x-y)(y-z)(z-x).$$

ГЛАВА VII

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. Общее уравнение линии 2-го порядка. *Линией 2-го порядка называется линия, уравнение которой в декартовых координатах будет второй степени относительно текущих координат.* Общее уравнение второй степени с двумя переменными имеет вид

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (1)$$

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы являются частными случаями уравнения (1). Так, если

$$A=\frac{1}{a^2},\quad B=0,\quad C=-\frac{1}{b^2},\quad D=0,\quad E=0,\quad F=-1,$$

то уравнение (1) обращается в уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Отсюда естественно возникает вопрос, не представляют ли уравнения вида (1) также какие-либо новые типы линий, кроме окружности, эллипса, гиперболы и параболы? При исследовании этого вопроса, ради симметрии формул, удобнее пользоваться иным обозначением коэффициентов уравнения (1), при котором уравнение (1) принимает следующий вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1')$$

Пример. В уравнении $x^2-xy+y^2+2x-4y=0$ коэффициенты A, B, C, D, E, F имеют значения: $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=1$, $D=1$, $E=-2$, $F=0$.

§ 2. Преобразование общего уравнения линии 2-го порядка к новому началу координат. Посмотрим, какой вид примет уравнение (1′), если начало координат будет перенесено в произвольную точку O' (x_0, y_0) плоскости, направления же осей координат останутся прежние. Обозначая через X, Y текущие координаты относительно новой системы, мы должны в уравнении (1′) заменить x и y соответственно через $X+x_0$ и $Y+y_0$.

Делая указанную замену текущих координат, получаем:

$$A(X+x_0)^2+2B(X+x_0)(Y+y_0)+C(Y+y_0)^2+ \\ +2D(X+x_0)+2E(Y+y_0)+F=0.$$

Раскрывая скобки, собирая вместе члены с X и Y и располагая все члены по убывающим степеням новых текущих координат, найдём:

$$AX^2+2BXY+CY^2+2(Ax_0+By_0+D)X+2(Bx_0+Cy_0+E)Y+ \\ +Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0.$$

Обозначим для краткости левую часть уравнения (1′) через U, её частную производную [1]) относительно x через U'_x и её частную

[1]) Частной производной относительно x от функции двух переменных x и y называется её производная по отношению к x, если y принимается за постоянное. Аналогично составляется частная производная относительно y.

производную относительно y через U'_y, т. е. положим

$$U=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F, \\ U'_x=Ax+By+D, \\ U'_y=Bx+Cx+E.$$

Введя такие обозначения, мы можем преобразованное уравнение написать в виде:

$$AX^2+2BXY+CY^2+U'_{x_0}\cdot X+U'_{y_0}\cdot Y+U_0=0, \qquad (1'')$$

где U'_{x_0}, U'_{y_0}, U_0 обозначают результаты замены в выражениях U'_x, U'_y и U текущих координат посредством координат нового начала.

Итак, *при параллельном переносе начала координат в точку (x_0, y_0) совокупность трёх членов второго измерения в уравнении (1′) остаётся без изменения, свободный же член и коэффициенты X и Y преобразованного уравнения мы получим, если в левую часть данного уравнения и её частные производные относительно x и y подставим вместо текущих координат координаты x_0, y_0 нового начала.*

Пример. Дано уравнение линии 2-го порядка: $x^2-xy+y^2+x-y+2=0$. Каково будет уравнение этой линии, если начало координат перенести в точку (1, 1), сохраняя направления осей?

Здесь

$$U=x^2-xy+y^2+x-y+2, \quad U'_x=2x-y+1, \quad U'_y=-x+2y-1.$$

Следовательно, имеем:

$$U_0=3, \quad U'_{x_0}=2, \quad U'_{y_0}=0.$$

Преобразованное уравнение будет:

$$X^2-XY+Y^2+2X+3=0.$$

§ 3. Центр линии 2-го порядка. *Центром линии 2-го порядка называется такая точка плоскости, в которой делятся пополам все хорды, через неё проходящие.* Из этого определения следует, что центр есть такая точка, относительно которой линия симметрична. В частности, если в уравнении (1′) отсутствуют члены первого измерения, т. е. $D=E=0$, то уравнение не меняется при замене x, y на $-x$, $-y$ и, следовательно, начало координат есть центр линии. Обратно, если начало координат есть центр линии 2-го порядка, то в уравнении

этой линии отсутствуют члены первого измерения. В самом деле, предполагая начало координат в центре линии 2-го порядка, рассмотрим точки пересечения этой линии с произвольной прямой, проходящей через начало координат:

$$y = kx. \tag{2}$$

Координаты этих точек пересечения должны отличаться лишь знаками при любом значении k. Решая совместно уравнения (1′) и (2), подставим $y = kx$ в уравнение (1′). Получим квадратное уравнение

$$(A + 2Bk + Ck^2)x^2 + 2(D + Ek)x + F = 0,$$

корни которого изображают абсциссы точек пересечения линии 2-го порядка с прямой (2) и, следовательно, должны отличаться только знаком. Отсюда сумма корней этого квадратного уравнения должна быть равна нулю при любом значении k. Так как сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при среднем члене с обратным знаком, делённому на коэффициент при второй степени неизвестного, то

$$D + Ek = 0.$$

При произвольном значении k это уравнение может быть выполнено лишь в том случае, если $D = E = 0$.

Таким образом, *для того чтобы начало координат было центром линии 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в уравнении этой линии отсутствовали члены первого измерения относительно x и y.*

Возвращаясь теперь к общему уравнению (1′), покажем, как найти центр соответствующей линии. Перенесём начало координат в точку $O'(x_0, y_0)$, сохраняя направления осей. Обозначая через X, Y текущие координаты относительно новой системы, напишем преобразованное уравнение, согласно § 2, в виде

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + U'_{x_0} \cdot X + U'_{y_0} \cdot Y + U_0 = 0. \tag{1″}$$

В новой системе координат точка O' является началом координат, а потому, согласно доказанному, условие того, чтобы эта точка была центром линии, может быть написано так:

$$U'_{x_0} = 0, \quad U'_{y_0} = 0, \tag{3}$$

или в раскрытом виде:

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \tag{3′}$$

Решая уравнение (3′) относительно x_0, y_0, мы получим координаты центра в старой системе координат. Отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы получить систему уравнений, из которой определяются координаты центра линии 2-го порядка, нужно продифференцировать по x и y уравнение (1′) этой линии.

Из уравнения (1″) следует, что *при параллельном переносе начала координат в центр линии 2-го порядка совокупность трёх членов второго измерения уравнения (1′) остаётся без изменения, члены первого измерения исчезают, а свободный член есть результат подстановки в левую часть уравнения (1′) координат центра вместо текущих координат.*

Как мы видели, координаты центра линии 2-го порядка получаются при решении системы двух уравнений (3′):

$$Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0. \tag{3″}$$

Каждое из уравнений (3′) изображает прямую линию, и, таким образом, центр линии 2-го порядка является точкой пересечения этих прямых. Отсюда при решении системы уравнений (3″) могут встретиться три случая:

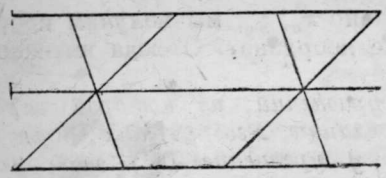
1. Две прямые (3′) пересекаются в одной точке; это будет тогда, когда угловые коэффициенты наших прямых $-\frac{A}{B}$ и $-\frac{B}{C}$ не равны между собой, т. е. $\frac{A}{B}$ не равно $\frac{B}{C}$, или $AC - B^2 \neq 0$. В этом случае линия 2-го порядка имеет определённый центр. Такую линию назовём *центральной*.

2. Две прямые (3″) параллельны между собой; это будет тогда, когда угловые коэффициенты этих прямых $-\frac{A}{B}$ и $-\frac{B}{C}$ равны между собой, т. е. $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$; или $AC - B^2 = 0$. В этом случае линия 2-го порядка не имеет центра.

3. Две прямые (3″) совпадают; это будет тогда, когда одно из уравнений системы (3″) будет следствием другого, т. е. система приведётся к одному уравнению первой степени, что выражается условием

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

В этом случае линия 2-го порядка будет иметь *прямую центров*. Легко видеть, что линия 2-го порядка, представляющая совокупность двух параллельных (или совпадающих) прямых (черт. 77), обладает прямою центров.



Черт. 77.

Пример. Уравнение линии 2-го порядка $x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0$ преобразовать к центру.

Дифференцируя данное уравнение по x и y, получим уравнения (3″):

$$2x - y + 2 = 0, \quad -x + 2y - 4 = 0.$$

Решая эти уравнения, найдём координаты центра: $x' = 0$, $y' = 2$. Перенося начало координат в центр линии 2-го порядка и сохраняя направления осей, получим преобразованное уравнение в новых координатах:

$$X^2 - XY + Y^2 - 4 = 0,$$

так как совокупность членов второго измерения данного уравнения остаётся без изменения, члены первого измерения исчезают, а свободный член получается, если в левую часть данного уравнения вместо текущих координат подставить координаты центра $x' = 0$, $y' = 2$.

§ 4. Два инварианта уравнения линии 2-го порядка. Прежде чем приступить к задаче упрощения уравнения линии 2-го порядка, покажем, что из старших коэффициентов A, B, C можно составить такие алгебраические выражения, которые не изменяются при любом преобразовании осей координат. Мы знаем, что при перенесении начала координат в любую точку плоскости совокупность трёх членов второго измерения уравнения (1′) остаётся без изменения (§ 2), т. е. три старшие коэффициента A, B, C остаются неизменными. Следовательно, эти три коэффициента могут претерпевать изменения лишь в результате поворота осей координат.

Посмотрим, как же преобразуются A, B, C, если система координат повёрнута на некоторый угол α. Обозначая через $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ совокупность членов второго измерения уравнения линии 2-го порядка, рассмотрим, как изменится этот трёхчлен в результате поворота осей координат на угол α. Очевидно, преобразованный трёхчлен будет представлять совокупность членов второго измерения в преобразованном уравнении, потому что вследствие линейности формул преобразования координат члены второго измерения могут получаться лишь из членов того же измерения. Формулы преобразования к новым координатам X, Y суть (гл. V, § 3):

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Подставив эти выражения x, y в трёхчлен $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, получим:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + 2B(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + C(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2, \quad (4)$$

или, раскрывая скобки и собирая вместе члены с X^2, XY и Y^2, мы будем иметь:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)X^2 + 2[C\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - A\sin\alpha\cos\alpha]XY + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)Y^2. \quad (5)$$

Обозначим для краткости через A_1, $2B_1$ и C_1 коэффициенты при членах с X^2, XY и Y^2 в выражении (5):

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha; \\ B_1 &= (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ C_1 &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Тогда равенство (5) запишется в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A_1X^2 + 2B_1XY + C_1Y^2. \quad (5')$$

Легко показать, что

$$A_1 + C_1 = A + C \quad \text{и} \quad A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2. \quad (7)$$

В самом деле, имеем:

$$A_1 + C_1 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha) + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha) = A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A + C,$$

так как

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Далее

$$A_1C_1 - B_1^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha) - [(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]^2.$$

Раскрывая скобки, мы увидим, что сократятся все члены, кроме членов, содержащих AC и $-B^2$, и у этих членов будет коэффициент

$$\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 1.$$

Следовательно, $A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2$, и оба равенства (7) доказаны.

Таким образом, мы видим, что сумма коэффициентов при квадратах координат в уравнении (1′), т. е. сумма $A+C$, а также выражение $AC - B^2$ остаются неизменными как при переносе начала координат, так и при повороте осей координат, т. е. при любом преобразовании координат.

Эти два выражения, составленные из коэффициентов уравнения (1′), называются *инвариантами уравнения линии 2-го порядка*. Инварианты имеют большое значение при изучении линии 2-го порядка; они представляют алгебраические функции от коэффициентов уравнения линии 2-го порядка, не зависящие от выбора осей координат, и поэтому служат аналитическим средством для выражения наиболее существенных геометрических свойств линии 2-го порядка — свойств, не зависящих от выбора осей координат. В § 3 мы уже видели, что рассмотрение инварианта $AC - B^2$ позволяет нам выделить среди линий 2-го порядка класс центральных линий.

В дальнейшем мы увидим другие важные приложения инвариантов уравнения линии 2-го порядка к её изучению и также будем иметь случай познакомиться с третьим инвариантом, существенно отличным от рассмотренных в этом параграфе.

§ 5. Упрощение уравнения центральной линии 2-го порядка. Постараемся теперь надлежащим выбором осей координат по возможности упростить уравнение центральной линии 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1')$$

где $AC - B^2 \neq 0$.

Перенося начало координат O в центр O' линии 2-го порядка, мы получим уравнение нашей линии в новых координатах:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + U_0 = 0, \qquad (8)$$

где U_0 есть результат подстановки в левую часть уравнения (1′) координат центра вместо текущих координат. С целью дальнейшего упрощения уравнения (8) повернём оси координат $XO'Y$ около их начала на угол α, пока произвольный. Формулы преобразования к новым координатам X', Y' суть (гл. V, § 3):

$$X = X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha; \quad Y = X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha.$$

Как известно из § 3, подставляя эти выражения X, Y в уравнение (8), получим:

$$A_1X'^2 + 2B_1X'Y' + C_1Y'^2 + U_0 = 0, \qquad (9)$$

где A_1, B_1, C_1 выражаются по формулам (6).

Пользуясь произволом угла α, выберем этот угол теперь так, чтобы коэффициент B_1 в преобразованном уравнении (9) обратился в нуль, т. е.

$$(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0. \qquad (I)$$

Заметив, что

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

перепишем уравнение (I), определяющее угол поворота α, в виде:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \qquad (I')$$

При таком выборе угла α уравнение (9) примет вид:

$$k_1X'^2 + k_2Y'^2 + U_0 = 0. \qquad (10)$$

Здесь $A_1 = k_1$, $C_1 = k_2$, $B_1 = 0$. Равенства (7) дают:

$$k_1 + k_2 = A + C, \quad k_1k_2 = AC - B^2,$$

т. е. k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения

$$k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (10) является простейшим уравнением центральной линии 2-го порядка; из этого уравнения видно, что новые оси координат являются осями симметрии линии, ибо уравнение содержит только квадраты координат.

Резюмируя изложенное, мы приходим к следующему правилу.

Чтобы составить простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка ($AC - B^2 \neq 0$), нужно:

1. *Найти координаты центра из системы уравнений*

$$Ax + By + D = 0, \quad Bx + Cy + E = 0.$$

2. *Вычислить U_0, подставляя найденные координаты центра вместо текущих координат в левую часть данного уравнения.*

3. *Найти корни k_1 и k_2 квадратного уравнения*

$$k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0$$

и, наконец, подставить найденные значения k_1, k_2 и U_0 в уравнение

$$k_1X'^2 + k_2Y'^2 + U_0 = 0.$$

Пример. Уравнение линии 1-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0$$

привести к простейшему виду.

В данном случае

$$AC-B^2=1\cdot 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\neq 0,$$

т. е. линия—центральная. Для определения центра дифференцируем данное уравнение относительно x и относительно y:

$$2x-y+2=0, \quad -x+2y-4=0.$$

Решая эти уравнения, находим координаты центра: $x_0=0$, $y_0=2$. Подставляя эти значения в левую часть данного уравнения вместо текущих координат, получим $U_0=-4$. Составим квадратное уравнение

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0.$$

В нашем случае $A=C=1$, $B=-\frac{1}{2}$, и уравнение будет:

$$k^2-2k+\frac{3}{4}=0,$$

откуда

$$k_1=1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \qquad k_2=1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, простейшее уравнение данной линии 2-го порядка будет:

$$\frac{1}{2}X'^2+\frac{3}{2}Y'^2-4=0,$$

или

$$X'^2+3Y'^2-8=0.$$

Замечание. Свободный член U_0 простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка можно выразить через коэффициенты исходного уравнения при помощи весьма простой формулы и, таким образом, при составлении простейшего уравнения возможно не определять координат центра. Действительно, представим U_0 в виде

$$U_0=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=$$
$$=(Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+Dx_0+Ey_0+F,$$

Заметив, что x_0, y_0 суть координаты центра и, значит, удовлетворяют условиям

$$Ax_0+By_0+D=0, \quad Bx_0+Cy_0+E=0, \tag{3'}$$

получим:

$$U_0=Dx_0+Ey_0+F. \tag{12}$$

Решая систему уравнений (3'), найдём координаты x_0 и y_0 центра:

$$x_0=-\frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0=\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Внося эти выражения в формулу (12), получим:

$$U_0=D\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}+E\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}+F,$$

или, приводя к общему знаменателю:

$$U_0=\frac{D\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}+E\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}+F\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{D\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}.$$

Выражение, стоящее в числителе, представляет собой разложение определителя 3-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{13}$$

по элементам последней строки. Вследствие этого значение свободного члена U_0 определяется по формуле

$$U_0=\frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \tag{14}$$

Полагая для сокращения письма

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

перепишем формулу (14) таким образом:

$$U_0=\frac{\Delta}{\delta}. \qquad (14')$$

Возвращаясь к правилу, формулированному в конце этого параграфа, мы можем его изменить следующим образом.

Чтобы составить простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка $(AC-B^2\neq 0)$, *нужно*:

1. *Найти корни* k_1 *и* k_2 *квадратного уравнения*

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0.$$

2. *Подставить найденные значения* k_1, k_2 *в уравнение*

$$k_1X'^2+k_2Y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0,$$

где положено

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение линии 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

Как мы видели в этом параграфе, для данного примера корни k_1 и k_2 имеют значения

$$k_1=\frac{1}{2}; \qquad k_2=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, простейшее уравнение данной линии 2-го порядка будет:

$$\frac{1}{2}X'^2+\frac{3}{2}Y'^2+\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}=0.$$

Заметив, что

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4},$$

последнее уравнение перепишем в виде

$$\frac{1}{2}X'^2+\frac{3}{2}Y'^2-4=0, \quad \text{или} \quad X'^2+3Y'^2-8=0.$$

§ 6. Исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка. Простейшее уравнение центральной линии 2-го порядка будет:

$$k_1X'^2+k_2Y'^2+U_0=0. \qquad (10)$$

При выводе этого уравнения мы предполагали, что $AC-B^2\neq 0$. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1. $AC-B^2>0$. Так как $k_1k_2=AC-B^2$, то в этом случае k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки. Не уменьшая общности исследования, мы можем предполагать k_1 и k_2 положительными числами, так как в противном случае изменили бы знак во всех членах уравнения (10) на обратный. Сверх того, мы можем считать k_1 и k_2 выбранными так, что $k_1\leqslant k_2$.

Если в уравнении (10) свободный член U_0 равен нулю, то наше уравнение будет иметь вид

$$k_1X'^2+k_2Y'^2=0. \qquad (15)$$

Это уравнение удовлетворяется только при $X'=Y'=0$, т. е. ему соответствует точка.

Если $U_0<0$, то, перенося свободный член U_0 направо и разделив всё уравнение на эту правую часть, представим уравнение в виде

$$\frac{X'^2}{\frac{-U_0}{k_1}}+\frac{Y'^2}{\frac{-U_0}{k_2}}=1. \qquad (16)$$

Так как по предположению $U_0<0$, то выражения, стоящие в знаменателях последнего уравнения, положительны. Обозначая их через a^2 и b^2, будем иметь:

$$\frac{X'^2}{a^2}+\frac{Y'^2}{b^2}=1 \quad (a\geqslant b),$$

т. е. в этом случае уравнение (10) изображает *эллипс* (в частности, при $a=b$, — окружность).

Если же $U_0>0$, то все три члена уравнения (10) положительны, и это уравнение не удовлетворяется ни при каких действительных значениях текущих координат X' и Y'. Следовательно, в этом случае уравнение (10) не определяет никакой действительной линии, или, как говорят, ему соответствует *мнимое место* точек.

2. $AC-B^2<0$. Так как $k_1k_2=AC-B^2$, то в рассматриваемом случае k_1 и k_2 имеют различные знаки. Не уменьшая общности исследования, можем предполагать k_1 положительным, а k_2 отрицательным, так как в противном случае изменили бы знаки у всех членов уравнения (10). Если $U_0=0$, то уравнение (10) будет:

$$k_1X'^2+k_2Y'^2=0.$$

Полагая $k_1=m_1^2$, $k_2=-n_1^2$, напишем это уравнение так:

$$m_1^2X'^2-n_1^2Y'^2=0,$$

или

$$(m_1X'+n_1Y')(m_1X'-n_1Y')=0.$$

Последнее уравнение равносильно двум уравнениям первой степени:

$$m_1X'+n_1Y'=0;\quad m_1X'-n_1Y'=0.$$

Следовательно, в этом случае уравнение (10) изображает *совокупность двух прямых линий*, проходящих через новое начало координат, т. е. *две пересекающиеся прямые*.

Если же $U_0\neq0$, то, перенося свободный член U_0 в правую часть и деля всё уравнение (10) на эту правую часть, придадим ему вид (16).

В случае отрицательного знака у U_0 выражение $\frac{-U_0}{k_1}$ положительно, а выражение $\frac{-U_0}{k_2}$ отрицательно. Обозначая эти выражения соответственно через a^2 и $-b^2$, преобразуем уравнение (16) к виду

$$\frac{X'^2}{a^2}-\frac{Y'^2}{b^2}=1,$$

т. е. уравнение (10) изображает *гиперболу*, действительная ось которой совпадает с осью $O'X'$.

Наконец, в случае положительного знака у U_0, выражение $\frac{-U_0}{k_1}$ отрицательно, а выражение $\frac{-U_0}{k_2}$ положительно. Обозначая эти выражения соответственно через $-a^2$ и b^2, придадим уравнению (16) вид

$$-\frac{X'^2}{a^2}+\frac{Y'^2}{b^2}=1,$$

т. е. уравнение (10) изображает попрежнему *гиперболу*, действительная ось которой совпадает уже с осью $O'Y'$.

Итак, резюмируя исследование, произведённое в этом параграфе, получаем:

1. $AC-B^2>0$ — *эллипс* (или *окружность*), *мнимое место* или *точка*. Кратко мы скажем, что при $AC-B^2>0$ уравнение изображает кривую *эллиптического типа*.

2. $AC-B^2<0$ — *гипербола* или *две пересекающиеся прямые линии*. Кратко мы скажем, что при $AC-B^2<0$ уравнение изображает кривую *гиперболического типа*.

З а м е ч а н и е. Проведём более детальное исследование простейшего уравнения центральной линии 2-го порядка, отправляясь от её уравнения

$$k_1X'^2+k_2Y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0, \tag{17}$$

где положено

$$\Delta=\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix},\quad \varepsilon=k_1+k_2=A+C.$$

Согласно проведенному выше в этом параграфе плану, рассмотрим отдельно два случая:

I. $\delta>0$. Так как $k_1k_2=\delta$, то в этом случае k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, и мы приходим к подразделению случая I на два:

I_1. k_1 и k_2 положительны, т. е. $\varepsilon>0$.

I_2. k_1 и k_2 отрицательны, т. е. $\varepsilon<0$.

Если в уравнении (17) свободный член $\frac{\Delta}{\delta}$ равен нулю, что будет лишь при условии $\Delta=0$, то наше уравнение будет:

$$k_1X'^2+k_2Y'^2=0.$$

Это уравнение удовлетворяется только при $X'=Y'=0$ (в обоих случаях I_1, I_2), т. е. ему соответствует точка.

Рассматривая случай I_1 и предполагая $\Delta < 0$, перенесём свободный член уравнения (17) направо и, разделив всё уравнение на эту правую часть, представим его в виде

$$\frac{X'^2}{\frac{-\Delta}{k_1\delta}} + \frac{Y'^2}{\frac{-\Delta}{k_2\delta}} = 1. \qquad (16')$$

Так как по предположению $\Delta < 0$, то выражения, стоящие в знаменателях последнего уравнения, положительны и, значит, обозначая их через a^2 и b^2, мы получим уравнение

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1,$$

т. е. в этом случае ($\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Delta < 0$) уравнение (17) изображает эллипс (в частности, при $a = b$,—окружность).

Если же $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, то все три члена уравнения (17) положительны и оно не удовлетворяется ни при каких действительных значениях текущих координат X', Y'. Следовательно, при этих условиях уравнение (17) не определяет никакой действительной линии, или, как говорят, ему соответствует мнимое место точек.

Переходя к случаю I_2 ($\delta > 0$, $\varepsilon < 0$), мы, очевидно, придём к обратным заключениям: при $\Delta > 0$ — эллипс, при $\Delta < 0$ — мнимое место точек.

Объединяя оба случая I_1 и I_2, мы видим, что эллипс получается, когда ε и Δ—разных знаков, и мнимое место, если ε и Δ—одного знака.

Итак, если $\delta > 0$ и $\varepsilon\Delta < 0$ — эллипс,
если $\delta > 0$ и $\varepsilon\Delta > 0$ — мнимое место,
если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$ — точка.

II. $\delta \leqslant 0$. Так как $k_1 k_2 = \delta$, то в рассматриваемом случае k_1 и k_2 имеют различные знаки. Если $\Delta = 0$, то уравнение (17) примет вид

$$k_1 X'^2 + k_2 Y'^2 = 0$$

и, как мы видели в основном тексте настоящего параграфа, равносильно двум уравнениям первой степени. Следовательно, если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$, то уравнение (17) изображает совокупность двух прямых линий, проходящих через новое начало координат, т. е две пересекающиеся прямые.

Если же $\Delta \neq 0$, то, перенося свободный член $\frac{\Delta}{\delta}$ в правую часть и деля всё уравнение (17) на эту правую часть, придадим

ему вид (16′). Так как k_1 и k_2—разных знаков, то знаменатели в уравнении (16′) имеют противоположные знаки и поэтому это уравнение изображает гиперболу.

Итак, если $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$ — гипербола,
если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$ — две пересекающиеся прямые.

§ 7. Третий инвариант уравнения линии 2-го порядка. В § 4 мы доказали инвариантность двух выражений:

$$\varepsilon = A + C, \quad \delta = AC - B^2$$

при любом преобразовании осей координат. Тем же свойством инвариантности обладает также определитель Δ, составленный из всех коэффициентов уравнения линии 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Чтобы это доказать, рассмотрим сначала центральную линию 2-го порядка с уравнением

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (18)$$

где предположено $\delta = AC - B^2 \neq 0$. Пусть выполнено любое преобразование осей координат, и уравнение нашей линии относительно преобразованной системы будет:

$$U_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0, \qquad (19)$$

где A_1, B_1, C_1 определяются согласно формулам (6) из § 4.

Покажем, что

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta = \Delta_1.$$

С этой целью приведём уравнения (18) и (19) к простейшим видам:

$$k_1 X'^2 + k_2 Y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad (18')$$

и

$$k_1 X'^2 + k_2 Y'^2 + \frac{\Delta_1}{\delta} = 0. \qquad (19')$$

В последних уравнениях k_1, k_2 и δ имеют соответственно одинаковые значения, потому что δ и $\varepsilon = A + C$ по доказанному в § 4 суть инварианты, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения $k^2 - \varepsilon k + \delta = 0$. С другой стороны, уравнения (18′) и (19′) изображают одну и ту же линию 2-го

порядка относительно общей системы осей координат, и следовательно, должны совпадать; отсюда следует, что

$$\Delta = \Delta_1.$$

Пусть теперь уравнения (18) и (19) изображают линию 2-го порядка относительно двух различных систем координат при условии $\delta = AC - B^2 = 0$. В этом случае A и C будут одинакового знака, и мы можем их считать положительными, изменив в противном случае знаки во всех членах данного уравнения.

Заменим A через $A' = A + \eta$ и C через $C' = C + \eta$, где η — любая положительная величина, сохраняя остальные коэффициенты неизменными. Тогда изменённое уравнение будет удовлетворять условию

$$\delta' = A'C' - B^2 = (A + \eta)(C + \eta) - B^2 = \varepsilon\eta + \eta^2 = \eta(\varepsilon + \eta) > 0,$$

и, следовательно, по вышедоказанному имеем:

$$\begin{vmatrix} A' & B & D \\ B & C' & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1' & B_1' & D_1' \\ B_1' & C_1' & E_1' \\ D_1 & E_1' & F_1' \end{vmatrix}, \text{ или } \Delta' = \Delta_1'. \tag{20}$$

где A_1', B_1', C_1' получаются из A', B, C' по тем же формулам (6) § 4, что и A_1, B_1, C_1 из A, B, C.

Равенство (20) имеет место при любом η, $\eta > 0$. Заставляя η стремиться к нулю и замечая, что при этом

$$A' \to A,\ C' \to C,\quad A_1' \to A_1,\quad B_1 \to B_1,\quad C_1' \to C_1,\quad D_1' \to D_1,\quad E_1 \to E_1$$
$$F_1' \to F_1,$$

получаем из (20) в пределе:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}, \text{ или } \Delta = \Delta_1.$$

Таким образом, доказано, что определитель Δ представляет собой инвариант уравнения линии 2-го порядка как в случае $\delta \neq 0$, так и при $\delta = 0$. Другими словами, *уравнение любой линии 2-го порядка имеет три различных инварианта* ε, δ, Δ.

§ 8. Главные диаметры центральной линии 2-го порядка. Для построения центральной линии 2-го порядка в первоначальных координатных осях нужно знать расположение новых осей координат относительно прежних, т. е. нужно составить уравнения главных диаметров (осей симметрии) линии в старых координатах. Оба главные диаметра проходят через центр, координаты которого мы обозначаем через x_0 и y_0; следовательно, уравнения их имеют вид (гл. II, § 9):

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{21}$$

Займёмся определением углового коэффициента m для того главного диаметра, который принят за ось $O'X'$. Так как направление оси $O'X'$ получено из направления старой оси OX путём поворота на угол α, то

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Этот тангенс мы найдём из двух первых формул (6) § 4, в которых нужно положить $A_1 = k_1$ и $B_1 = 0$.

Перепишем их в виде

$$\begin{array}{l|l} \sin\alpha & A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = k_1, \\ \cos\alpha & -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{array}$$

Умножая первое уравнение на $\sin\alpha$, а второе — на $\cos\alpha$ и сложив почленно, получим:

$$B\cos\alpha + C\sin\alpha = k_1\sin\alpha,$$

или

$$B\cos\alpha = (k_1 - C)\sin\alpha.$$

Окончательно имеем:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{k_1 - C},$$

Подставляя это значение в уравнение (21), получим *уравнение главного диаметра центральной линии 2-го порядка*, принятого за ось $O'X'$:

$$y - y_0 = \frac{B}{k_1 - C}(x - x_0). \tag{22}$$

Из условия перпендикулярности главных диаметров следует, что угловой коэффициент другого главного диаметра, принятого за ось $O'Y'$, будет $\frac{C - k_1}{B}$. Нетрудно доказать, что

$$\frac{C - k_1}{B} = \frac{B}{k_2 - C},$$

В самом деле, это равенство можно записать так:

$$(C - k_1)(k_2 - C) = B^2, \text{ или } -k_1k_2 + C(k_1 + k_2) - C^2 = B^2.$$

Так как $k_1+k_2=A+C$ и $k_1k_2=AC-B^2$, то последнее равенство приводится к виду:

$$-(AC-B^2)+C(A+C)-C^2=B^2,$$

что представляет тождество.

Таким образом, для второго главного диаметра, принятого за ось $O'Y'$, получаем уравнение, аналогичное (22), а именно:

$$y-y_0=\frac{B}{k_2-C}(x-x_0). \qquad (22')$$

Пример. Составить уравнения главных диаметров линии 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

Как мы видели, центр этой линии имеет координаты $x_0=0$, $y_0=2$ (§ 3). Далее в § 5 мы видели, что для этой линии $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=\frac{3}{2}$. Следовательно, уравнения главных диаметров этой линии будут:

$$y-2=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}(x-0)\ \text{(ось } O'X'), \qquad y-2=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-1}(x-0)\ \text{(ось } O'Y'),$$

или

$$x-y+2=0 \quad \text{и} \quad x+y-2=0.$$

§ 9. Построение центральной линии 2-го порядка. Чтобы построить центральную линию 2-го порядка в старых координатах, нужно привести её уравнение к простейшему виду и составить уравнения главных диаметров, принимаемых за новые оси координат. Построив новые оси координат по их уравнениям, вычерчиваем нашу линию по её простейшему уравнению.

Пример 1. Построить линию 2-го порядка

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0.$$

Здесь $AC-B^2=\frac{3}{4}>0$. Линия есть эллипс. В § 5 мы составили простейшее уравнение этой линии:

$$X'^2+3Y'^2-8=0, \quad \text{или} \quad \frac{X'^2}{8}+\frac{Y'^2}{\frac{8}{3}}=1.$$

Уравнения новых осей $O'X'$ и $O'Y'$, как мы видели в конце предыдущего параграфа, будут:

$$x-y+2=0\ (O'X') \quad \text{и} \quad x+y-2=0\ (O'Y').$$

Построив оси $O'X'$ и $O'Y'$, вычертим эллипс (черт. 78).

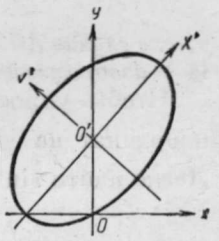
Пример 2. Построить линию 2-го порядка

$$2xy-4x-2y+3=0.$$

Здесь $AC-B^2=-1<0$, т. е. линия есть гипербола. Чтобы найти её простейшее уравнение, определим сначала координаты центра. Дифференцируя данное уравнение по x и y, получим:

$$2y-4=0, \quad 2x-2=0,$$

откуда $x_0=1$, $y_0=2$. Подставляя эти значения x_0 и y_0 в левую часть данного уравнения, найдём свободный член простейшего уравнения $U_0=-1$. Составим квадратное уравнение:

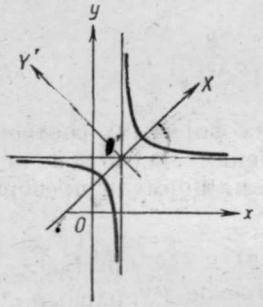


Черт. 78.

$$k^2-(A+C)k+(AC-B^2)=0,$$

т. е. $k^2-1=0$, откуда $k_1=1$, $k_2=-1$. Простейшее уравнение будет:

$$X'^2-Y'^2-1=0.$$



Черт. 79.

Чтобы построить нашу гиперболу, начертим сперва её главные диаметры. Уравнения главных диаметров будут:

$$y-2=\frac{1}{1-0}(x-1) \quad \text{(ось } O'X');$$

$$y-2=\frac{1}{-1-0}(x-1) \quad \text{(ось } O'Y'),$$

или

$$x-y+1=0,\ x+y-3=0;$$

кривая изображена на черт. 79.

§ 10. Исследование уравнения линии 2-го порядка, не имеющей определённого центра ($AC-B^2=0$). Обратимся теперь к уравнению

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1')$$

в том случае, когда $AC-B^2=0$, или $AC=B^2$.

Из последнего условия видно, что A и C—одинакового знака и мы можем считать их положительными [в противном случае мы изменили бы знаки во всех членах уравнения (1')].

Полагая $A=\alpha^2$, $C=\beta^2$, будем иметь:

$$B^2=\alpha^2\beta^2 \quad \text{и} \quad B=\alpha\beta.$$

выбирая α и β с надлежащими знаками (т. е. если B положительно, α и β берём со знаком $+$; если B отрицательно, то α берём со знаком $+$, а β со знаком $-$). Введя эти обозначения вместо A, B, C, уравнение (1′) запишем так:

$$\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

или

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{23}$$

т. е. *в случае* $AC-B^2=0$ *трёхчлен второго измерения уравнения* (1′) *изображает точный квадрат двучлена* $\alpha x+\beta y$.

Чтобы упростить уравнение (23), повернём систему осей координат на угол φ, определяемый из условия $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\alpha}{\beta}$. Легко найти $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ по формулам:

$$\sin\varphi=\pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\quad \cos\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

т. е. в данном случае

$$\sin\varphi=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \cos\varphi=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Выбор верхних или нижних знаков в этих формулах соответствует выбору положительного направления на новой оси абсцисс. Возьмём, например, верхние знаки. Формулы преобразования координат суть:

$$x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi=\frac{\beta X+\alpha Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi=\frac{-\alpha X+\beta Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Прежде чем подставить эти значения x и y в данное уравнение (23), найдём выражения для $\alpha x+\beta y$ и $2Dx+2Ey+F$ в новых координатах x' и y'. Очевидно, имеем:

$$\alpha x+\beta y=\alpha\frac{\beta X+\alpha Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\beta\frac{-\alpha X+\beta Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,Y, \tag{24}$$

$$2Dx+2Ey+F=2D\frac{\beta X+\alpha Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+2E\frac{-\alpha X+\beta Y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+F=$$

$$=2D'X+2E'Y+F, \tag{25}$$

где положено

$$D'=\frac{\beta D-\alpha E}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad E'=\frac{\beta E+\alpha D}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{26}$$

Пользуясь формулами (24) и (25), напишем данное уравнение (23) в новых координатах:

$$(\alpha^2+\beta^2)Y^2+2D'X+2E'Y+F=0. \tag{23′}$$

Перенесём теперь, сохраняя направления осей, начало координат в точку $O'(X_0, Y_0)$, где X_0 и Y_0 будут определены в дальнейшем. Формулы преобразования координат суть:

$$X=X'+X_0;\quad Y=Y'+Y_0.$$

Преобразованное уравнение немедленно получим, пользуясь правилом § 2; это уравнение будет вида

$$(\alpha^2+\beta^2)Y'^2+2D'X'+2E''Y'+F'=0, \tag{23″}$$

где положено

$$E''=(\alpha^2+\beta^2)Y_0+E';\quad F'=(\alpha^2+\beta^2)Y_0^2+2D'X_0+2E'Y_0+F. \tag{27}$$

Чтобы уравнение (23″) имело простейший вид, выберем X_0, Y_0 так, чтобы в этом уравнении исчезли член с Y' и свободный член. Для этого нужно определить X_0, Y_0 из уравнений

$$E''=0,\quad F'=0,$$

или

$$(\alpha^2+\beta^2)Y_0+E'=0;\quad (\alpha^2+\beta^2)Y_0^2+2D'X_0+2E'Y_0+F=0. \tag{28}$$

Так как $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, то из первого уравнения (28) определим Y_0; подставив найденное значение Y_0 во второе уравнение (28), найдём X_0, если $D'\neq 0$. Выбрав X_0, Y_0 указанным образом, придадим уравнению (23″) следующий вид:

$$(\alpha^2+\beta^2)Y'^2+2D'X'=0, \tag{23‴}$$

или

$$Y'^2=2pX',$$

где

$$p=-\frac{D'}{\alpha^2+\beta^2}\quad\text{или}\quad p=\frac{\alpha E-\beta D}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}. \tag{I}$$

Это уравнение изображает параболу, для которой новая ось абсцисс является осью симметрии (главным диаметром); другая ось координат касается параболы в вершине O'.

Итак, мы видим, что уравнение (1′) в случае $AC-B^2=0$ изображает параболу. Однако, вычисления становятся невыполнимыми, если $D'=0$, так как в этом случае нельзя определить X_0, Y_0 из уравнений (28). Таким образом, остаётся исследовать, что изображает уравнение (23), когда $D'=0$. Последнее условие, согласно первой из формул (26), равносильно предположению

$$\beta D-\alpha E=0.$$

Так как α и β одновременно не могут быть равны нулю, то мы вправе считать $\beta\neq 0$. Из последнего равенства получаем:

$$D=\frac{\alpha E}{\beta}.$$

Внося это значение D в уравнение (23), придадим ему вид

$$(\alpha x+\beta y)^2+\frac{2E}{\beta}(\alpha x+\beta y)+F=0. \qquad (23'''')$$

Считая в последнем уравнении $\alpha x+\beta y$ за искомую величину, определим эту последнюю посредством решения квадратного уравнения (23′′′′).

Таким образом, получим:

$$\alpha x+\beta y=K_1;\quad \alpha x+\beta y=K_2, \qquad (29)$$

где K_1 и K_2 суть постоянные числа.

В рассматриваемом частном случае уравнение (23) распадается на два уравнения первой степени (29). Рассмотрим отдельно три случая.

1. K_1 и K_2 суть мнимые числа. Уравнения (29) не удовлетворяются ни при каких действительных значениях x и y. Уравнение (23) изображает мнимое место точек [пару мнимых прямых (29)].

2. K_1 и K_2 суть действительные и различные числа. Уравнения (29) изображают пару параллельных прямых линий. Следовательно, уравнение (23) изображает линию 2-го порядка, распадающуюся на пару параллельных прямых.

3. $K_1=K_2$. Уравнения (29) представляют две одинаковые прямые. Следовательно, уравнение (23) изображает две совпадающие прямые.

Итак, в случае $AC-B^2=0$ уравнение (1′) изображает либо *параболу*, либо *пару параллельных прямых*. Кратко мы скажем, что при $AC-B^2=0$ уравнение изображает кривую *параболического типа*.

Замечание 1. Результаты произведённого исследования уравнения второй степени (1′), при условии $\delta=AC-B^2=0$, можно выразить с помощью коэффициентов этого уравнения, подобно тому, как это было сделано в § 6 для случая $\delta\neq 0$. Пусть

$$\delta=AC-B^2=0 \quad\text{и}\quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=0.$$

Первое условие, как мы знаем, равносильно равенствам

$$A=\alpha^2,\quad C=\beta^2,\quad B=\alpha\beta.$$

Внося эти значения A, B, C в равенство $\Delta=0$, получим после разложения определителя по элементам последней строки:

$$D(\alpha\beta E-\beta^2 D)-E(\alpha^2 E-\alpha\beta D)=0,$$

или

$$\alpha^2E^2-2\alpha\beta DE+\beta^2D^2=0,\quad\text{или}\quad(\alpha E-\beta D)^2=0,$$

откуда

$$\alpha E=\beta D$$

и следовательно,

$$D=\frac{\alpha E}{\beta}.$$

Внося это значение D в данное уравнение (23), придадим ему вид

$$(\alpha x+\beta y)^2+\frac{2E}{\beta}(\alpha x+\beta y)+F=0.$$

Из последнего уравнения мы заключили, что в этом случае линия 2-го порядка распадается на пару параллельных прямых (мнимых, действительных или сливающихся). Обратно, легко видеть, что если линия 2-го порядка распадается на пару параллельных прямых, то инварианты δ и Δ равны нулю. Действительно, пусть $\alpha x+\beta y=K_1$ и $\alpha x+\beta y=K_2$ суть уравнения параллельных прямых; тогда уравнение линии 2-го порядка будет:

$$(\alpha x+\beta y-K_1)(\alpha x+\beta y-K_2)=0,$$

откуда

$$A=\alpha^2,\quad B=\alpha\beta,\quad C=\beta^2,\quad D=-\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2),\quad E=-\frac{\beta}{2}(K_1+K_2),$$

$$F=K_1K_2$$

и определители $\delta=0$ и

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2) \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2) \\ -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2) & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2) & K_1K_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\beta\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & -\frac{\alpha}{2}(K_1+K_2) \\ \beta & \beta & -\frac{\beta}{2}(K_1+K_2) \\ -\frac{K_1+K_2}{2} & -\frac{K_1+K_2}{2} & K_1K_2 \end{vmatrix},$$

т. е. $\Delta=0$, потому что последний определитель имеет два одинаковых столбца.

Итак, необходимые и достаточные условия распадения линии 2-го порядка на пару параллельных прямых будут:

$$\delta=0,\quad \Delta=0.$$

В силу основного текста настоящего параграфа мы приходим к заключению:

если $\delta=0$, $\Delta\neq 0$, то линия представляет собой параболу,

если $\delta=0$, $\Delta=0$, то линия распадается на пару параллельных прямых (мнимых, действительных или сливающихся).

Замечание 2. Формулу (I) для параметра параболы можно получить, пользуясь инвариантами. В самом деле, пусть $C_1Y'^2+2D_1X'=0$ есть простейшее уравнение параболы. Вычислим выражения ε, Δ по первоначальному уравнению параболы и, пользуясь их инвариантностью, получим:

$$C_1=\varepsilon,\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & D_1 \\ 0 & C_1 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\Delta,\quad \text{или } D_1^2C_1=-\Delta,$$

откуда

$$D_1^2=-\frac{\Delta}{\varepsilon}.$$

Заметив, что $p=-\frac{D_1}{C_1}$, имеем:

$$p=\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{(\varepsilon)^{3/2}}. \qquad (I')$$

Легко показать, что формула (I') совпадает с формулой (I) основного текста. В самом деле:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & D \\ \alpha\beta & \beta^2 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=D(E\alpha\beta-D\beta^2)-E(E\alpha^2-D\alpha\beta)=-(E\alpha-D\beta)^2,$$

и следовательно,

$$p=\frac{E\alpha-D\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}. \qquad (I)$$

Что касается знака у p, определяемого формулой (I), то он обусловлен определённым выбором положительного направления на новой оси X (верхние знаки в формулах при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$).

§ 11. Определение главного диаметра и вершины параболы. Возвращаясь к исследованию, произведённому в основном тексте § 10, мы видим, что уравнение оси симметрии параболы после поворота осей координат будет $Y=Y_0$, где Y_0 определяется первым из уравнений (28) и второй формулой (26), т. е.

$$Y_0=-\frac{E'}{\alpha^2+\beta^2}=-\frac{\alpha D+\beta E}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}},$$

а Y связано со старыми координатами формулой (24), т. е.

$$Y=\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Внося выражения Y и Y_0 в уравнение $Y=Y_0$, мы получим уравнение главного диаметра параболы относительно первоначальной системы координат:

$$\alpha x+\beta y=-\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}$$

или

$$\alpha x+\beta y+\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}=0. \qquad (30)$$

Чтобы найти координаты x_0, y_0 вершины параболы, очевидно, следует разрешить совместно систему уравнений (23) и (30), так как вершина есть точка пересечения параболы с её главным диаметром.

Пример. Составить уравнение главного диаметра параболы

$$(x^2+2xy+y^2)+2x+y=0$$

и определить её вершину.

Написав данное уравнение в виде

$$(x+y)^2+2x+y=0,$$

заключаем, что

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad D=1,\quad E=\frac{1}{2},$$

Следовательно, уравнение диаметра будет:

$$x+y+\frac{1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2}}{1^2+1^2}=0 \quad \text{или} \quad x+y+\frac{3}{4}=0.$$

Решая совместно уравнения параболы и главного диаметра, найдём координаты вершины:

$$x+y=-\frac{3}{4},\quad 2x+y=-\frac{9}{16},$$

откуда

$$x_0=\frac{3}{16},\quad y_0=-\frac{15}{16}.$$

§ 12. Упрощение уравнения параболы. Первый способ. Чтобы получить простейшее уравнение параболы, можно поступать следующим образом. Зная уравнение главного диаметра параболы

$$\alpha x+\beta y\mp\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}=0, \qquad (30)$$

определяем координаты вершины, решая совместно уравнение (30) с данным уравнением параболы. Далее, так как угловой коэффициент главного диаметра параболы (новой оси абсцисс) есть $-\frac{\alpha}{\beta}$, то легко найти синус и косинус угла поворота φ новых осей координат, зная, что $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\alpha}{\beta}$. Наконец, остаётся в данном уравнении параболы заменить текущие координаты по формулам преобразования координат

$$x=X'\cos\varphi-Y'\sin\varphi+x_0;\quad y=X'\sin\varphi\mp Y'\cos\varphi+y_0.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0.$$

Как мы видели в конце прошлого параграфа, уравнение главного диаметра этой параболы будет:

$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$

а координаты её вершины суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$. В данном случае $\operatorname{tg}\varphi=-1$; следовательно, имеем:

$$\sin\varphi=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Возьмём, например, нижние знаки в этих формулах:

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

чем устанавливается положительное направление новой оси абсцисс.

Формулы преобразования координат суть:

$$x=X'\cos\varphi-Y'\sin\varphi+x_0,\quad y=Y'\sin\varphi+Y'\cos\varphi+y_0.$$

В данном случае они примут вид

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y')+\frac{3}{16},\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'-Y')-\frac{15}{16}.$$

Подставляя эти значения x и y в данное уравнение параболы

$$(x+y)^2+2x+y=0,$$

получим

$$\left(\sqrt{2}Y'+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+3Y')-\frac{9}{16}=0,$$

или после упрощения:

$$2Y'^2-\frac{X'}{\sqrt{2}}=0,\ \text{т. е.}\quad Y'^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X'.$$

Второй способ. Пользуясь формулой (I) из § 10, определяем

$$p=\frac{\alpha E-\beta D}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}$$

и вносим найденное значение в простейшее уравнение параболы

$$Y'^2=2pX'.$$

Пример. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0$$

(тот же пример, что и разобранный выше в этом параграфе).

Здесь $a=1$, $\beta=1$, $D=1$, $E=\frac{1}{2}$. Следовательно, по формуле (I) получаем:

$$p=\frac{1\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1}{(1^2+1^2)^{3/2}}=-\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{2}}$$

уравнение параболы примет вид:

$$Y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X'.$$

Сравнивая с решением по первому способу, мы видим, что различие в знаке при p объясняется тем, что положительное направление на оси $O'X'$ теперь выбрано противоположным первоначальному.

§ 13. Построение параболы. Чтобы построить параболу по её уравнению в старых координатах, нужно привести это уравнение к простейшему виду, как это было сделано в § 12. Зная уравнение главного диаметра (новой оси абсцисс), строим эту ось и отмечаем на ней вершину по координатам (x_0, y_0). Положительное направление новой оси абсцисс назначаем согласно той четверти, в которой лежит угол φ, образованный положительным направлением новой оси абсцисс с положительным направлением старой оси Ox.

При использовании формулы (I) для параметра p необходимо помнить, что этот угол φ следует брать в четвёртой или третьей четвертях, смотря по тому, будет ли β положительно или отрицательно. Это правило вытекает из вывода формулы (I) для параметра p, произведённого в § 10, при котором мы приняли $\sin\varphi$ отрицательным, а знак $\cos\varphi$ совпадающим со знаком β. Затем проводим новую ось ординат через вершину перпендикулярно к главному диаметру параболы. Наконец, по простейшему уравнению вычерчиваем параболу.

Пример. Построить параболу

$$x^2+2xy+y^2+2x+y=0.$$

Как мы видели в прошлом параграфе, простейшее уравнение нашей параболы будет:

$$Y'^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X',$$

Координаты вершины O' суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$, а уравнение главного диаметра (оси $O'X'$) будет:

$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$

причём положительное направление на оси $O'X'$ мы выбрали так, что угол φ этого направления с положительным направлением оси Ox лежит во второй четверти (так как $\sin\varphi>0$, $\cos\varphi<0$).

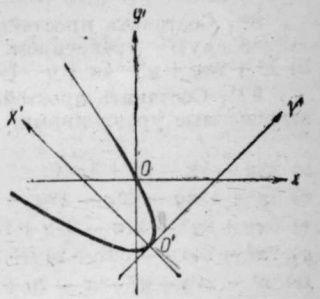
По этим данным строим новые оси координат и относительно них вычерчиваем параболу согласно её уравнению $Y'^2=\frac{\sqrt{2}}{4}X'$ (черт. 80).

Поступая по второму способу, получим простейшее уравнение параболы:

$$Y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X'.$$

Координаты вершины O' суть: $x_0=\frac{3}{16}$, $y_0=-\frac{15}{16}$, а уравнение главного диаметра (оси $O'X'$) будет:

$$x+y+\frac{3}{4}=0,$$



Черт. 80.

причём положительное направление на оси $O'X'$ мы всегда выбираем здесь согласно правилу, формулированному выше. В данном случае угол φ лежит в четвёртой четверти (так как $\sin\varphi<0$, $\cos\varphi>0$). По этим данным строим новые оси координат и относительно них вычерчиваем параболу согласно её уравнению $Y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}X'$ (на черт. 80 положительное направление оси $O'X'$ направлено в другую сторону).

Упражнения

1. Найти центр кривой 2-го порядка, выражаемой уравнением

$$3x^2-7xy+5y^2+x-3y-3=0.$$

2. Найти центры кривых 2-го порядка, выражаемых уравнениями:

a) $x^2-y^2-4x-2y+1=0$;
b) $5x^2-2xy+3y^2-2x+3y-6=0$;
c) $2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$;
d) $x^2+y^2-2x+3y-1=0$;
e) $9x^2-30xy+25y^2+8x-15y=0$;
f) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

3. Показать, что прямая $7x+y+6=0$ проходит через центры кривых

$$3x^2-7xy-6y^2+3x-9y+5=0,$$
$$3x^2-5xy+6y^2+11x-17y+13=0.$$

4*. Найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через точки (2, 3), (4, 2), (—1, —3) и имеющей центр в точке (0, 1).

5. Найти уравнение кривой 2-го порядка, центр которой лежит в точке (0, 2) и которая проходит через точки (1, 1), (2, 3), $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$.

6. Упростить уравнения следующих центральных кривых при помощи переноса начала координат: a) $x^2-y^2-2x+y=0$; b) $2x^2-3y^2-8x+12y-6=0$; c) $x^2-4y^2-2x-2y-2=0$.

7. Упростить уравнения следующих кривых при помощи поворота осей координат:

a) $x^2-xy+y^2-1=0$; b) $5x^2+4xy+2y^2-12=0$;

c) $4x^2+8xy-2y^2-7=0$.

8*. Составить простейшее уравнение, а также построить кривую, выражаемую уравнением: a) $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$; b) $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$; c) $2x^2+2y^2-2x-6y-13=0$.

9 [1]**.** Составить простейшие уравнения, а также построить кривые, выражаемые уравнениями:

a) $2xy-4x-2y+3=0$;
b) $x^2-2y^2-4x+2y-1=0$;
c) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;
d) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$;
e) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;
f) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;
g) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$;
h) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;
i) $x^2-2xy+y^2-x-2y+3=0$;
k) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;
l) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$;
m) $4x^2-4xy+y^2-x-2=0$;
n) $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y-1=0$;
o) $2x^2-3xy+3y^2+x-7y+1=0$;
p) $2x^2-5xy+5y-1=0$;
q) $4x^2-12xy+9y^2-36x+100=0$.

10*. Определить вид и построить кривую, заданную уравнением

$$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}.$$

11. По виду уравнения $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$ показать, что кривая есть эллипс.

12. По виду уравнения $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ показать, что кривая есть эллипс.

13. По виду уравнения $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y-1=0$ показать, что кривая есть эллипс.

14. Непосредственно показать, что уравнение $2x^2-3xy+3y^2+x-7y+1=0$ изображает эллипс.

15. По виду уравнения $2xy-4x-2y+3=0$ показать, что кривая есть гипербола.

16. По виду уравнения $x^2-2y^2-4x+2y-1=0$ показать, что кривая есть гипербола.

[1]) Большинство нижеследующих примеров заимствовано из книг: *О. Н. Цубербиллер*, Задачи и упражнения по аналитической геометрии и *О. К. Житомирский*, Аналитическая геометрия (конспект) («Сеятель» Ленинград, 1924).

17. По виду уравнений

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0, \quad 6xy+8y^2-12x-26y+11=0,$$
$$7x^2-24xy-38x+24y+175=0, \quad 2x^2-5xy+5y-1=0$$

показать, что они изображают гиперболы.

18. На основании вида уравнений

$$x^2+2xy+y^2+3x+y=0, \quad x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0,$$
$$x^2-2xy+y^2-x-2y+3=0, \quad 4x^2-4xy+y^2-x-2=0,$$
$$4x^2-12xy+9y^2-36x+100=0$$

показать, что они представляют параболы.

19. По виду уравнения $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$ показать, что оно изображает пару параллельных прямых.

20. На основании вида уравнения $2x^2+xy-y^2-2x+7y-12=0$ показать, что оно изображает пару пересекающихся прямых.

21. По виду уравнения $x^2+4y^2-2x+1=0$ показать, что оно изображает точку.

22. На основании вида уравнения $5x^2+6xy+5y^2+18x+18y+19=0$ показать, что оно изображает мнимое место точек.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

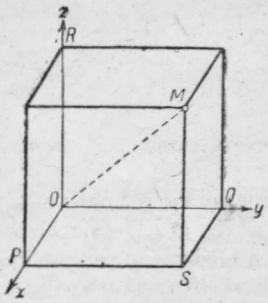
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА I

КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Прямоугольные координаты. Чтобы определить положение точки в пространстве, из некоторой точки O проводят три взаимно перпендикулярные прямые Ox, Oy, Oz, называемые *осями координат*. Точка их пересечения O называется *началом координат*.

На каждой оси координат выбирают определённое направление за положительное: например, на оси Ox вперёд (по направлению к читателю, рис. 81), на оси Oy слева направо, на оси Oz снизу вверх. Наконец, определённый отрезок принимается за единицу масштаба. Тогда положение всякой точки M пространства определяется тремя числами — координатами этой точки. В самом деле, всякой точке M соответствуют три точки P, Q, R на осях координат, являющиеся её проекциями на эти оси, и обратно, зная точки P, Q и R на осях, можно построить единственную точку M в пространстве, для которой P, Q и R являются проекциями на оси. Таким образом, определение положения точки пространства M сводится к определению положений её проекций P, Q и R, лежащих соответственно на постоянных прямых Ox, Oy и Oz. Мы уже знаем, что положение точки P прямой Ox вполне, т. е. однозначно, определяется одним числом x, представляющим собой количество единиц масштаба в отрезке $\overline{OP}$, причём это число x берут положительным, если точка P лежит впереди O, и отрицательным, если сзади O. Это число x, координата точки P проекции точки M на ось Ox, принимается за первую координату точки M и называется её *абсциссой*.



Черт. 81.

Совершенно так же положение точек Q и R, двух других проекций точки M на оси Oy и Oz, вполне определяется числами y и z, представляющими собой количества единиц масштаба в отрезках $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$, причём число y берётся положительным, если точка Q лежит вправо от O, и отрицательным, если влево от O, а число z берётся положительным, если точка R лежит выше O, и отрицательным в противном случае. Числа y и z, координаты точек Q и R, проекций точки M на оси Oy и Oz, принимаются соответственно за вторую и третью координаты точки M. Вторая координата y называется *ординатой* и третья z — *аппликатой*. Оси координат Ox, Oy и Oz, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости xOy, yOz и zOx, называемые *плоскостями координат*. Эти три плоскости делят всё пространство на восемь частей, причём точкам каждой части соответствует определённая комбинация знаков координат.

Если точка M лежит в плоскости координат xOy, то $z=0$; аналогично для точек плоскости yOz координата $x=0$; для точек плоскости zOx координата $y=0$. Если точка M лежит на оси координат Ox, то $y=z=0$; аналогично для точек оси Oy координаты z и x равны нулю, для точек оси Oz координаты x и y равны нулю. Наконец, в начале координат $x=y=z=0$.

Координаты, которые принимаются в описанном способе для определения положения точки, называются *прямоугольными*, так как точка M определяется пересечением трёх плоскостей, пересекающихся под прямыми углами, и по имени Декарта также *декартовыми*. Из описанного метода координат вытекает решение двух основных задач.

З а д а ч а 1. *По данной точке M определить её координаты.*

Через данную точку M проводим три плоскости параллельно плоскостям координат; три точки P, Q и R, получающиеся в пересечении этих плоскостей с осями координат Ox, Oy и Oz и являющиеся проекциями точки M на эти оси, определяют три координаты:

$$\overline{OP}=x, \quad \overline{OQ}=y, \quad \overline{OR}=z.$$

Проведённые через точку M три плоскости вместе с тремя координатными плоскостями образуют прямоугольный параллелепипед, рёбра которого $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OR}$ изображают три координаты точки M. Очевидно, координаты x, y и z точки M являются проекциями диагонали OM на три оси координат Ox, Oy и Oz.

Задача II. *Зная координаты x, y и z точки M, построить точку M.*

По трём данным числам x, y и z строим три точки P, Q и R на осях координат, откладывая соответственно по осям отрезки

$$\overline{OP}=x, \quad \overline{OQ}=y, \quad \overline{OR}=z.$$

Проводя через точки P, Q и R три плоскости, параллельные плоскостям координат, в пересечении их получим единственную точку M, для которой x, y, z будут координатами.

Замечание. При решении этих основных задач не является необходимым проводить плоскости, параллельные плоскостям координат. Так, в задаче I опускаем из данной точки M перпендикуляр на плоскость координат xOy. Его основание S (черт. 81) определит проекцию точки M на плоскость xOy. Из точки S опускаем перпендикуляр на ось Ox; его основание P определит проекцию точки M на оси Ox.

Тогда три звена построенной ломаной линии $\overline{OPSM}$ определяют три координаты точки M:

$$\overline{OP}=x, \quad \overline{PS}=y, \quad \overline{SM}=z$$

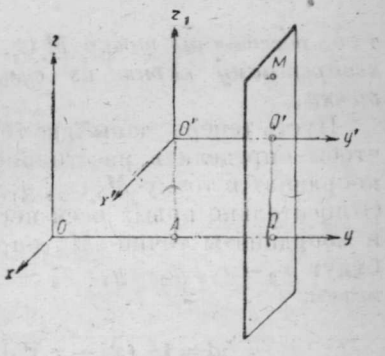
(так как $\overline{PS}=\overline{OQ}$ и $\overline{SM}=\overline{OR}$).

Так же при решении задачи II построения точки по данным координатам x, y и z откладываем по оси Ox отрезок $\overline{OP}$, равный x единицам масштаба (вперёд или назад—смотря по знаку x), через точку P проводим в плоскости xOy прямую параллельно оси Oy и откладываем на ней отрезок $\overline{PS}$, равный y единицам масштаба (вправо или влево,—смотря по знаку y), наконец, через точку S проводим прямую параллельно оси Oz и откладываем на ней отрезок $\overline{SM}$, равный z единицам масштаба (вверх или вниз,—смотря по знаку z). Таким образом, получается трёхзвенная ломаная линия $\overline{OPSM}$, конец которой и есть искомая точка. Эта ломаная линия $\overline{OPSM}$, начало которой находится в начале координат, конец—в точке M и три звена которой, представляющие координаты x, y и z точки M, направлены соответственно по оси координат, в плоскости координат и в пространстве, называется координатной ломаной линией точки M.

§ 2. Основные задачи. Изложенный в § 1 метод координат приложим к решению многих задач. Рассмотрим сначала одну задачу вспомогательного характера.

Задача I. *Зная координаты точки относительно некоторой системы осей, найти координаты той же точки относительно новой системы, оси которой параллельны прежним осям.*

Пусть координаты точки M относительно системы координат $Oxyz$ суть x, y и z. Возьмём другую систему координат $O'x'y'z'$, оси которой $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ соответственно параллельны осям Ox, Oy и Oz и направлены в те же стороны (черт. 82). Координаты точки O', нового начала, по старой системе пусть будут a, b и c. Спрашивается, как связаны между собой координаты точки M по старой и новой системам. Обозначая через x', y' и z' координаты точки M по новой системе и проектируя точки O' и M, например на ось Oy[1]), имеем из черт. 82:



Черт. 82.

$$\overline{OQ}=\overline{OA}+\overline{AQ}=\overline{OA}+\overline{O'Q'},$$

или

$$y=b+y'. \qquad (1)$$

Совершенно так же, проектируя точки O' и M на оси Ox и Oz, найдём:

$$x=a+x', \qquad (2)$$

$$z=c+z'. \qquad (3)$$

Полученные формулы позволяют, зная x', y' и z', найти x, y и z. Чтобы, обратно, зная x, y и z, найти новые координаты x', y' и z', нужно разрешить уравнения (2), (1) и (3) относительно x', y' и z'. Будем иметь:

$$x'=x-a, \quad y'=y-b, \quad z'=z-c. \qquad (4)$$

Задача II. *Определить расстояние между двумя данными точками.*

Если точка M имеет координаты x, y и z, то её расстояние от начала координат представляет диагональ прямоугольного

[1]) Вывод формулы проведён для координаты y, так как в этом случае чертёж наиболее нагляден.

параллелепипеда, три измерения которого суть x, y и z (черт. 81). Следовательно, обозначая через d искомое расстояние, имеем:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \qquad (5)$$

т. е. *расстояние точки $M(x, y, z)$ от начала координат равно квадратному корню из суммы квадратов координат этой точки.*

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$; чтобы определить расстояние между ними, перенесём начало координат в точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, сохраняя направления осей. Относительно новых осей координаты точки M будут $(0, 0, 0)$, и координаты точки M_2 определяются по формулам (4); они будут $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Следовательно, по формуле (5) имеем:

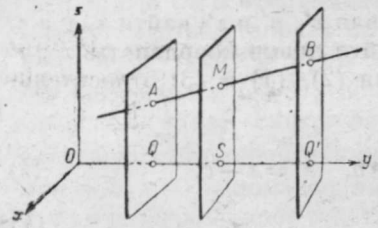
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (6)$$

т. е. *расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равно квадратному корню из суммы квадратов разностей координат этих точек.*

Пример. Определить расстояние между точкой $M_1(1, 2, 3)$ и точкой $M_2(-1, 2, -2)$.

Искомое расстояние по формуле (6) будет $d = \sqrt{2^2 + 0 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Задача III. *Найти координаты точки M, делящей данный отрезок AB в данном отношении.*



Черт. 83.

Обозначая через x_1, y_1 и z_1 координаты данной точки A, через x_2, y_2 и z_2 координаты другой данной точки B, определим координаты x, y и z искомой точки M, делящей отрезок AB в данном отношении λ, т. е. так, что

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda. \qquad (7)$$

Пусть Q, S, Q' суть проекции точек A, M, B на ось Oy (черт. 83). Из черт. 83 следует:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{SQ'}};$$

так как отрезки двух прямых, заключённые между параллельными плоскостями, пропорциональны. В силу условия (7) эта пропорция заменится равенством

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{SQ'}} = \lambda. \qquad (8)$$

Так как при любом положении точек Q, S, Q' на оси Oy имеют место равенства

$$\overline{OQ} + \overline{QS} = \overline{OS} \quad \text{и} \quad \overline{OS} + \overline{SQ'} = \overline{OQ'},$$

то

$$\overline{QS} = \overline{OS} - \overline{OQ} = y - y_1$$

и точно так же

$$\overline{SQ'} = \overline{OQ'} - \overline{OS} = y_2 - y.$$

Следовательно, равенство (8) примет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda,$$

откуда

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \text{ или } y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y,$$

т. е.

$$y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2.$$

Вынося в левой части y за скобку, получим:

$$y(1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2,$$

и, наконец,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (9)$$

Чтобы получить координаты x и z искомой точки M, проектируем точки A, M, B на оси Ox и Oz и аналогично получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad (10)$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}; \qquad (11)$$

Полагая в полученных формулах $\lambda = 1$, найдём координаты середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad (12)$$

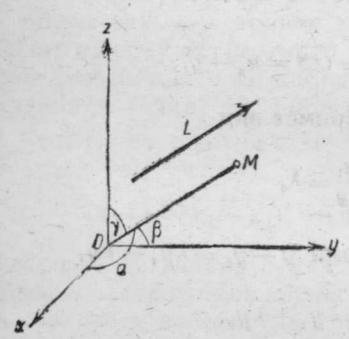
т. е. координаты середины отрезка равны полусуммам координат его концов.

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок между точками $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, 2, 3)$ в отношении $1:2$.

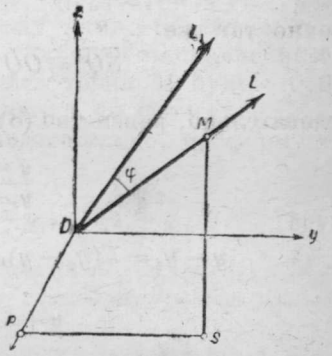
Здесь $x_1=1$, $y_1=2$, $z_1=3$, $x_2=-1$, $y_2=2$, $z_2=3$ и $\lambda=\frac{1}{2}$. Следовательно

$$x=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},\quad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=2,\quad z=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=3.$$

§ 3. Определение направлений в пространстве. Рассмотрим некоторое направление (L) в пространстве, и пусть α,



Черт. 84.



Черт. 85.

β, γ суть углы, которые оно образует с положительными направлениями осей координат (черт. 84).

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ назовём *направляющими косинусами* этого направления. Направляющие косинусы не независимы между собой, они связаны одним соотношением. Чтобы получить это соотношение, проведём через начало координат отрезок $\overline{OM}$, равный 1 и имеющий направление (L). Проекции этого отрезка на оси координат, т. е. координаты точки M, будут $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$. По формуле (5) расстояния точки M от начала координат имеем:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \qquad (13)$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого направления равна 1.* Возьмём теперь два направления (L) и (L_1) и пусть углы первого с положительными направлениями осей будут α, β, γ, а второго α', β', γ'. Чтобы определить угол φ между данными направлениями, проведём из начала координат две прямые, имеющие эти направления (черт. 85).

Возьмём на первой прямой (направления L) точку M на расстоянии OM, равном 1 от начала координат (координаты точки M суть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), и спроектируем координатную ломаную $\overline{OPSM}$ точки M на вторую прямую (направления L_1). Так как проекция ломаной равна проекции замыкающей (ч. I, гл. I, § 7), то

$$\text{пр.}(\overline{OPSM})=\text{пр.}(\overline{OM})=1\cdot\cos\varphi=\cos\varphi.$$

С другой стороны, проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев (ч. I, гл. I, § 7), т. е.

$$\text{пр.}\,\overline{OPSM}=\text{пр.}\,\overline{OP}+\text{пр.}\,\overline{PS}+\text{пр.}\,\overline{SM},$$

или, что то же самое:

$$\text{пр.}\,\overline{OP}+\text{пр.}\,\overline{PS}+\text{пр.}\,\overline{SM}=\text{пр.}\,\overline{OM}=\cos\varphi.$$

Заметив, что имеют место равенства (ч. I, гл. I, § 7):

$$\begin{aligned}\text{пр.}\,\overline{OP}&=\overline{OP}\cdot\cos\alpha'=\cos\alpha\cos\alpha',\\ \text{пр.}\,\overline{PS}&=\overline{PS}\cdot\cos\beta'=\cos\beta\cos\beta',\\ \text{пр.}\,\overline{SM}&=\overline{SM}\cdot\cos\gamma'=\cos\gamma\cos\gamma',\end{aligned}$$

имеем окончательно:

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \qquad (14)$$

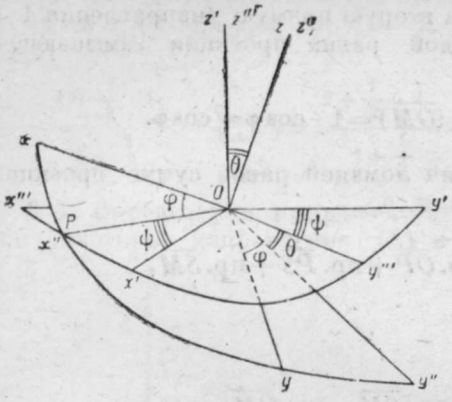
В частности, в случае перпендикулярности направлений (L) и (L_1) $\cos\varphi=0$ и формула (14) даёт условие перпендикулярности двух направлений:

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0. \qquad (15)$$

§ 4. Формулы Эйлера. В приложениях метода координат иногда приходится пользоваться формулами преобразования координат. Самый общий случай преобразования координат будет тот, когда меняются и начало координат, и направления осей. Мы знаем (ч. I, гл. V, § 1), что такое преобразование может быть разложено на два: 1) преобразование начала координат и 2) преобразование осей координат.

Первое из этих преобразований было рассмотрено в § 2 этой главы. Остаётся вывести формулы преобразования осей координат. Эти формулы были найдены Эйлером.

Пусть мы имеем две системы координат xyz и $x'y'z'$ с общим началом O (черт. 86). Рассмотрим плоскости xy и $x'y'$; пусть они пересекаются по прямой OP. Восставим в точке O перпендикуляры к OP в плоскостях xy и $x'y'$: пусть они будут Oy'' и Oy'''. Чтобы систему xyz перевести в положение $x'y'z'$, нам придётся сделать три поворота около трёх различных направлений.



Черт. 86.

Во-первых, поворачиваем систему xyz около оси z так, чтобы ось x совпала с линией пересечения плоскостей xy и $x'y'$, т. е. с линией OP; тогда система примет положение $x''y''z''$ (считая OP за ось x'' и Oz за ось z''). Угол этого поворота, т. е. угол между осью x и линией пересечения плоскостей xy и $x'y'$, обозначим через φ, заметив, что положительное направление этого вращения (вращение п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и) есть направление от оси x к оси y.

Во-вторых, поворачиваем систему $x''y''z''$ около оси x'' (OP) так, чтобы ось z'' совпала с осью z'; при этом плоскость $x''y''$ (xy) совпадёт с плоскостью $x'y'$, и система из положения $x''y''z''$ перейдёт в положение $x'''y'''z'''$ (считая x'' за x''' и z' за z'''). Угол этого поворота, т. е. угол между осями z и z', обозначим через θ, заметив, что положительное направление этого вращения есть направление от оси y'' к оси z''. Очевидно, θ будет также двугранным углом между плоскостями xy и $x'y'$.

Наконец, систему $x'''y'''z'''$ поворачиваем около оси z''' (z') так, чтобы ось x''' совпала с осью x'; при этом ось y''' совпадёт с осью y', и система примет положение $x'y'z'$. Угол этого поворота, т. е. угол между осями x''' и x', обозначим через ψ, заметив, что положительное направление этого вращения есть направление от оси x''' к оси y'''.

Итак, тремя последовательными поворотами около трёх осей Oz, OP и Oz' мы привели систему xyz в совпадение с $x'y'z'$.

Приступим теперь к выводу формул преобразования координат. Задача состоит в том, чтобы выразить старые координаты x, y, z произвольной точки M через её новые координаты x', y', z'. Прежде всего мы перейдём от старой системы xyz к системе $x''y''z''$, полученной после первого поворота. Так как первый поворот совершается около оси z, то ось z остаётся неподвижной; поэтому координата z не изменится, а преобразованию подвергнутся только x и y, и вопрос сводится к преобразованию на плоскости xy. Формулы для x и y мы напишем, если вспомним преобразование координат на плоскости (ч. I, гл. V, § 3):

$$x = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi, \quad y = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi, \quad z = z''. \qquad (16)$$

В формулах (16) мы написали $z = z''$, так как в обеих рассматриваемых системах координат z будет одно и то же.

Далее, от системы $x''y''z''$ мы переходим к системе $x'''y'''z'''$, которая получается из предыдущей после второго поворота. Этот поворот совершается около оси x'' (OP); поэтому координата x'' остаётся неизменной и преобразованию подвергнутся только y'' и z'':

$$x'' = x''', \quad y'' = y''' \cos\theta - z''' \sin\theta, \quad z'' = y''' \sin\theta + z''' \cos\theta. \qquad (17)$$

Наконец, от системы $x'''y'''z'''$ мы переходим к системе $x'y'z'$, которая получается из предыдущей после третьего поворота. Этот поворот совершается около оси z''', и потому имеем:

$$x''' = x' \cos\psi - y' \sin\psi, \quad y''' = x' \sin\psi + y' \cos\psi, \quad z''' = z'. \qquad (18)$$

Чтобы получить окончательные формулы, нужно исключить из формул (16), (17) и (18) вспомогательные координаты x'', y'', z'' и x''', y''', z'''.

С этой целью, вставляя выражения (18) в формулы (17), находим:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ y'' &= x' \sin\psi \cos\theta + y' \cos\psi \cos\theta - z' \sin\theta, \\ z'' &= x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Таким образом, мы исключили x''', y''', z'''. Чтобы исключить x'', y'', z'', вставляем вновь полученные формулы (19) в формулы (16) и получаем:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi \cos\psi - y' \cos\varphi \sin\psi - x' \sin\varphi \sin\psi \cos\theta - \\ &\quad - y' \sin\varphi \cos\psi \cos\theta + z' \sin\varphi \sin\theta, \\ y &= x' \sin\varphi \cos\psi - y' \sin\varphi \sin\psi + x' \cos\varphi \sin\psi \cos\theta + \\ &\quad + y' \cos\varphi \cos\psi \cos\theta - z' \cos\varphi \sin\theta, \\ z &= x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \end{aligned}$$

Вынося в этих формулах множителями координаты x', y', z', окончательно имеем:

$$\begin{aligned} x &= x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) + \\ &\quad + y' (-\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\theta) + z' \sin\varphi \sin\theta, \\ y &= x' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) + \\ &\quad + y' (-\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) - z' \cos\varphi \sin\theta, \\ z &= x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \end{aligned}$$

Эти формулы носят название *формул Эйлера* [1]).

Упражнения

1. Построить точки по координатам: a) (4, 3, 5); b) (1, 2, —1); c) (4, 4, 4); d) (—4, —4, —4).

2. Указать особенности положения точек: a) (4, 0, 0); b) (0, —7, 0); c) (0, —7, 2); d) (—5, 0, 3).

[1]) Формулы Эйлера могут быть получены при помощи формул сферической тригонометрии, если из начала координат O опишем сферу радиусом, равным 1.

3. Даны точки (2, —3, —1) и (a, b, c). Найти координаты точек, симметричных с данными относительно: а) координатных плоскостей; b) осей координат; с) начала координат.

4. Правильная четырёхгранная пирамида $SP_1P_2P_3P_4$, каждое ребро которой имеет длину a, расположена следующим образом: вершина S лежит на оси Oz, основание—на плоскости xOy, причём ребро P_1P_2 перпендикулярно оси Oy, а ребро P_1P_4 перпендикулярно оси Ox. Найти координаты точек S, P_1, P_2, P_3, P_4.

5. Как расположены в пространстве точки, для которых а) $x=y$; b) $y=z$; c) $x=z$?

6. Определить расстояние точки A (4, —3, 5) от начала координат и от осей координат.

7. Найти расстояние между точками (1, 2, 2) и (—1, 0, 1).

8*. Даны четыре точки: (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6). Найти радиус сферы, проходящей через эти точки.

9. Найти координаты точки, делящей отрезок между точками (1, 1, 1) и (1, 2, 0) в отношении 2 : 1.

10. Определить длины сторон и координаты центра тяжести треугольника, вершины которого лежат в точках A (2, 5, 0), B (11, 3, 8), C (5, 1, 12).

11. Отрезок AB делится точкой C в отношении 5 : 2. Точки A и C имеют соответственно координаты (3, 7, 4) и (8, 2, 3). Найти координаты точки B.

12. Две системы координат имеют одинаковые направления, но разные начала. Зная, что одна и та же точка определяется относительно этих систем координатами (1, 1, 1), (7, 3, —5), найти координаты середины расстояния между началами этих систем.

13. Существует ли прямая, образующая с осями координат углы (45°, 45°, 60°)?

14. Луч OM образует с осями координат равные острые углы. Найти направление этого луча.

15. Луч OM образует с отрицательным направлением оси Ox и с положительными направлениями осей Oy и Oz равные острые углы. Определить направления этого луча.

16. Найти направление прямой, проходящей через начало координат и через точку (2, —2, —1).

17. Найти направление прямой, проходящей через начало координат и через точку (a, a, a).

18. Найти величину и направление силы, составляющие которой по осям координат соответственно равны: $X=-6$, $Y=-2$, $Z=9$.

19. Аппликата z некоторой точки A положительна; луч OA имеет длину $r=6$ и образует с осью Ox угол в 60° и с осью Oy угол в 45°. Найти угол этого луча с осью Oz и координаты точки A.

20. Точка A имеет координаты $x=15$, $y=8$ и $z<0$; отрезок OA образует с осью Ox угол в 30°. Определить длину этого отрезка, координату z точки A и направление луча OA.

21. Дана точка A (6, 3, 2). Найти косинусы углов, образуемых лучом OA с плоскостями координат.

22*. Найти расстояние между точками A (2, 5, —1) и B (5, 1, 11) и направление прямой, их соединяющей.

23. Найти расстояние между точками A (—2, 2, 5) и B (2, —1, 5) и направление прямой, их соединяющей.

24. Найти угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

25. Найти угол между прямыми, из которых одна проходит через точки (0, 0, 0) и (10, 5, 10), а другая—через точки (—2, 1, 3) и (0, —1, 2).

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Векторы и скаляры. Величины, с которыми приходится встречаться в механике, физике и других прикладных дисциплинах, бывают двоякого рода. С одной стороны, такие величины, как температура, время, масса, плотность, длина отрезка, площадь, объём и т. д., вполне характеризуются одним числовым значением. С другой стороны, такие величины, как сила, скорость, ускорение и т. д., становятся определёнными только тогда, когда известно, каковы их числовые значения и направления в пространстве. Величины первого рода называются *скалярными*, или, короче, *скалярами*. Величины второго рода называются *векторными*, или, короче, *векторами*.

Всякую векторную величину геометрически мы можем изобразить с помощью отрезка определённой длины и определённого направления, если длину отрезка при выбранной единице масштаба примем равной числовому значению нашего вектора, а направление отрезка будем считать совпадающим с направлением данного физического вектора. Таким образом, мы приходим к понятию *геометрического вектора* как *отрезка, имеющего определённую длину и определённое направление* в пространстве.

Два вектора считаются равными, если выполнены следующие три условия: 1. *Равны их абсолютные величины.* Абсолютная величина, иначе длина или скаляр вектора, есть то число, которое измеряет длину отрезка независимо от его направления; это—скалярная величина. 2. *Они параллельны*, т. е. расположены на параллельных прямых. Следовательно, векторы можно переносить, сохраняя направление. Поэтому все векторы можно считать исходящими из одной точки. 3. *Они одинаково направлены.* Вектор имеет начало и конец. Поменяв их местами, мы получим уже другой вектор (противоположный первому). Таким образом, вектор определяется тремя элементами: скаляром вектора, прямой, на которой лежит вектор, и направлением на этой прямой.

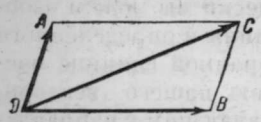
Для изображения векторов мы выберем некоторое начало—точку O, будем проводить из этой точки прямые по заданным направлениям и на них откладывать числовые значения векторов в определённом масштабе. Обозначать векторы мы будем либо одной напечатанной жирно буквой, либо двумя буквами со стрелкой над ними. Так, вектор, идущий из точки O в точку M, мы будем обозначать двумя буквами $\overrightarrow{OM}$, или просто одной буквой, которая стоит в конце вектора, следователь-

но, мы считаем:

$$\mathbf{M}=\overrightarrow{OM},\quad \mathbf{a}=\overrightarrow{Oa}\text{ и т. д.}$$

Если начало вектора не совпадает с выбранным началом O, то во избежание недоразумений мы будем всегда употреблять две буквы $\overrightarrow{AB}$. Теми же буквами без стрелки (или, если вектор обозначен одной буквой, то той же буквой, но напечатанной нежирно) мы будем обозначать длину вектора, т. е. AB есть длина вектора $\overrightarrow{AB}$, M — длина вектора $\mathbf{M}=\overrightarrow{OM}$.

§ 2. Сложение векторов. Известные из механики законы сложения направленных величин (сил, ускорений, скоростей) служат основанием следующего определения сложения векторов. *Суммой двух векторов* **A** *и* **B** *называют такой третий вектор* **C**, *который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы* (черт. 87), *и обозначают*:



Черт. 87.

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}. \qquad (1)$$

В частности, если два вектора **A** и **B** лежат на одной прямой, то сумма их **C** есть вектор, длина которого равна сумме длин слагаемых векторов и направление совпадает с направлением этих векторов, если последние одинаково направлены; если же слагаемые векторы направлены в разные стороны, то сумма их **C** есть вектор, по длине равный разности длин слагаемых векторов и направленный в сторону большего из них.

Посмотрим теперь, будет ли сложение векторов удовлетворять основным законам, которым подчиняется сложение чисел. Для сложения чисел мы имеем два основных закона.

1. *Закон переместительности*:

$$a+b=b+a,$$

т. е. *сумма не зависит от порядка слагаемых.*

2. *Закон сочетательности*:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

т. е. *чтобы прибавить сумму, нужно прибавить отдельно каждое слагаемое.*

Первый закон, очевидно, удовлетворяется, что непосредственно вытекает из симметрии чертежа относительно векторов-

слагаемых:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}. \qquad (2)$$

Чтобы перейти ко второму закону (сочетательности), следует предварительно выяснить понятие суммы нескольких слагаемых. С этой целью упростим сначала самое построение суммы двух векторов. Мы условились считать равными векторы, имеющие одинаковую длину и одинаково направленные. В силу этого векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (черт. 87) равны между собой как противоположные стороны параллелограмма. Отсюда вытекает такое правило сложения двух векторов: *в конце первого слагаемого строим второе слагаемое. Вектор, замыкающий эту ломаную, есть сумма. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом второго.*

Это правило треугольника нетрудно теперь распространить на любое число слагаемых. Пусть требуется найти сумму трёх векторов **A**, **B** и **C**:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{D},$$

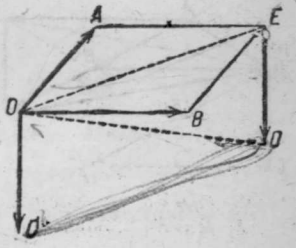
причём под их суммой мы будем подразумевать результат последовательного прибавления к **A** сначала **B** и затем **C**. Другими словами, если

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{E},$$

то согласно определению будет:

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{C}.$$

По предыдущему правилу треугольника строим сначала сумму $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ (черт. 88), т. е. в точке A строим вектор $\overrightarrow{AE}=\mathbf{B}$ и соединяем точку O с точкой E: $\overrightarrow{OE}=\mathbf{E}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Затем к полученной сумме прибавляем вектор **C**, т. е. в конце $\overrightarrow{OE}$ строим вектор $\overrightarrow{ED}=\mathbf{C}$ и соединяем точку O с точкой D. Тогда



Черт. 88.

$$\overrightarrow{OD}=\mathbf{D}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}.$$

Отсюда вытекает такое правило сложения векторов: *Чтобы построить сумму любого числа векторов, нужно в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго построить третий и т. д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию, представляет искомую сумму.*

Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего (черт. 88).

Переходя теперь к доказательству закона сочетательности:

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}, \qquad (3)$$

построим на одном чертеже (черт. 89) первую и вторую суммы равенства (3). Для построения первой суммы, в точке B строим $\overrightarrow{BF}=\mathbf{C}$; получаем:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{B}+\mathbf{C}.$$

Затем в точке A строим $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OF}$:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

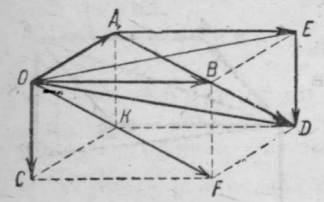
Для построения второй суммы в точке A строим $\overrightarrow{AE}=\mathbf{B}$; получаем:

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

Затем в точке E строим $\overrightarrow{ED'}=\mathbf{C}$:

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED'}=\overrightarrow{OD'}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}.$$

Остаётся показать, что точки D' и D совпадают, как изображено на черт. 89. Для этого достаточно обнаружить, что $\overrightarrow{AD'}$ равен $\overrightarrow{OF}$, что следует из рассмотрения всей фигуры $OAEBCFD'K$, которая представляет собой параллелепипед, где AD' и OF — диагонали противоположных граней. Из той же фигуры параллелепипеда видно, что мы получим тот же вектор-сумму $\overrightarrow{OD}$, если будем складывать в произвольном порядке основные векторы **A**, **B** и **C**. Таким образом, как переместительный, так и сочетательный законы справедливы при сложении любого числа векторов.

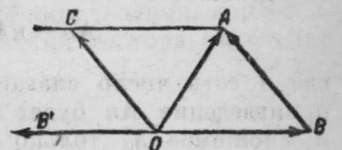


Черт. 89.

Заметим, что по отношению к обычной сумме чисел существуют ещё различные *законы монотонности* — о сравнительной величине слагаемых и суммы, как, например, сумма положительных слагаемых больше каждого из слагаемых. Все эти законы не имеют смысла для суммы векторов, потому что понятия «больше» и «меньше» неприложимы к векторам.

§ 3. Вычитание векторов. Обычно вычитание определяется как действие, обратное сложению: по сумме и одному из слагаемых отыскивается другое слагаемое. Соответственно с этим *разностью двух векторов* **A** *и* **B** *называется такой третий вектор* **C**, *что сумма* **B** *и* **C** *равна* **A**:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}, \text{ если } \mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}.$$



Черт. 90.

Изобразим на чертеже (черт. 90) данные векторы **A** и **B**. Будем рассматривать согласно условию $\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}$ вектор **A** как замыкающую ломаной линии, одним звеном которой является **B**. Второе её звено, очевидно, будет $\overrightarrow{BA}$. Следовательно:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\overrightarrow{BA},$$

так как

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}=\mathbf{A}.$$

Указанное построение можно видоизменить. Для этого продолжаем прямую OB в обратную сторону и откладываем на ней отрезок OB', равный OB. С другой стороны, дополним треугольник OAB до параллелограмма $OBAC$. Очевидно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$ как противоположные стороны параллелограмма, следовательно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB'}$. Заметив, что искомая разность

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC},$$

мы получаем следующее равенство:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\mathbf{A}+\mathbf{B}'.$$

Отсюда вытекает правило: *Чтобы вычесть вектор* $\overrightarrow{OB}$, *надо прибавить равный и противоположно направленный вектор* $\overrightarrow{OB'}$.

Если мы применим правило сложения к векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB'}$, то найдём:

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=0,$$

где нулём обозначен особый вектор, у которого начало и конец совпадают друг с другом. Будем обозначать $\overrightarrow{OB'}$ через $-\overrightarrow{OB}$,

если $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=0$. При таком условии правило вычитания может быть высказано следующим образом: *Чтобы вычесть вектор, нужно его прибавить с обратным знаком.*

§ 4. Умножение вектора на скаляр. Складывая несколько равных векторов, мы приходим к понятию повторения вектора несколько раз, т. е. к *умножению его на целое число.* Согласно определению

$$\mathbf{A}n=n\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{A}+\ldots+\mathbf{A},$$

где n есть число слагаемых векторов, равных **A**. Очевидно, произведение $\mathbf{A}n$ будет вектором того же направления, что и множимое **A**, только длина вектора-произведения увеличится в n раз.

Введём теперь понятие *деления вектора на целое число.* Согласно определению

$$\frac{\mathbf{A}}{n}=\mathbf{A}\frac{1}{n}=\mathbf{B},$$

если $\mathbf{A}=\mathbf{B}n$. Отсюда вытекает, что оба вектора **A** и **B** имеют одно направление, но длина A вектора **A** в n раз больше длины B вектора **B**. Таким образом, при делении вектора на целое число n направление его не меняется, а длина уменьшается в n раз.

После этого легко определить умножение вектора на дробь $x=\frac{p}{q}$, что значит умножить на p и разделить на q, а также умножение вектора на иррациональное число x. Во всех случаях направление вектора остаётся без изменения, длина же умножается на x. Наконец, если множитель x — число отрицательное, то, по условию предыдущего параграфа, кроме изменения длины вектора, нужно ещё изменить его направление на обратное. Итак, установлено умножение вектора на любое действительное число. По отношению к этому умножению имеет место *распределительный закон*, который символически можно записать так:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,x=\mathbf{A}x+\mathbf{B}x. \qquad (4)$$

В справедливости этого равенства мы убедимся, если заметим, что от умножения на скаляр x меняются только размеры векторов, т. е. масштаб чертежа; фигуры остаются подобными. Поэтому, так как векторы **A**, **B** и $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ образуют стороны и диагональ параллелограмма, то, умножив все члены на x, т. е. изменив лишь размеры векторов одинаковым образом, мы получим снова параллелограмм, а значит, сохранится равенство

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}x=\mathbf{C}x.$$

Последнее же равенство и выражает собой распределительный закон умножения, если заменить в нём **C** через $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Будем обозначать одноименной буквой с ноликом вверху ($\mathbf{A}^0$) вектор длины, равной 1, и того же направления, как и вектор **A**. Тогда из определения умножения вектора на скаляр следует:

$$\mathbf{A}=A\mathbf{A}^0. \qquad (5)$$

В самом деле, при умножении вектора $\mathbf{A}^0$ на скаляр A направление вектора не изменится, а длина сделается равной A, т. е. мы получим как раз вектор **A**.

§ 5. Проекции вектора. Согласно определению *проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называется длина отрезка $\overline{ab}$ этой оси, заключённого между проекциями его начальной точки A и конечной точки B, взятая со знаком +, если направление отрезка $\overline{ab}$ совпадает с направлением оси проекции, и со знаком —, если эти направления противоположны.*

Заменяя отрезки их длинами, мы можем основные положения теории проекций, доказанные в ч. I, гл. I, § 7, высказать следующим образом:

1. *Проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между осью и вектором*, т. е.

$$\text{пр.}\,\overrightarrow{AB}=AB\cos\alpha.$$

2. *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось*, т. е., например:

$$\text{пр.}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C})=\text{пр.}\,\mathbf{A}+\text{пр.}\,\mathbf{B}+\text{пр.}\,\mathbf{C},$$

где все проекции отнесены к одной и той же оси. Действительно, сумма векторов есть замыкающая ломаной, у которой составляющими звеньями служат слагаемые векторы (см. § 2).

Рассмотрим прямоугольную систему осей координат и произвольный вектор $\overrightarrow{OM}$ (черт. 91). Из точки M — конца вектора $\overrightarrow{OM}$ — проведём прямую параллельно оси Oz до пересечения в точке P с плоскостью xOy и из точки P в плоскости xOy проведём прямую параллельно оси Oy до пересечения в точке

M_1 с осью Ox. Очевидно, будем иметь:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM}.$$

Откладывая векторы $\overrightarrow{M_1P}$ и $\overrightarrow{PM}$ от точки O, заменим их равными им векторами

$$\overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM_3},$$

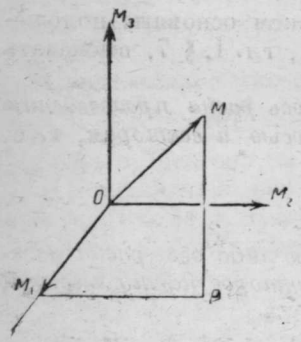
и, значит, будем иметь:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

или иначе:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3. \qquad (I)$$

Равенство (I) показывает, что *всякий вектор можно разложить на сумму трёх слагаемых, лежащих на осях координат.*



Черт. 91.

Слагаемые векторы $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ назовём *компонентами* данного вектора $\mathbf{M}$ относительно системы осей координат $Oxyz$.

От точки O в положительном направлении каждой оси координат отложим по вектору длины, равной 1. Обозначим три введённых попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора соответственно через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и назовём их *основными векторами*. Возвращаясь к равенству (I), заметим, что вектор $\mathbf{M}_1$, как и вектор $\mathbf{i}$, расположен на оси абсцисс, а потому имеем

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}X,$$

где X есть длина вектора $\mathbf{M}_1$, взятая со знаком $+$, если направления векторов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{i}$ совпадают, и взятая со знаком $-$, если направление вектора $\mathbf{M}_1$ противоположно направлению основного вектора $\mathbf{i}$. Другими словами, X есть скаляр, выражающий проекцию вектора $\mathbf{M}$ на ось абсцисс. Аналогично получим:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{i}Y, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{k}Z,$$

где Y и Z представляют проекции вектора $\mathbf{M}$ соответственно на

оси ординат и аппликат. Таким образом, рассматривая три проекции X, Y, Z вектора $\mathbf{M}$ на оси координат, перепишем равенство (I) в виде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z. \qquad (I')$$

Есть существенная разница между компонентами вектора и его проекциями. *Проекции вектора* — это три числа X, Y, Z, которые являются декартовыми координатами конца вектора — точки M, если начало вектора находится в начале координат. Называя *радиусом-вектором точки* M [1]) вектор, идущий от начала координат к точке M, мы можем сказать, что декартовы координаты X, Y, Z точки M суть проекции её радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Компоненты же вектора представляют собой векторы $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, сумма которых равна данному вектору $\mathbf{M}$. Между компонентами и проекциями существует следующая простая зависимость:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{i}X, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{j}Y, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{k}Z, \qquad (6)$$

т. е. *компонент получается умножением проекции на основной единичный вектор.*

Значение равенства (I′) в теории векторов исключительно большое. При помощи этого равенства устанавливается связь между двумя частями теории векторов — геометрической и алгебраической. Ведь векторный анализ состоит из соединения этих двух моментов: геометрического и алгебраического. Взаимно дополняя друг друга, они и создают то, чем так выгодно отличается векторный анализ: геометрическая теория даёт возможность широко использовать геометрические представления, алгебраическая же часть позволяет проводить все выкладки.

Вместо полной записи

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z \qquad (I')$$

часто пользуются сокращённой:

$$\mathbf{M}\{X, Y, Z\}.$$

Здесь X, Y, Z обозначают, как выше было указано, проекции

[1]) Этот термин имеет в данном случае новое значение, отличное от того, которое было дано в § 9 главы III части I. Там радиусом-вектором назывался с к а л я р (одна из полярных координат точки), а здесь это—в е к т о р

вектора $\mathbf{M}$ или, что то же, координаты точки M, являющейся концом радиуса-вектора $\mathbf{M}$. Например:

$$\mathbf{M}\{2, 3, -1\} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

§ 6. Действия над векторами, заданными своими проекциями. В § 5 мы заметили, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Применяя это предложение относительно каждой оси координат, мы заключаем:

При сложении векторов проекции их складываются; символически запишем это так: если

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2,$$

то

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{i}(X_1 + X_2) + \mathbf{j}(Y_1 + Y_2) + \mathbf{k}(Z_1 + Z_2).$$

Из правила сложения векторов непосредственно вытекает правило вычитания векторов: *Чтобы вычесть вектор, нужно вычесть его проекции*, т. е.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{i}(X_1 - X_2) + \mathbf{j}(Y_1 - Y_2) + \mathbf{k}(Z_1 - Z_2),$$

и правило умножения вектора на скаляр: *Чтобы умножить вектор на скаляр, нужно умножить все его проекции на этот скаляр*; *или*

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{i}X_1\lambda + \mathbf{j}Y_1\lambda + \mathbf{k}Z_1\lambda.$$

Пример. Найти радиус-вектор точки, делящей в отношении λ отрезок между точками $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$. Определим радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M, делящий отрезок AB в данном отношении λ, т. е. так, что

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda.$$

Заметив, что

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{MB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r},$$

перепишем наше условие в виде

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r});$$

откуда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{r}_2 - \lambda\mathbf{r} \text{ и } (1+\lambda)\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2.$$

Следовательно:

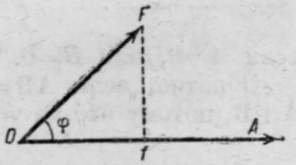
$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}. \tag{7}$$

Обозначая через x_1, y_1, z_1 координаты данной точки A, через x_2, y_2, z_2 координаты другой данной точки B и через x, y, z координаты искомой точки M, перепишем формулу (7) в проекциях:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Последние формулы были выведены в гл. I, § 2.

§ 7. Скалярное произведение векторов. В механике и физике часто приходится иметь дело со следующей задачей: найти работу силы $\mathbf{F}$, если точка, на которую действует сила, совершила перемещение $\overrightarrow{OA} = \mathbf{A}$. Если точка движется по направлению силы, то по определению работа силы равна произведению величины силы на длину перемещения, т. е. AF. Если же точка движется под углом φ к направлению силы, то работает только та слагающая силы $\overrightarrow{OF}$, которая направлена по линии OA, а перпендикулярная слагающая уравновешивается сопротивлением. Проектируя силу на направление пути, получим (черт. 92):



Черт. 92.

$$Of = OF\cos\varphi.$$

Следовательно, работа силы будет равна:

$$OA \cdot Of = OA \cdot OF\cos\varphi = A \cdot F\cos\varphi.$$

Таким образом, по двум данным векторам $\mathbf{F}$ и $\mathbf{A}$ мы определяем скаляр $AF\cos\varphi$. Последний называют скалярным произведением векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$. Итак, по определению *скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними*.

Скалярное произведение принято обозначать одним из трёх способов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB} = (\mathbf{AB}).$$

Согласно определению имеем:

$$\mathbf{AB} = AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}), \tag{8}$$

где под $\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$ подразумевается угол между векторами **A** и **B**.

Заметив, что $B\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ есть проекция вектора **B** на направление вектора **A**, мы можем написать:

$$\mathbf{AB} = A\,\mathrm{пр}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}; \tag{8'}$$

аналогично:

$$\mathbf{AB} = B\,\mathrm{пр}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}, \tag{8''}$$

или словами: *скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, помноженной на проекцию другого вектора на направление первого.*

В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0$ есть единичный вектор, то

$$\mathbf{AB}^0 = 1 \cdot \mathrm{пр}_{\mathbf{B}^0}\mathbf{A} = \mathrm{пр}_{\mathbf{B}^0}\mathbf{A},$$

т. е. *при скалярном умножении вектора* **A** *на единичный вектор получаем проекцию этого вектора* **A** *на направление единичного вектора.*

§ 8. Основные свойства скалярного произведения. I. *Скалярное произведение обращается в нуль в том случае, если один из векторов равен нулю или если векторы перпендикулярны.* В самом деле,

$$AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = 0,$$

если $A=0$, или $B=0$, или $\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = 0$.

Обратно, если $\mathbf{AB} = 0$ и множители отличны от нуля, то $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, потому что из условия

$$AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = 0$$

при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ вытекает:

$$\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = 0, \text{ т. е. } \mathbf{A} \perp \mathbf{B}.$$

II. *Скалярное произведение обладает свойством переместительности:*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \tag{9}$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения:

$$\mathbf{AB} = AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}), \quad \mathbf{BA} = BA\cos(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{A}}),$$

потому что

$$\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) = \cos(\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{A}}).$$

III. Исключительно важное значение имеет *распределительный закон*. Его применение столь же велико, как и в обычной арифметике или алгебре, где он формулируется так: *Чтобы умножить сумму, нужно умножить каждое слагаемое и сложить полученные произведения*, т. е.

$$(a+b)\,c = ac + bc.$$

Очевидно, что умножение многозначных чисел в арифметике или многочленов в алгебре основано на этом свойстве умножения.

Такое же основное значение имеет этот закон и в векторной алгебре, так как на основании его мы можем применять к векторам обычное правило умножения многочленов.

Докажем, что *для любых трёх векторов* **A**, **B**, **C** *справедливо равенство*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \tag{10}$$

По второму определению скалярного произведения, выражаемому формулой (8''), получим:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = C\ \mathrm{пр}_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}).$$

Применив теперь свойство 2 проекций из § 5, найдём:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = C\,(\mathrm{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + \mathrm{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{B}) = C\ \mathrm{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{A} + C\ \mathrm{пр}_{\mathbf{C}}\mathbf{B} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC},$$

что и требовалось доказать.

IV. *Скалярное произведение обладает свойством сочетательности относительно скалярного множителя*; это свойство выражается следующей формулой:

$$(\mathbf{AB})\,\lambda = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\lambda), \tag{11}$$

т. е. *чтобы умножить скалярное произведение векторов на скаляр, достаточно умножить на этот скаляр один из множителей.*

Для доказательства мы вычислим отдельно левую и правую части последнего равенства:

$$(\mathbf{AB})\,\lambda = AB\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})\,\lambda,$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\lambda) = \mathbf{A}\,(B\lambda\mathbf{B}^0) = A \cdot B\lambda\cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}^0})$$

и заметим, что углы $\widehat{\mathbf{AB}}$ и $\widehat{\mathbf{AB}^0}$ равны, потому что векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^0$ одного направления.

Как частный случай доказанного свойства отметим следующее предложение: *чтобы умножить вектор скалярно на вектор, нужно умножить его на единичный вектор того же направления и полученное произведение умножить на длину вектора*, т. е.

$$\mathbf{DC} = (\mathbf{DC}^0)\,C.$$

§ 9. Скалярное произведение векторов, заданных проекциями. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора $\mathbf{A}$, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора $\mathbf{B}$, выразим скалярное произведение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{i}X_1 + \mathbf{j}Y_1 + \mathbf{k}Z_1)(\mathbf{i}X_2 + \mathbf{j}Y_2 + \mathbf{k}Z_2).$$

По свойству распределительности, суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, получаем:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{ii}X_1X_2 + \mathbf{ji}Y_1X_2 + \mathbf{ki}Z_1X_2 + \mathbf{ij}X_1Y_2 + \mathbf{jj}Y_1Y_2 + \\ + \mathbf{kj}Z_1Y_2 + \mathbf{ik}X_1Z_2 + \mathbf{jk}Y_1Z_2 + \mathbf{kk}Z_1Z_2. \qquad (12)$$

Так как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора, то

$$\mathbf{ij} = 0, \quad \mathbf{jk} = 0, \quad \mathbf{ki} = 0,$$
$$\mathbf{ii} = 1; \quad \mathbf{jj} = 1, \quad \mathbf{kk} = 1;$$

следовательно, в полученном выражении (12) для $\mathbf{AB}$ пропадут шесть слагаемых и окончательная формула будет:

$$\mathbf{AB} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2; \qquad (13)$$

или, словами: *скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений одноименных проекций.*

Прилагая обычное определение степени, естественно называть скалярное произведение вектора самого на себя его *квадратом*. Применяя полученную формулу (13) при $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, найдём:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

С другой стороны, согласно определению скалярного произведения (§ 7) получаем:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = AA\cos 0 = A^2.$$

Следовательно, мы имеем следующую формулу для определения длины вектора:

$$A^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \qquad (14)$$

откуда

$$A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}, \qquad (14')$$

т. е. *квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций.*

Заметив, что проекции единичного вектора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ будут его направляющими косинусами (§ 3 гл. I), мы из формулы (14) получаем:

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

что совпадает с формулой (13) § 3 гл. I.

Пусть теперь даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Чтобы определить расстояние между ними, заметим, что вектор

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z$$

есть разность векторов

$$\overrightarrow{OM_2} = \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2$$

и

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1.$$

Следовательно, мы имеем:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Применяя формулу (14'), получим:

$$A = \overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно квадратному корню из суммы квадратов разностей координат этих точек*, что совпадает с формулой (6) § 2 гл. I.

§ 10. Направление вектора. Согласно определению скалярного произведения векторов имеем:

$$\mathbf{AB} = AB\cos\varphi, \qquad (8)$$

где φ есть угол между векторами **A** и **B**. Из этой формулы получаем:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{AB}}{AB}, \tag{15}$$

т. е. *косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, делённому на произведение длин.*

Выражая числитель и знаменатель последней дроби посредством проекций векторов [§ 9, формулы (13) и (14′)], находим:

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{15′}$$

В частности, полагая в формулах (15) и (15′) $\mathbf{B}=\mathbf{i}$ и замечая, что в этом случае $B=1$, $X_2=1$, $Y_2=0$, $Z_2=0$, находим:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{Ai}}{A}, \tag{16}$$

или

$$\cos\alpha=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}, \tag{16′}$$

где α есть угол оси Ox с вектором **A**. Аналогично, взяв $\mathbf{B}=\mathbf{j}$ и $\mathbf{B}=\mathbf{k}$, получим:

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{Aj}}{A},\quad \cos\gamma=\frac{\mathbf{Ak}}{A}; \tag{17}$$

или в координатной форме:

$$\cos\beta=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}},\quad \cos\gamma=\frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}}. \tag{17′}$$

Последние формулы дают возможность определить направляющие косинусы вектора по его проекциям. Далее,

$$\cos\varphi=\mathbf{A}^0\mathbf{B}^0 \text{ и } \cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma', \tag{18}$$

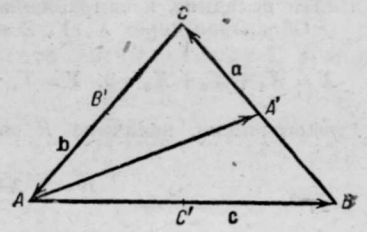
где α, β, γ суть углы осей координат с вектором $\mathbf{A}^0$, а α', β', γ'—углы тех же осей с вектором $\mathbf{B}^0$. Последняя формула (18) совпадает с формулой (14) § 3 гл. I.

Для иллюстрации изложенных результатов рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Какому условию должны удовлетворять три вектора **a**, **b**, **c**, чтобы из них можно было образовать треугольник?

Очевидно, необходимым и достаточным условием для этого является то, чтобы ломаная линия $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ замыкалась, т. е. сумма векторов **a**, **b** и **c** равнялась нулю:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0.$$



Черт. 93.

Пример 2. Доказать, что возможно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC.

Обозначая середины сторон треугольника ABC (черт. 93) через A', B' и C', выразим векторы, представляющие медианы треугольника, т. е. $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$, через векторы **a**, **b**, **c**. Легко видеть из черт. 93, что

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2},$$

так как

$$\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

Аналогично найдём:

$$\overrightarrow{BB'}=\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2},\quad \overrightarrow{CC'}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}.$$

Остаётся проверить условие примера 1, необходимое и достаточное для того, чтобы из векторов $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ можно было образовать треугольник:

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}=\frac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0.$$

Так как условие примера 1 выполняется, то из векторов $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$ действительно можно составить треугольник.

Пример 3. Найти радиус-вектор **r** середины C отрезка AB, зная точки $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$.

Очевидно, имеем:

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=$$

$$=\mathbf{r}_1+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2).$$

Пример 4. На точку действуют три силы, проекции которых на прямоугольные оси равны

$$X_1=1,\ Y_1=2,\ Z_1=3;\ X_2=-2,\ Y_2=3,\ Z_2=-4;$$
$$X_3=3,\ Y_3=-4,\ Z_3=5.$$

Найти величину и направление равнодействующей.

Обозначая через X, Y, Z проекции равнодействующей, имеем:

$$X=X_1+X_2+X_3=2,\ Y=Y_1+Y_2+Y_3=1,\ Z=Z_1+Z_2+Z_3=4.$$

Следовательно, величина R равнодействующей $\mathbf{R}$ будет:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{21},$$

а её направление определяется по формулам:

$$\cos(\widehat{\mathbf{R},\ x})=\frac{X}{R}=\frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos(\widehat{\mathbf{R},\ y})=\frac{Y}{R}=\frac{1}{\sqrt{21}},$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{R},\ z})=\frac{Z}{R}=\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Пример 5. Найти угол между векторами $\mathbf{A}\{1, 2, 3\}$, $\mathbf{B}\{2, -1, 4\}$. По формуле (15′) получим:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=\frac{12}{7\sqrt{6}}=\frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

Пример 6. Дан треугольник OAB. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$. Возводя в квадрат обе части, получим:

$$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})^2=\overrightarrow{AO}^2+2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2,$$

или

$$AB^2=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB\cos(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{OB}}).$$

Обозначая через φ внутренний угол треугольника OAB при вершине O, последней формуле придадим обычный вид:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\varphi,$$

так как

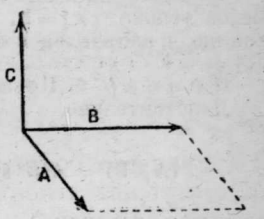
$$(\widehat{\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{OB}})=\pi-\varphi.$$

§ 11. Векторное произведение. *Векторным произведением двух векторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называется новый вектор* $\mathbf{C}$, *численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, *перпендикулярный плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы вращение от* $\mathbf{A}$ *к* $\mathbf{B}$ *по кратчайшему пути вокруг полученного вектора* $\mathbf{C}$ *происходило в ту же сторону, как вращение от оси* X *к оси* Y *вокруг оси* Z (*т. е. против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора* $\mathbf{C}$) (черт. 94).

Из этого определения следует, что *длина вектора* $\mathbf{C}$ *равна*:

$$C=AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}),\qquad (19)$$

т. е. произведению длин перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними.



Черт. 94.

Векторное произведение $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ обозначается символом $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$. *Векторное произведение обращается в нуль только в том случае, если один из векторов равен нулю или если векторы параллельны (коллинеарны).* В самом деле:

$$AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}})=0,$$

если $A=0$ или $B=0$, или $\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}})=0$. Обратно, если $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ и множители отличны от нуля, то $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$, потому что из условия $AB\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}})=0$ при $A\neq 0$ и $B\neq 0$ вытекает $\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}})=0$, т. е. $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$. Таким образом, условие коллинеарности векторов будет:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0. \qquad (20)$$

В частности, всегда

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0, \qquad (20')$$

вследствие чего является излишним вводить понятие о векторном квадрате вектора, в то время как мы рассматривали скалярный квадрат в связи со скалярным умножением.

Замечание. Условие (20) коллинеарности двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ возможно заменить следующим:

$$\mathbf{A}=e\cdot\mathbf{B},$$

где e — некоторое число (§ 4).

Если векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны, то $\sin(\widehat{\mathbf{A},\ \mathbf{B}})=1$, и, значит, длина вектора-произведения равна

произведению длин векторов-множителей:

$$[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]=AB, \text{ если } \mathbf{A}\perp\mathbf{B}. \qquad (21)$$

Пример 1. Проверить справедливость равенств $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ суть основные координатные векторы.

Так как векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ направлены по осям координат OX и OY, то вектор $[\mathbf{ij}]$ будет направлен по оси OZ. С другой стороны, длина этого вектора равна площади прямоугольника, построенного на $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, т. е. 1. Следовательно, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$. Также очевидно, что $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$ имеет длину, равную единице, и направлен в отрицательную сторону оси OX; следовательно, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$.

Пример 2. Показать, что $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=A^2B^2$.

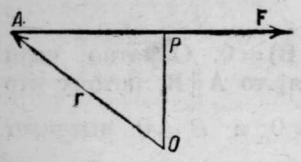
Действительно,

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2=A^2B^2\sin^2(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}),\quad (\mathbf{AB})^2=A^2B^2\cos^2(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}});$$

складывая, находим:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=A^2B^2.$$

В механике важное значение имеет понятие момента силы относительно данной точки. Если сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A (черт. 95), то моментом силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называется вектор $\mathbf{M}$, определяемый формулой



Черт. 95.

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F},$$

где $\mathbf{r}=\overrightarrow{OA}$ есть радиус-вектор точки приложения. Из определения векторного произведения следует, что величина момента равна величине силы, умноженной на расстояние OP точки O от прямой, вдоль которой действует сила.

§ 12. Основные свойства векторного произведения. 1. *От перестановки множителей векторное произведение меняет свой знак*, т. е.

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \qquad (22)$$

В самом деле, величина параллелограмма и его плоскость не меняются, направление же вектора-произведения мы должны изменить на противоположное. Таким образом, векторное произведение не обладает свойством переместительности.

2. *Векторное произведение обладает свойством сочетательности по отношению к скалярному множителю, т. е. скалярный*

множитель можно выносить из-под знака векторного произведения:

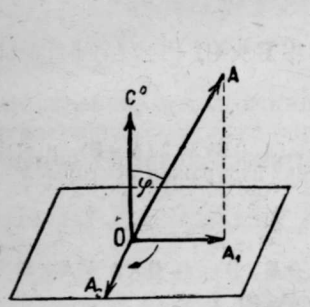
$$l\mathbf{A}\times\mathbf{B}=l(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \text{ и } \mathbf{A}\times l\mathbf{B}=l(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \qquad (23)$$

При положительном l эти формулы очевидны, так как они выражают, что при увеличении одной стороны параллелограмма в l раз площадь параллелограмма тоже увеличивается в l раз. Что касается случая отрицательного l, то достаточно заметить, что при изменении знака одного из множителей величина векторного произведения остаётся неизменной, направление же этого произведения меняется на противоположное.

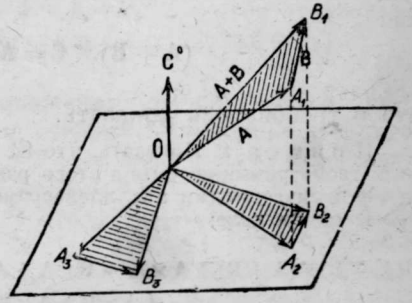
3. *Векторное произведение подчиняется распределительному закону*, т. е.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}. \qquad (24)$$

Для доказательства заметим сначала, что произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0$, где $\mathbf{C}^0$ — единичный вектор, можно построить так (черт. 96).



Черт. 96.



Черт. 97.

Спроектируем вектор $A=\overrightarrow{OA}$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{C}^0$, и полученную вектор-проекцию $\overrightarrow{OA_1}$ повернём в этой плоскости вокруг точки O по часовой стрелке на 90°.

Полученный вектор $\overrightarrow{OA_2}$ и равен $\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0$. В самом деле,

a) $OA_2=OA_1=A\cos(90^\circ-\varphi)=A\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}^0$;

b) вектор $\overrightarrow{OA_2}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}^0$ и направлен в ту сторону, из которой вращение от $\mathbf{A}$ к $\mathbf{C}^0$ представляется совершающимся против часовой стрелки.

Итак, $\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0$.

Пусть теперь даны единичный вектор $\mathbf{C}^0$, перпендикулярная к нему плоскость p и треугольник OA_1B_1 (черт. 97), в котором

$$\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{A},\quad \overrightarrow{A_1B_1}=\mathbf{B} \text{ и } \overrightarrow{OB_1}=\mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

Спроектируем $\triangle OA_1B_1$ на плоскость p и повернём проекцию OA_2B_2 в плоскости p по часовой стрелке на 90°.

Получим $\triangle OA_3B_3$, в котором, по предыдущему,

$$\overrightarrow{OB}_3=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}^0,\quad \overrightarrow{OA}_3=\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0,\quad \overrightarrow{A_3B_3}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}^0.$$

Так как

$$\overrightarrow{OB}_3=\overrightarrow{OA}_3+\overrightarrow{A_3B_3},$$

то

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}^0=\mathbf{A}\times\mathbf{C}^0+\mathbf{B}\times\mathbf{C}^0. \qquad (25)$$

Заметив, что $\mathbf{C}=C\cdot\mathbf{C}^0$, умножим теперь обе части равенства (25) на скаляр C. Применив свойство 2 векторного произведения, получим:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times C\mathbf{C}^0=\mathbf{A}\times C\mathbf{C}^0+\mathbf{B}\times C\mathbf{C}^0,$$

или

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Показать, что $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=2(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, и выяснить геометрический смысл этого равенства, изображая векторы $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ диагоналями параллелограмма.

В самом деле:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}\times\mathbf{A}-\mathbf{B}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}=$$
$$=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}=2(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).$$

Геометрически это значит, что удвоенная площадь параллелограмма равна площади параллелограмма, построенного на его диагоналях.

Пример 2. Пусть вершины ABC треугольника заданы своими радиусами-векторами $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{C}(\mathbf{r}_3)$. Найти вектор $\mathbf{S}$, представляющий треугольную площадку ABC, на которой задано направление обхода контура от A к B и от B к C.

Так как $\mathbf{AB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{BC}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$, то искомый вектор $\mathbf{S}$ будет:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)=$$
$$=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_2)+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=$$
$$=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2).$$

§ 13. Векторное произведение векторов, заданных проекциями. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора $\mathbf{A}$, а через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора $\mathbf{B}$, выразим векторное произведение $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\mathbf{i}X_1+\mathbf{j}Y_1+\mathbf{k}Z_1)\times(\mathbf{i}X_2+\mathbf{j}Y_2+\mathbf{k}Z_2).$$

По свойству распределительности, суммы векторов умножаются как многочлены. Следовательно, получаем:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\mathbf{i}\times\mathbf{i})X_1X_2+(\mathbf{j}\times\mathbf{i})Y_1X_2+(\mathbf{k}\times\mathbf{i})Z_1X_2+$$
$$+(\mathbf{i}\times\mathbf{j})X_1Y_2+(\mathbf{j}\times\mathbf{j})Y_1Y_2+(\mathbf{k}\times\mathbf{j})Z_1Y_2+$$
$$+(\mathbf{i}\times\mathbf{k})X_1Z_2+(\mathbf{j}\times\mathbf{k})Y_1Z_2+(\mathbf{k}\times\mathbf{k})Z_1Z_2. \qquad (26)$$

Так как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ представляют три взаимно перпендикулярных единичных вектора и вращение от $\mathbf{j}$ к $\mathbf{k}$ представляется с конца вектора $\mathbf{i}$ совершающимся против часовой стрелки, то

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0,\ \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0,\ \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,\\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j};\end{array}\right\} \qquad (27)$$

следовательно, в полученном выражении (26) для $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ пропадут три слагаемых, остальные же соединятся попарно, и окончательная формула будет:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}(Y_1Z_2-Y_2Z_1)+\mathbf{j}(Z_1X_2-Z_2X_1)+\mathbf{k}(X_1Y_2-X_2Y_1). \qquad (28)$$

Формулу (28) можно записать также в символической, легко запоминаемой форме, если воспользоваться понятием определителя 3-го порядка [1]):

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Для практических вычислений можно рекомендовать такой порядок:

1) составляем таблицу из двух строк и трёх столбцов, подписывая проекции множителя под проекциями множимого:

$$\begin{Vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{Vmatrix};$$

2) для получения первой проекции произведения закрываем в этой таблице первый столбец и вычисляем оставшийся опре-

[1]) Понятие определителя дано в ч. I, гл. VI.

делитель 2-го порядка; чтобы получить вторую проекцию произведения, закрываем второй столбец и оставшийся определитель берём с обратным знаком; наконец, для получения третьей проекции произведения закрываем в нашей таблице третий столбец и берём оставшийся определитель 2-го порядка со своим знаком.

Например, если сомножители суть $\mathbf{A}\{3, 4, 8\}$, $\mathbf{B}\{5, 1, 7\}$, то, пользуясь таблицей

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 7 \end{Vmatrix},$$

находим проекции $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$: 20, 19, -17.

Заметим, что в силу (28) условие (20) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$ параллельности векторов $\mathbf{A}\{X_1, Y_1, Z_1)\}$ и $\mathbf{B}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ может быть выражено равенствами:

$$Y_1Z_2-Z_1Y_2=0,\ Z_1X_2-X_1Z_2=0,\ X_1Y_2-Y_1X_2=0,$$

или

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}, \qquad (30)$$

т. е. если векторы коллинеарны, то их проекции пропорциональны, и обратно.

Пример 1. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

Так как вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, а вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет проекции x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1, то

$$\text{пл.}\triangle ABC=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

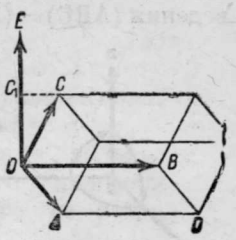
Пример 2. Определить синус угла A треугольника ABC с вершинами $A(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, 4, 7)$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют соответственно проекции 2, 2, 2 и 1, 2, 4, то

$$\sin A=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{AB\cdot AC}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+4^2}}=\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{21\cdot 12}}=\frac{\sqrt{2}}{3};$$

угол следует взять острым, если $BC^2<AB^2+AC^2$, и тупым, если $BC^2>AB^2+AC^2$. В данном случае угол A острый.

§ 14. Векторно-скалярное произведение. Если мы умножим скалярно два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то их произведение будет скаляром. Этот скаляр далее будет умножаться как обыкновенное число, и ничего нового при дальнейшем умножении мы не получим. Совсем иное дело будет, если мы перемножим два вектора векторно; в результате мы получим снова вектор $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Представляется интересным исследовать дальнейшие произведения, как скалярное, так и векторное, этого вектора на новый вектор $\mathbf{C}$. В первом случае мы будем иметь векторно-скалярное произведение, обозначаемое через $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathbf{C}=(\mathbf{ABC})$, во втором случае двойное векторное произведение, обозначаемое через $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$.



Черт. 98.

Для приложения векторно-скалярного произведения весьма важным является уяснить себе его геометрический смысл. Векторное произведение $\mathbf{E}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ есть вектор $\mathbf{E}$, по величине равный площади параллелограмма $OADB$, построенного на векторах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма (черт. 98). Скалярное произведение $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathbf{C}=\mathbf{EC}$ есть произведение скаляра E первого множителя на длину проекции второго вектора $\mathbf{C}$ на первый. Эта проекция C_1, как проекция вектора $\mathbf{C}$ на перпендикуляр к плоскости, равна расстоянию точки C (конца вектора $\mathbf{C}$) от плоскости параллелограмма $OADB$.

Построим параллелепипед на векторах $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, как на рёбрах. Высота этого параллелепипеда есть наша проекция C_1, а площадь основания — параллелограмма $OADB$ — численно равна длине вектора $\mathbf{E}$. Итак, произведение $\mathbf{EC}=EC_1$ равно произведению площади основания параллелепипеда на его высоту, т. е. измеряет объём параллелепипеда.

При этом важно отметить, что наше скалярное произведение даёт объём параллелепипеда иногда с положительным, а иногда с отрицательным знаком. Положительный знак получается, если угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{C}$ острый; отрицательный — если он тупой. При остром угле между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{C}$ вектор $\mathbf{C}$ расположен по ту же сторону плоскости $OADB$, что и вектор $\mathbf{E}$, и следовательно, из его вершины C вращение от $\mathbf{A}$ к $\mathbf{B}$ будет видно так же, как и из точки E, т. е. в положительном направлении (против часовой стрелки).

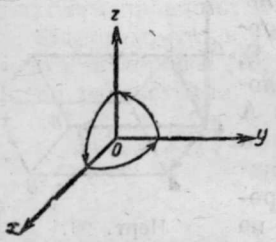
При тупом угле между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{C}$ вектор $\mathbf{C}$ расположен по другую сторону плоскости $OADB$, чем вектор $\mathbf{E}$, и следовательно, из его вершины C вращение от $\mathbf{A}$ к $\mathbf{B}$ будет видно в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Иными словами, произведение $(\mathbf{ABC})$ положительно, если векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$

образуют систему, одноименную с основной (взаимно расположены так же, как оси x, y, z), и оно отрицательно, если векторы **A**, **B** и **C** образуют систему, разноименную с основной.

Итак, мы получили следующую теорему:

Векторно-скалярное произведение $(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ *есть число, выражающее объём параллелепипеда, построенного на векторах* **A**, **B**, **C**, *как на рёбрах. Знак произведения положителен, если векторы* **A**, **B**, **C** *образуют систему, одноименную с основной, и отрицателен в противном случае.*

Из этой теоремы следует, что абсолютная величина произведения $(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C}$ останется та же, в каком бы порядке мы ни брали множители **A**, **B**, **C**. Что касается знака, то он будет в одних случаях положительным, в других — отрицательным; это зависит от того, образуют ли наши три вектора, взятые в определённом порядке, систему, одноименную с основной, или нет. Заметим, что у нас оси координат расположены так, что они следуют одна за другой против часовой стрелки, если смотреть *во внутреннюю часть* трёхгранного угла (черт. 99). Порядок следования не нарушится, если мы начнём обход со второй оси или с третьей, лишь бы он совершался в том же направлении, т. е. против часовой стрелки. При этом наши множители переставляются в круговом порядке. Таким образом, получаем теорему:



Черт. 99.

Круговая перестановка трёх множителей векторно-скалярного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних множителей меняет знак произведения:

$$(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{BCA}) = (\mathbf{CAB}) = -(\mathbf{BAC}) = -(\mathbf{CBA}) = -(\mathbf{ACB}). \quad (31)$$

При каких условиях векторно-скалярное произведение может обратиться в нуль? — Очевидно: а) если среди множителей есть хотя бы один нуль-вектор; b) если по крайней мере два из перемножаемых векторов коллинеарны (и, следовательно, их векторное произведение равно нулю), в частности:

$$(\mathbf{AAB}) = (\mathbf{ABA}) = (\mathbf{BAA}) = 0; \quad (32)$$

с) если три вектора **A**, **B**, **C** компланарны (параллельны одной и той же плоскости), потому что тогда $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{C}$ и, следовательно:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C} = 0.$$

Объединяя все три случая, можем сказать, что $(\mathbf{ABC}) = 0$, если векторы **A**, **B**, **C** компланарны. Обратно, пусть $(\mathbf{ABC}) = 0$. Тогда, если никакой из векторов не равен нулю и никакие два из векторов не коллинеарны, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и **C** должны быть перпендикулярны, так как их скалярное произведение равно нулю, а так как, кроме того, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ перпендикулярен к **A** и **B**, то векторы **A**, **B**, **C** компланарны. Следовательно, можно утверждать, что *равенство*

$$(\mathbf{ABC}) = 0 \quad (33)$$

есть необходимое и достаточное условие компланарности векторов **A**, **B**, **C**.

Впрочем последний результат непосредственно вытекает из геометрического смысла векторно-скалярного произведения, как объёма параллелепипеда, построенного на рёбрах **A**, **B**, **C**.

Пример 1. Показать, что объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ абсолютной величины векторно-скалярного произведения, составленного из трёх векторов-рёбер, выходящих из одной вершины.

В самом деле, треугольную пирамиду $ABCD$ можно рассматривать, как $\frac{1}{6}$ часть параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ как на рёбрах. Следовательно, имеем:

$$\text{объём } ABCD = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD})|.$$

Пример 2. Раскрыть скобки в выражении $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,(\mathbf{B}+\mathbf{C})\,(\mathbf{C}+\mathbf{A})$.

Это выражение представляет $[(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times (\mathbf{B}+\mathbf{C})]\,(\mathbf{C}+\mathbf{A})$. Векторное произведение будет равно:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}.$$

Умножая его скалярно на $(\mathbf{C}+\mathbf{A})$, получим:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C} + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})\,\mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathbf{C} + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{A} + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})\,\mathbf{A} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathbf{A} =$$
$$= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C} + (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathbf{A} = (\mathbf{ABC}) + (\mathbf{BCA}) = (\mathbf{ABC}) + (\mathbf{ABC}) = 2\,(\mathbf{ABC}).$$

§ 15. Векторно-скалярное произведение в проекциях. Обозначая через X_1, Y_1, Z_1 проекции вектора **A**, через X_2, Y_2, Z_2 проекции вектора **B** и через X_3, Y_3, Z_3 проекции вектора **C**, найдём сначала проекции векторного произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Согласно формуле (28) эти проекции будут:

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Зная теперь проекции первого множителя $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ и проекции X_3, Y_3, Z_3 второго множителя $\mathbf{C}$, найдём по формуле (13) их скалярное произведение:

$$(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,\mathbf{C} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Но левая часть этого равенства есть не что иное, как разложение определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

по элементам последней горизонтали. Итак, окончательно мы будем иметь

$$(\mathbf{ABC}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{34}$$

т. е. векторно-скалярное произведение трёх векторов, заданных своими проекциями, равно определителю 3-го порядка, составленному из этих проекций. При этом следует помнить, что в 1-й, 2-й и 3-й строках определителя пишутся в обычном порядке проекции 1-го, 2-го и 3-го из перемножаемых векторов. Пользуясь формулой (34), мы видим, что *условие* (33), *необходимое и достаточное для компланарности векторов* $\mathbf{A}\{X_1, Y_1, Z_1\}$; $\mathbf{B}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{C}\{X_3, Y_3, Z_3\}$, *запишется в виде*

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{35}$$

Пример 1. Вычислить $(\mathbf{ABC})$, если $\mathbf{A}\{3, 4, 2\}$, $\mathbf{B}\{3, 5, -1\}$, $\mathbf{C}\{2, 3, 5\}$.

Пользуясь формулой (34), находим:

$$(\mathbf{ABC}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 14.$$

Пример 2. Вывести условие того, чтобы четыре точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ лежали в одной плоскости.

Искомое условие равносильно условию компланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и, следовательно, согласно формуле (35), может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3. При тех же обозначениях объём V треугольной пирамиды $ABCD$ выражается формулой:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, согласно примеру 1 из § 14, мы имеем:

$$V = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ имеют соответственно проекции $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$; $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$, $z_3 - z_1$; $x_4 - x_1$, $y_4 - y_1$, $z_4 - z_1$, то находим:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix},$$

где знак берётся одинаковый со знаком определителя.

§ 13. Двойное векторное произведение. Мы рассмотрели векторно-скалярное произведение; теперь перейдём к векторно-векторному произведению

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}.$$

В первом случае мы получили прекрасное геометрическое истолкование произведения; здесь же мы дадим формулу, значительно облегчающую вычисление. Эта формула имеет вид

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \tag{36}$$

Обозначая искомый результат через $\mathbf{D}$, найдём его проекции D_x, D_y, D_z. С этой целью сначала определяем проекции вектора $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ и получаем по формуле (28):

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x = A_yB_z - A_zB_y, \quad (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_y = A_zB_x - A_xB_z,$$
$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_z = A_xB_y - A_yB_x.$$

Далее, применяя снова ту же формулу (28), находим:

$$D_x = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_yC_z - (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_zC_y =$$
$$= (A_zB_x - A_xB_z)C_z - (A_xB_y - A_yB_x)C_y =$$
$$= B_x(A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_yC_y + B_zC_z).$$

Прибавив и вычтя по $A_xB_xC_x$, получим:

$$D_x = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - A_x(B_xC_x + B_yC_y + B_zC_z).$$

Более кратко последнее выражение запишется так:

$$D_x = B_x(\mathbf{AC}) - A_x(\mathbf{BC}).$$

Аналогичные формулы получаются и для двух других проекций:

$$D_y = B_y(\mathbf{AC}) - A_y(\mathbf{BC}), \quad D_z = B_z(\mathbf{AC}) - A_z(\mathbf{BC}).$$

Зная проекции вектора $\mathbf{D}$, пишем самый вектор $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}D_x + \mathbf{j}D_y + \mathbf{k}D_z.$$

Внося вместо D_x, D_y, D_z только что полученные значения, имеем:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)(\mathbf{AC}) - (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)(\mathbf{BC});$$

или

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

Заменяя, наконец, $\mathbf{D}$ его значением, найдём требуемую формулу (36).

Заметим, что в двойном векторном произведении весьма важно различать порядок перемножения. Так, например, вычисляя $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, мы получим совершенно другой вектор, а именно:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} = (\mathbf{C}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Итак, получается формула

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \tag{37}$$

Из сопоставления формул (36) и (37) можно вывести следующее правило для запоминания разложения двойного векторного произведения:

Двойное векторное произведение равно произведению среднего вектора на скалярное произведение двух других, минус крайний вектор скобки, умноженный на скалярное произведение двух других.

При круговой перестановке векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ формула (36) приводит к трём разным векторам:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}),$$
$$(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} = \mathbf{C}(\mathbf{BA}) - \mathbf{B}(\mathbf{CA}),$$
$$(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{CB}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}).$$

Складывая вместе эти три равенства, получим тождество

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times\mathbf{A} + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} = 0. \tag{38}$$

Одно из применений формулы (37) состоит в выводе *разложения данного вектора* $\mathbf{B}$ *на две компоненты, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору* $\mathbf{A}$. В самом деле, положив в формуле (37) $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, найдём:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) = \mathbf{B}(\mathbf{AA}) - \mathbf{A}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}^2) - \mathbf{A}(\mathbf{AB}).$$

Решая это уравнение относительно $\mathbf{B}$, получим:

$$\mathbf{B} = \frac{(\mathbf{AB})}{A^2}\mathbf{A} + \frac{1}{A^2}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A})]. \tag{39}$$

Первый из слагаемых векторов правой части, очевидно, параллелен вектору $\mathbf{A}$, а второй перпендикулярен к нему.

Формула (39) для разложения упрощается, если $\mathbf{A}$ есть единичный вектор. Тогда $A = 1$ и формула (39) примет вид

$$\mathbf{B} = (\mathbf{AB})\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{A}). \tag{40}$$

Мы разобрали два случая произведений трёх векторов; они играют большую роль в векторной алгебре. Произведения четырёх и большего числа векторов могут быть сведены к низшим произведениям.

Пример 1. Показать, что если $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, то

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\} = a^4\mathbf{b}.$$

В самом деле:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{ab}) - \mathbf{b}(\mathbf{aa}) = -\mathbf{b}a^2.$$

Умножая векторно слева на $\mathbf{a}$, получим:

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = -a^2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a^2(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

Повторяя ту же операцию, найдём:

$$\mathbf{a}\times\{\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\} = a^2[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})] = a^2\mathbf{b}\,(\mathbf{aa}) - a^2\mathbf{a}\,(\mathbf{ab}) = a^4\mathbf{b},$$

что и нужно. Читателю рекомендуется проверить этот результат геометрически.

Пример 2. Вычислить $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$.

Обозначая временно $(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{e}$, произведём в векторно-скалярном произведении $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{e}$ перестановку; тогда получим:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{e} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{e}) = \mathbf{a}\,[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] =$$
$$= \mathbf{a}\,[\mathbf{c}\,(\mathbf{bd}) - \mathbf{d}\,(\mathbf{bc})] = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}),$$

или

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}.$$

В частности, при $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ найдём: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = a^2(\mathbf{bc}) - (\mathbf{ab})(\mathbf{ac})$.

Упражнения

1. Даны две прямоугольные декартовы системы координат с одинаковыми направлениями осей. Радиус-вектор нового начала координат $\mathbf{r}_0\{a, b, c\}$. Найти зависимость между радиусами-векторами $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ и $\mathbf{r}'\{x', y', z'\}$ произвольной точки относительно старой и новой систем.

2*. Даны две прямоугольные декартовы системы координат с общим началом. Найти выражения координат x, y, z произвольной точки относительно старой системы через координаты x', y', z' той же точки по новой системе.

3. Найти формулы преобразования прямоугольных декартовых координат в общем случае.

4. Доказать, что если диагонали четырёхугольника делят друг друга пополам, то четырёхугольник есть параллелограмм.

5. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника, вершины которого заданы векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Выразить также ответ в координатах.

6. Найти радиус-вектор, а также координаты центра тяжести системы трёх материальных точек M_1, M_2, M_3, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3.

7. Доказать перпендикулярность векторов $\mathbf{A}\{3, 2, 1\}$ и $\mathbf{B}\{2, -3, 0\}$.

8. Найти длину и направление вектора $\mathbf{A}(1, 1, 1)$.

9*. Вывести формулу для квадрата стороны четырёхугольника

10*. Дан параллелограмм $OACB$: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{A}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{B}$. Дать геометрическое истолкование формул:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = 2(A^2+B^2), \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = 4AB,$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

Какое значение имеет последнее из этих равенств для ромба?

11. Доказать, что вектор $x = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{bc})$ перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$.

12. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13. Какой угол составляют между собой два вектора:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}?$$

14. Определить угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если вектор $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

15*. Вывести формулу для косинуса суммы двух углов.

16. Дано, что $\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \neq 0$; можно ли отсюда заключить, что $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?

17*. Найти формулу для $\sin(\alpha - \beta)$.

18. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

19. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(3, 4, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-3, 5, 4)$.

20. Найти площадь треугольника ABC, если известны проекции его сторон $\overrightarrow{CA}(X, Y, Z)$ и $\overrightarrow{CB}(X', Y', Z')$.

21. При обозначениях задачи 20 найти синус угла C.

22. Вычислить векторно-скалярное произведение $\mathbf{ij}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

23. Показать, что $\mathbf{abc} = \mathbf{ab}\,(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$.

24. Показать, что векторы $(3, 4, 5)$, $(1, 2, 2)$, $(9, 14, 16)$ компланарны.

25. Проверить, что четыре точки $A(1, 0, 1)$, $B(4, 4, 6)$, $C(2, 2, 3)$ и $D(10, 14, 17)$ лежат в одной плоскости.

26. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках: $A(0, 0, 0)$, $B(3, 4, -1)$, $C(2, 3, 5)$, $D(6, 0, -3)$. Вычислить её объём.

27. При данных задачи 26 найти длину высоты, опущенной из вершины A.

28. Даны векторы $\mathbf{a}(3, 0, -1)$, $\mathbf{b}(2, 4, 3)$, $\mathbf{c}(-1, 3, 2)$, $\mathbf{d}(2, 0, 1)$. Вычислить $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ и $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d})$.

29*. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми, если одна проходит через точку $A(3, 0, -1)$ параллельно вектору $\mathbf{B}\{2, 4, 3\}$, а другая проходит через точку $C(-1, 3, 2)$ параллельно вектору $\mathbf{D}\{2, 0, 1\}$.

30*. Найти расстояние от точки $A(3, 4, 2)$ до прямой, проходящей через точку $B(1, 2, 3)$ параллельно вектору $C\{6, 6, 7\}$.

ГЛАВА III

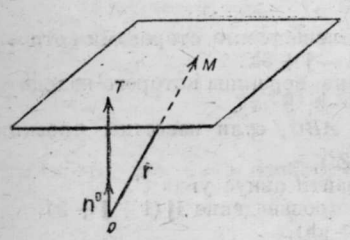
ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Нормальное уравнение плоскости. Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если зададим её расстояние p от начала O, т. е. длину перпендикуляра OT, опущенного из точки O на плоскость, и единичный вектор $\mathbf{n}^0$, перпендикулярный к плоскости и обращённый от начала O к плоскости. Этот вектор $\mathbf{n}^0$ назовём направляющим вектором плоскости (черт. 100).

Когда точка M, имеющая радиус-вектор $\mathbf{r}$, движется по плоскости, то её радиус-вектор меняется так, что всё время связан некоторым условием. Посмотрим, каково это условие. Очевидно, для любой точки $M(\mathbf{r})$, лежащей на плоскости, имеем:

$$\text{пр.}_{\mathbf{n}^0}\overrightarrow{OM} = OT = p. \qquad (1)$$

Это условие имеет место лишь для точек плоскости; оно нарушается, если точка M лежит вне плоскости. Таким образом, равенство (1) выражает свойство, общее всем точкам плоскости и только им. Согласно § 7 гл. II, имеем:



Черт. 100.

$$\text{пр.}_{\mathbf{n}^0}\overrightarrow{OM} = \mathbf{rn}^0,$$

и, значит, уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\mathbf{rn}^0 - p = 0. \qquad (1')$$

Уравнение (1′) выражает собой условие, при котором точка $M(\mathbf{r})$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением этой плоскости*. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки M плоскости называется *текущим радиусом-вектором*.

Уравнение (1′) плоскости записано в векторной форме. Переходя к координатам, заметим, что проекциями единичного вектора $\mathbf{n}^0$ на оси координат Ox, Oy, Oz служат косинусы углов α, β, γ, составленных осями с этим вектором, а проекциями радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки M служат координаты x, y, z точки M, т. е. имеем:

$$\mathbf{n}^0\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}\{x,\ y,\ z\}.$$

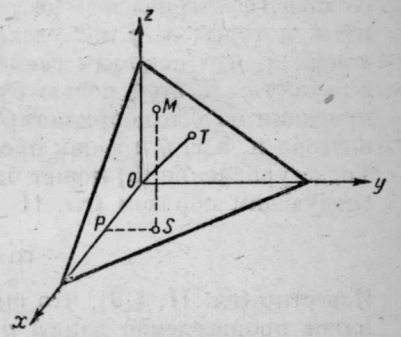
Уравнение (1′) переходит в координатное:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2)$$

При переводе векторного уравнения (1′) плоскости в координатное уравнение (2) мы воспользовались формулой (13) § 9 гл. II, выражающей скалярное произведение через проекции векторов. Уравнение (2) выражает собой условие, при котором точка $M(x, y, z)$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением этой плоскости в координатной форме*. Полученное уравнение (2)—первой степени относительно x, y, z, т. е. *всякая плоскость изображается уравнением первой степени относительно текущих координат*.

Замечание. Нормальное уравнение плоскости (2) можно вывести, не пользуясь векторами. Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если мы зададим её расстояние p от начала координат, т. е. длину перпендикуляра OT, опущенного из начала на плоскость, и углы α, β, γ направления этого перпендикуляра с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz (черт. 101). Когда точка M с координатами x, y, z движется по плоскости, то её координаты меняются так, что всё время связаны некоторым условием. Посмотрим, каково это условие.

Построим на черт. 101 координатную ломаную линию $\overline{OPSM}$ произвольной точки M плоскости. Возьмём проекцию этой ломаной на направление OT. Заметив, что проекция ломаной равна проекции её замыкающей (ч. I, гл. I, § 7), будем иметь:



Черт. 101.

$$\text{пр.}(\overline{OPSM}) = \text{пр.}(\overline{OM}) = p. \qquad (3)$$

С другой стороны, известно, что проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев (ч. I, гл. I, § 7); следовательно, равенство (3) перепишется так:

$$\text{пр.}(\overline{OP}) + \text{пр.}(\overline{PS}) + \text{пр.}(\overline{SM}) = p. \qquad (4)$$

Так как проекция отрезка равна самому отрезку, умноженному на косинус угла между положительными направлениями оси проекций и той прямой, на которой лежит отрезок (ч. I, гл. I, § 7), то

$$\text{пр.}(\overline{OP}) = x\cos\alpha, \quad \text{пр.}(\overline{PS}) = y\cos\beta, \quad \text{пр.}(\overline{SM}) = z\cos\gamma.$$

Подставляя эти значения в равенство (4), получим:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2)$$

Как уже указывалось, уравнение (2) выражает собою условие, при котором точка $M(x, y, z)$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением* этой плоскости. Полу-

ченное уравнение (2) — первой степени относительно x, y, z, т. е. *всякая плоскость изображается уравнением первой степени относительно текущих координат.*

§ 2. Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду. Возьмём уравнение первой степени общего вида:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (5)$$

Каково геометрическое место тех точек пространства, координаты которых x, y и z удовлетворяют нашему уравнению? Мы покажем, что искомым геометрическим местом точек является плоскость. С этой целью будем рассматривать A, B и C как проекции на оси координат Ox, Oy и Oz некоторого постоянного вектора $\mathbf{n}$, а x, y и z как проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки M. Тогда уравнение (5) может быть переписано в векторной форме следующим образом (гл. II, § 9):

$$\mathbf{rn}+D=0. \qquad (5')$$

Известно (гл. II, § 9), что скалярное произведение $\mathbf{rn}$ представляет произведение длины n вектора $\mathbf{n}$ на проекцию радиуса-вектора $\mathbf{r}$, взятую на направление вектора $\mathbf{n}$, т. е.

$$\mathbf{rn}=n\ \text{пр.}_{\mathbf{n}}\mathbf{r}.$$

Таким образом, из уравнения (5′) мы получаем:

$$n\ \text{пр.}_{\mathbf{n}}\mathbf{r}+D=0, \quad \text{или} \quad \text{пр.}_{\mathbf{n}}\mathbf{r}=-\frac{D}{n}=\text{const}.$$

Итак, проекция радиуса-вектора переменной точки M на направление постоянного вектора $\mathbf{n}$ есть величина постоянная, а это значит, что точка M лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}$ и проходящей от начала на расстоянии, равном $\frac{|D|}{n}$. Следовательно, *всякое уравнение* (5) *первой степени изображает плоскость как геометрическое место точек пространства, координаты которых связаны этим уравнением.*

В то же время из предыдущего мы усматриваем способ приведения уравнения (5) или (5′) к нормальному виду (2) или (1′). В самом деле, считая D отрицательным, разделим уравнение (5′) на длину

$$n=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

вектора $\mathbf{n}$. Тогда получим:

$$\mathbf{rn}^0+\frac{D}{n}=0$$

В формуле (6) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена, как это видно из последнего равенства (10). Подставив найденное значение M в равенства (10), получим формулы (8) для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p.

Итак, уравнение (5) приводится к нормальному виду путём умножения его на множитель M, определяемый по формуле (6). Этот множитель M носит название *нормирующего множителя*. Так как нормальное уравнение изображает, как вы видели в предыдущем параграфе, плоскость, то отсюда следует, что и *общее уравнение* (5) *изображает плоскость*.

Итак, *всякое уравнение первой степени между* x, y, z *изображает плоскость*, как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пример. Уравнение плоскости $x-2y+2z-3=0$ привести к нормальному виду.

Нормирующий множитель будет:

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{1}{3};$$

умножая на него данное уравнение, получим:

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0.$$

Для данной плоскости, следовательно, имеем:

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=-\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3},\ p=1.$$

§ 3. Уравнение плоскости в отрезках. Обозначим через a, b и c отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат (черт. 102). Уравнение данной плоскости имеет вид

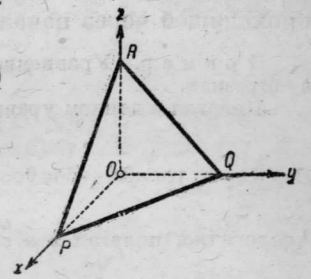
$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (12)$$

Так как точка $P(a, 0, 0)$ лежит на плоскости, то её координаты удовлетворяют уравнению (12):

$$Aa+D=0,$$

или

$$A=-\frac{D}{a}. \qquad (13)$$



Черт. 102.

Аналогично координаты точки $Q(0, b, 0)$ должны удовлетворять уравнению (12), что даёт:

$$Bb+D=0,$$

или

$$B = -\frac{D}{b}. \qquad (13')$$

Наконец, координаты точки $R(0, 0, c)$ удовлетворяют уравнению (12):

$$Cc + D = 0,$$

или

$$C = -\frac{D}{c}. \qquad (13'')$$

Подставляя значения A, B и C из равенств (13), (13′), (13″) в уравнение (12) плоскости, получим:

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{z}{c} + D = 0.$$

Сокращая на D, которое в силу предположения не равно нулю, найдём:

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0,$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (14)$$

Это и есть искомое *уравнение плоскости в отрезках*.

Замечание. К виду (14) можно привести уравнение всякой плоскости за исключением случая $D = 0$, т. е. плоскости, проходящей через начало координат.

Пример. Уравнение плоскости $3x - 4y + z - 5 = 0$ написать в отрезках.

Полагая в данном уравнении $y = z = 0$, найдём отрезок a:

$$3x - 5 = 0, \text{ откуда } x = \frac{5}{3}, \text{ т. е. } a = \frac{5}{3}.$$

Аналогично, полагая $x = z = 0$, найдём отрезок b:

$$-4y - 5 = 0, \text{ откуда } y = -\frac{5}{4}, \text{ т. е. } b = -\frac{5}{4}.$$

Наконец, полагая $x = y = 0$, найдём отрезок c:

$$z - 5 = 0, \text{ откуда } z = 5, \text{ т. е. } c = 5.$$

Следовательно, уравнение плоскости в отрезках будет:

$$\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{-\frac{5}{4}} + \frac{z}{5} = 1.$$

§ 4. Исследование общего уравнения плоскости. Посмотрим, какие частные положения относительно осей координат занимает плоскость, заданная уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (15)$$

если некоторые коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль.

Если $D = 0$, то уравнению (15) удовлетворяют $x = y = z = 0$, т. е. координаты начала; таким образом, плоскость проходит через начало координат. Если $C = 0$, то уравнение (15) будет:

$$Ax + By + D = 0. \qquad (15')$$

Рассматривая это уравнение на плоскости xOy, мы будем иметь прямую линию. Рассматривая же уравнение (15′) в пространстве, мы будем иметь геометрическое место тех точек, которые проектируются на плоскость xOy в точки указанной прямой. Таким образом, уравнение (15′) изображает плоскость, параллельную оси Oz. Аналогично, если $B = 0$, то уравнение

$$Ax + Cz + D = 0$$

изображает плоскость, параллельную оси Oy, и, наконец, если $A = 0$, то уравнение

$$By + Cz + D = 0$$

изображает плоскость, параллельную оси Ox. Вообще, если в уравнении плоскости отсутствует координата z, y или x, то плоскость параллельна соответственно оси Oz, Oy или Ox.

Допустим теперь, что два коэффициента равны нулю, например,

$$D = C = 0.$$

Уравнение

$$Ax + By = 0$$

изображает плоскость, проходящую через начало координат

параллельно оси Oz, т. е. это будет плоскость, проходящая через ось Oz. Аналогично уравнение вида

$$Ax+Cz=0$$

изображает плоскость, проходящую через ось Oy, а уравнение

$$By+Cz=0$$

изображает плоскость, проходящую через ось Ox.

Если равны нулю два коэффициента при текущих координатах, например $A=B=0$, то уравнение $Cz+D=0$ изображает плоскость, параллельную оси Ox и оси Oy, т. е. плоскость, параллельную плоскости координат xOy. Также уравнения $By+D=0$ и $Ax+D=0$ изображают плоскости, параллельные соответственно плоскостям координат xOz и yOz.

Если, наконец, три коэффициента равны нулю, например $B=C=D=0$, то уравнение $Ax=0$ или $x=0$ изображает плоскость координат yOz.

Также уравнения $By=0$ и $Cz=0$ изображают соответственно плоскости координат xOz и xOy.

§ 5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Пусть дана точка M с координатами x_1, y_1, z_1 и пусть уравнение искомой плоскости будет:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{16}$$

Так как по условию искомая плоскость проходит через точку $M(x_1, y_1, z_1)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (16). Отсюда получаем условие:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \tag{16'}$$

Вычитая это тождество из уравнения (16), получаем искомое уравнение:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{17}$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через данную точку.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$.

Уравнение искомой плоскости будет:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0.$$

Замечание. Обозначая через $\mathbf{r}_1$ радиус-вектор данной точки и через $\mathbf{n}$ вектор, перпендикулярный к плоскости, мы легко получим искомое уравнение в векторной форме. В самом деле, векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{n}$ должны быть перпендикулярны, потому что вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ лежит в искомой плоскости, а вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен к этой плоскости. Следовательно, скалярное произведение векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{n}$ должно быть равным нулю:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{n}=0.$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}_1$, в векторной форме.

Переходя к координатам, получим уравнение (17) в координатах, если через A, B, C обозначим проекции вектора $\mathbf{n}$, через x, y, z — проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (текущие координаты точки M) и, наконец, через x_1, y_1, z_1—проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}_1$ (координаты данной точки M_1).

§ 6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Обозначая координаты трёх данных точек соответственно через $x_1, z_1\, y_1$; x_2, y_2, z_2 и x_3, y_3, z_3, напишем уравнение любой плоскости, проходящей через первую точку:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{17}$$

Чтобы получить уравнение искомой плоскости, нужно потребовать, чтобы уравнение (17) удовлетворялось координатами двух других точек:

$$\left.\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)&=0,\\ A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из уравнений (18) нужно определить отношения двух коэффициентов к третьему и внести найденные значения в уравнение (17).

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 2, 3), (—1, 0, 0) и (3, 0, 1).

Уравнение плоскости, проходящей через первую из данных точек, будет:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0. \tag{17'}$$

Условия прохождения плоскости (17') через две другие точки и первую точку суть:

$$2A+2B+3C=0 \quad \text{и} \quad 2A-2B-2C=0, \tag{18'}$$

или

$$2\frac{A}{C}+2\frac{B}{C}+3=0;\quad 2\frac{A}{C}-2\frac{B}{C}-2=0.$$

Складывая второе уравнение с первым, найдём:

$$4\frac{A}{C}+1=0,\quad \text{откуда}\quad \frac{A}{C}=-\frac{1}{4};$$

Подставляя во второе уравнение, получим:

$$\frac{B}{C}=-\frac{5}{4}.$$

Итак, $A:B:C=1:5:(-4)$.

Подставляя в уравнение (17′) вместо A, B, C соответственно 1, 5, —4 (или числа им пропорциональные), получим:

$$(x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0,$$

или

$$x+5y-4z+1=0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2).

Уравнение любой плоскости, проходящей через точку (0, 0, 0), будет:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Условия прохождения этой плоскости через точки (1, 1, 1) и (2, 2, 2) суть:

$$A+B+C=0\quad\text{и}\quad 2A+2B+2C=0.$$

Сокращая второе уравнение на 2, видим, что для определения двух неизвестных отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ имеем одно уравнение:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+1=0.$$

Отсюда получим $\frac{A}{C}=-\frac{B}{C}-1$. Подставляя теперь в уравнение плоскости $\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+z=0$ вместо $\frac{A}{C}$ его значение, найдём:

$$\left(-\frac{B}{C}-1\right)x+\frac{B}{C}y+z=0$$

или

$$(B+C)x-By-Cz=0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости; оно зависит от произвольных количеств B, C (а именно от отношения $\frac{B}{C}$, т. е. имеется бесчисленное множество плоскостей, проходящих через три данные точки (три данные точки лежат на одной прямой линии).

Замечание. Задача о проведении плоскости через три данные точки, не лежащие на одной прямой, легко решается в общем виде, если воспользоваться определителями. Действительно, так как в уравнениях (17) и (18) коэффициенты A, B, C не могут быть одновременно равны нулю, то, рассматривая эти уравнения как однородную систему с тремя неизвестными A, B, C, пишем необходимое и достаточное условие существования решения этой системы, отличного от нулевого (ч. I, гл. VI, § 6):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложив этот определитель по элементам первой строки, получим уравнение первой степени относительно текущих координат x, y, z, которому будут удовлетворять, в частности, координаты трёх данных точек.

В этом последнем убеждаемся непосредственно, если подставим в уравнение, записанное с помощью определителя, координаты любой из данных точек вместо x, y, z. В левой части получается определитель, у которого либо элементы первой строки нули, либо имеются две одинаковые строки. Таким образом, составленное уравнение представляет плоскость, проходящую через три данные точки.

Обозначая через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ радиусы-векторы трёх данных точек, не лежащих на одной прямой, а через $\mathbf{r}$ текущий радиус-вектор, мы легко получим искомое уравнение в векторной форме. В самом деле, векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ должны быть компланарны, потому что они все лежат в искомой плоскости. Следовательно, векторно-скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0. \qquad (19)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, в векторной форме.

Переходя к координатам, получим уравнение в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (19')$$

где $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{r}_3(x_3, y_3, z_3)$, $\mathbf{r}(x, y, z)$.

§ 7. Угол между двумя плоскостями. Пусть уравнения данных плоскостей будут:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (20)$$

Требуется определить величину двугранного угла между ними.

Этот угол равен углу φ между перпендикулярами к этим плоскостям из начала координат. Так как векторы $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ перпендикулярны к данным плоскостям, то φ есть угол между этими векторами и определяется согласно формуле (15′) из § 10 гл. II, а именно:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (21)$$

Замечание. Вывод формулы (21) можно выполнить, не прибегая к векторам. Чтобы определить величину двугранного угла между плоскостями, заданными уравнениями (20), заметим, что этот угол равен углу φ между перпендикулярами к этим плоскостям из начала координат. Написав нормальные уравнения плоскостей (20) в виде:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0, \\ x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0, \end{aligned}\right\} \qquad (20')$$

имеем (гл. I, § 3):

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (22)$$

Так как (см. формулы 8)

$$\cos\alpha_1=\pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \qquad \cos\alpha_2=\pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

$$\cos\beta_1=\pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \qquad \cos\beta_2=\pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

$$\cos\gamma_1=\pm\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \qquad \cos\gamma_2=\pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

то, подставляя эти значения в равенство (22), найдём:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (21')$$

В этой формуле (21′) можно брать любой знак (+ или —), что соответствует выбору одного из двух смежных двугранных углов.

§ 8. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. В случае перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (20)$$

угол между ними равен 90°, т. е. $\cos\varphi=0$. Поэтому из формулы (21) имеем *условие перпендикулярности плоскостей* (20):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (23)$$

Замечание. Это условие (23) получится сразу, если заметим, что скалярное произведение векторов $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ должно быть равно нулю.

Условие *параллельности плоскостей* в векторной форме может быть записано так: $\mathbf{n}_1=l\mathbf{n}_2$, где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ обозначают векторы, перпендикулярные к данным плоскостям. Переходя к проекциям, перепишем это условие таким образом:

$$A_1=lA_2,\ B_1=lB_2,\ C_1=lC_2,$$

что равносильно пропорции

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (24)$$

Замечание. Условие (24) без векторов можно установить так: в случае параллельности плоскостей (20) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1=\pm\cos\alpha_2, \\ \cos\beta_1=\pm\cos\beta_2, \\ \cos\gamma_1=\pm\cos\gamma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (24')$$

Заменяя здесь косинусы их выражениями через коэффициенты уравнений (20), получим:

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$$

откуда находим:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (24)$$

Обратно, если выполнено условие (24), то плоскости параллельны. В самом деле, уравнения этих плоскостей будут:

$$lA_2x+lB_2y+lC_2z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

где l обозначает величину каждого отношения пропорции (24). Деля первое уравнение на l, получим:

$$A_2x+B_2y+C_2z+\frac{D}{l}=0.$$

Следовательно, выполняются соотношения (24′), и плоскости параллельны.

Пример 1. Показать, что плоскости $x+y-z-1=0$ и $2x+2y-2z+3=0$ параллельны между собой.

Условие параллельности (24) здесь выполняется:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}.$$

Пример 2. Показать, что плоскости

$$x+y+z=0 \quad \text{и} \quad x+y-2z+3=0$$

перпендикулярны между собой.

Условие перпендикулярности (23) здесь выполняется:

$$1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot(-2)=0.$$

Задача I. *Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.*

Пусть даны точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость своим уравнением

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Напишем уравнение произвольной плоскости, проходящей через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (17)$$

Чтобы эта плоскость была параллельна данной плоскости, нужно выполнить условие

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1};$$

следовательно, можем взять:

$$A=A_1, \quad B=B_1, \quad C=C_1.$$

Подставляя эти значения A, B и C в уравнение плоскости, найдём:

$$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $x+y+z=1$.

Здесь $x_1=y_1=z_1=0$ и $A_1=B_1=C_1=1$. Следовательно, уравнение искомой плоскости будет:

$$x+y+z=0.$$

Задача II. *Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки перпендикулярно к данной плоскости.*

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость своим уравнением

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Напишем уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \qquad (17)$$

а также условия прохождения этой плоскости через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и перпендикулярности с данной плоскостью:

$$\left.\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)&=0,\\ AA_1+BB_1+CC_1&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Определяя из последних уравнений отношения двух коэффициентов A, B и C к третьему и подставляя их в уравнение плоскости, получим искомое уравнение.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки (1, 1, 1) и (0, 1, −1) перпендикулярно к плоскости $x+y+z=0$.

Уравнение плоскости, проходящей через первую из данных точек, будет:

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

Условия прохождения этой плоскости через точку (0, 1, −1) и перпендикулярности к данной плоскости суть соответственно:

$$A+2C=0 \quad \text{и} \quad A+B+C=0.$$

Из первого условия получаем $\frac{A}{C}=-2$. Деля второе на C, найдём:

$$\frac{B}{C}=-\frac{A}{C}-1=2-1=1.$$

Деля уравнение плоскости на C и подставляя вместо $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ найденные значения, получим

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

или

$$2x-y-z=0.$$

Замечание. Задача II может быть решена в общем виде, если воспользоваться определителями. Действительно, из уравнений (17) и (25), представляющих однородную систему с неизвестными A, B и C, получаем (ч. I, гл. VI, § 6):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0.$$

§ 9. Точка пересечения трёх плоскостей. Чтобы найти координаты точки пересечения трёх плоскостей, данных своими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$

нужно решить эти уравнения совместно относительно x, y и z, так как координаты точки пересечения должны одновременно удовлетворять уравнениям всех трёх плоскостей.

Пример. Найти точку пересечения плоскостей

$$x-y+z=0,\quad x+2y-1=0,\quad x+y-z+2=0.$$

Решая эти уравнения совместно, получим координаты искомой точки:

$$x=-1,\quad y=1,\quad z=2.$$

Полное решение этой задачи в общем виде может быть дано при помощи определителей. Согласно результатам исследования, произведённого в § 7 гл. VI ч. I, имеем: если определитель

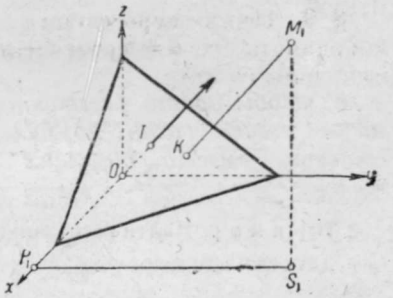
$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то три плоскости пересекаются в единственной точке; если определитель Δ равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 3-го порядка, принадлежащих таблице

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{matrix}$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, и тогда одна из плоскостей параллельна линии пересечения двух других. Во втором случае все определители 3-го порядка этой таблицы равны нулю и все три плоскости проходят через одну прямую.

Если, наконец, вместе с определителем Δ все его миноры равны нулю, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди определителей 2-го порядка, принадлежащих выписанной таблице, есть хоть один, отличный от нуля, и тогда все три плоскости параллельны между собой; во втором же случае все определители 2-го порядка этой таблицы равны нулю и три плоскости совпадают.



Черт. 103.

§ 10. Расстояние от точки до плоскости. Пусть даны уравнение плоскости в нормальном виде:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (черт. 103). Обозначим искомое расстояние точки M_1 до плоскости, т. е. длину перпендикуляра M_1K, опущенного из точки M_1 на плоскость, через d и будем считать d положительным, если точка M_1 и начало координат O лежат по разные стороны плоскости, и отрицательным в противном случае. Построим для точки M_1 координатную ломаную $\overline{OP_1S_1M_1}$. Возьмём проекцию ломаной линии $\overline{OP_1S_1M_1K}$ на направление OT перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, замечая при этом, что проекция ломаной равна проекции замыкающей (ч. I, гл. I, § 7):

$$\text{пр.}(\overline{OP_1S_1M_1K})=\text{пр.}(\overline{OK})=p. \qquad (26)$$

С другой стороны, проекция ломаной равна сумме проекций её звеньев (ч. I, гл. I, § 7), т. е.

$$\text{пр.}\,(\overline{OP_1S_1M_1K}) = \text{пр.}\,(\overline{OP_1}) + \text{пр.}\,(\overline{P_1S_1}) + \text{пр.}\,(\overline{S_1M_1}) + \text{пр.}\,(\overline{M_1K})$$

Следовательно, равенство (26) запишется так:

$$\text{пр.}\,(\overline{OP_1}) + \text{пр.}\,(\overline{P_1S_1}) + \text{пр.}\,(\overline{S_1M_1}) + \text{пр.}\,(\overline{M_1K}) = p. \quad (26')$$

Так как по формуле проекции отрезка (ч. I, гл. I, § 7) имеем

$$\text{пр.}\,(\overline{OP_1}) = x_1\cos\alpha; \qquad \text{пр.}\,(\overline{P_1S_1}) = y_1\cos\beta;$$
$$\text{пр.}\,(\overline{S_1M_1}) = z_1\cos\gamma, \qquad \text{пр.}\,(\overline{M_1K}) = -d,$$

то равенство (26′) запишется таким образом:

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - d = p,$$

откуда

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p, \quad (27)$$

т. е. *чтобы найти расстояние от точки до плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения плоскости подставить вместо текущих координат координаты данной точки.*

Пример. Найти расстояние от точки (1, 2, 3) до плоскости

$$2x - 2y + z - 3 = 0.$$

Напишем нормальное уравнение данной плоскости, умножив данное уравнение на нормирующий множитель:

$$M = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3};$$

получим

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0.$$

Искомое расстояние будет: $d = \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 - 1 = -\frac{2}{3}$. Знак минус означает, что данная точка и начало координат лежат по одну сторону данной плоскости.

Замечание. Очень легко решается задача о расстоянии точки до плоскости, если воспользоваться нормальным

уравнением плоскости в векторной форме (§ 1). В самом деле, пусть

$$\mathbf{rn}^0 - p = 0$$

есть нормальное уравнение данной плоскости и $M_1(\mathbf{r}_1)$ — данная точка. Задача состоит в том, чтобы определить длину перпендикуляра M_1K, опущенного из точки M_1 на плоскость. Замечая, что вектор $\overrightarrow{KM_1}$ параллелен единичному вектору $\mathbf{n}^0$, мы можем его представить так:

$$\overrightarrow{KM_1} = d\mathbf{n}^0.$$

Числовой множитель d, взятый по абсолютной величине, очевидно, даёт нам искомое расстояние; знак же d будет положительный, если векторы $\overrightarrow{KM_1}$ и $\mathbf{n}^0$ имеют одинаковое направление (т. е. если точки M_1 и O лежат по разные стороны плоскости, как на черт. 103), и отрицательный, если эти векторы имеют противоположные направления (т. е. если точки M и O лежат по одну сторону плоскости).

Заметив это, из черт. 103 усматриваем:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1K},$$

или

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_1 - d\mathbf{n}^0.$$

Так как, с другой стороны, точка K лежит на плоскости

$$\mathbf{rn}^0 - p = 0,$$

то радиус-вектор $\mathbf{r}_K$ этой точки должен удовлетворять уравнению плоскости, т. е. имеем:

$$(\mathbf{r}_1 - d\mathbf{n}^0)\,\mathbf{n}^0 - p = 0,$$

или

$$\mathbf{r}_1\mathbf{n}^0 - d - p = 0,$$

откуда

$$d = \mathbf{r}_1\mathbf{n}^0 - p. \quad (27')$$

Рассматривая выражение, полученное для d, замечаем, что

оно есть результат подстановки $\mathbf{r}_1$ вместо $\mathbf{r}$ в левую часть нормального уравнения плоскости.

Итак, для того чтобы найти расстояние точки до плоскости, надо в левую часть уравнения плоскости, приведённого к нормальному виду, подставить вместо текущего радиуса-вектора $\mathbf{r}$ радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ данной точки. В результате подстановки получим число, абсолютная величина которого даёт искомое расстояние, а знак указывает, лежит ли точка по ту же сторону от плоскости, что и начало, или по другую сторону (минус в первом случае и плюс во втором).

Переходя к координатам, получим формулировку, данную в начале этого параграфа.

Упражнения

1. Проверить, проходит ли плоскость

$$3x - 5y + 2z - 17 = 0$$

через одну из следующих точек: a) (4, 1, 2); b) (2, —1, 3); c) (7, 1, 2); d) (3, 0,4); e) (0, — 4, 2).

2. Найти длину и направление перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость:

a) $2x + 3y + 6z - 35 = 0$; b) $21x + 30y - 70z - 84 = 0$;
c) $x - 2y + 2z + 21 = 0$.

3. Найти на плоскости $4x - 7y + 5z - 20 = 0$ такую точку P, чтобы прямая OP образовывала с осями координат равные углы.

4. Найти на плоскости $2x - 3y + 5z - 16 = 0$ такую точку P, чтобы прямая OP образовывала с осями координат равные углы.

5. Найти уравнение плоскости, если известно, что точка (2, 9, —6) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

6*. Даны две точки: A (2, —1, —2) и B (8, — 7, 5). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к отрезку AB.

7. Даны две точки: A (—7, 2, — 1) и B (3, 4, 10). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к отрезку AB.

8. Определить отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - y + 8z - 4 = 0$ на осях координат.

9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (5, —7, 4) и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

10. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

a) $2x - 3y + 2 = 0$; b) $3x - 2 = 0$; c) $4y - 7z = 0$.

11. Найти уравнение плоскости:
a) параллельной оси Oy и проходящей через точки (1, —5, 1) и (3, 2, —2);

b) проходящей через ось Ox и через точку (4, — 3, — 1);
c) параллельной плоскости xOz и проходящей через точку (3, 2, —7).

12. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки:
a) (7, 6, 7), (5, 10, 5), (—1, 8, 9); b) (2, 4, 8), (—3, 1, 5), (6, —2, 7).

13. Найти угол между плоскостями:

a) $x + y - 11 = 0$, $3x + 8 = 0$, b) $y - \sqrt{3}x - 7 = 0$, $y = 0$;
c) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$, $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

14. Дана плоскость

$$3x - 7y + 5z - 12 = 0.$$

Найти уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через точку a) (0, 0, 0); b) (4, — 7, 1); c) (8, 0, 3); d) (3, 0, 0).

15. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (5, —4, 3) и (—2, 1, 8) и перпендикулярной к плоскости: a) xOy; b) yOz; c) xOz.

16. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (8, — 3, 1), (4, 7, 2) и перпендикулярной к плоскости $3x + 5y - 7z - 21 = 0$.

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к плоскостям

$$x - y + z - 7 = 0, \quad 3x + 2y - 12z + 5 = 0.$$

18. Найти точку пересечения плоскостей:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 3z + 37 = 0, \\ 6x - 7y + 2z - 95 = 0, \\ 5x + 2y - 8z + 53 = 0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y - 11z + 72 = 0, \\ 4x - 5y + 7z + 26 = 0, \\ 6x + 11y - 3z + 66 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 5y - 31 = 0, \\ 4x + 11z + 43 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 20 = 0; \end{cases}$

19. Определить расстояние от точки (1, 2, 1) до плоскости

$$x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

20. Найти на оси Oy точку, равноудалённую от плоскостей

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0, \quad 8x + 9y - 72z + 73 = 0.$$

21. Найти уравнения плоскостей, проходящих через ось Ox и отстоящих на расстоянии 8 единиц длины от точки (5, 4, 13).

22. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости

$$20x - 4y - 5z + 7 = 0$$

и отстоящих от неё на расстоянии 6 единиц длины.

23. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$3x+2y-6z-35=0,\quad 3x+2y-6z-56=0.$$

24*. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями

$$3x+2y+6z-35=0,\quad 21x-30y-70z-237=0.$$

25. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями

$$x-2y+2z+21=0,\quad 7x+24z-50=0.$$

26. Даны две точки $A(a, b, c)$ и $B(a_1, b_1, c_1)$. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной к отрезку AB.

27. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2).

28. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку (x_1, y_1, z_1).

29. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку (x_1, y_1, z_1).

30. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: (1, 1, 1), (2, 2, 2) и (3, 3, 3).

31. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и перпендикулярной к плоскости xOy.

32. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к плоскостям

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

33. Найти точку пересечения плоскостей

$$x+y+z=0,\quad 2x-3y+4z=0,\quad 4x-11y+10z=0.$$

34. Найти точку пересечения плоскостей

$$x+y+z-2=0,\quad 2x-3y+4z-3=0,\quad 4x-11y+10z-5=0.$$

35. Найти точку пересечения плоскостей

$$x-y+z-1=0,\quad x+y-z-2=0,\quad 5x+y-z-7=0.$$

36. Составить векторное уравнение плоскости по точке $M_1(\mathbf{r}_1)$ и двум направляющим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, к которым плоскость параллельна. Перейти к координатам.

37. Составить векторное уравнение плоскости по двум точкам $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$ и направляющему параллельному вектору $\mathbf{a}$. Перейти к координатам.

ГЛАВА IV

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Уравнения прямой линии. Положение прямой линии в пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определённую точку M_0 при помощи её радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$ и вектор $\mathbf{s}$, которому прямая параллельна (черт. 104). Переменной точке M прямой линии соответствует её радиус-вектор $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}$, и из черт. 104 мы получаем:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}_0+\overrightarrow{M_0M}. \tag{1}$$

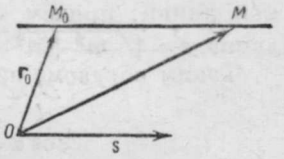
Заметив, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору $\mathbf{s}$, мы его выразим таким образом:

$$\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{s}t,$$

где числовой множитель t может принимать любые значения в зависимости от положения точки M на прямой. Следовательно, равенство (1) можно переписать так:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}t, \tag{2}$$

причём t играет роль переменного параметра. Уравнение (2) назовём *векторным уравнением прямой линии*.



Черт. 104.

Желая заменить уравнение (2) равносильными ему координатными уравнениями, обозначим декартовы координаты точки M_0 относительно системы с началом координат в точке O через a, b, c (это будут проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$), текущие координаты точки M — через x, y, z (проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$), и, наконец, проекции вектора $\mathbf{s}$ — через m, n, p. Тогда, написав уравнение (2) в проекциях, получим:

$$x=a+mt,\quad y=b+nt,\quad z=c+pt. \tag{3}$$

Когда параметр t изменяется, точка с координатами x, y, z, определяемыми из уравнений (3), движется по данной прямой. Уравнения (3) называют *параметрическими уравнениями прямой линии*. Так как m, n, p — проекции вектора $\mathbf{s}$, которому прямая параллельна, то числа m, n, p характеризуют напра-

вление прямой линии в пространстве и их принято называть *угловыми коэффициентами* этой прямой.

Последнее наименование может быть оправдано, если заметим, что при единичном векторе $\mathbf{s}=\mathbf{s}^0$ коэффициенты m, n, p становятся косинусами углов α, β, γ, образованных положительными направлениями осей координат Ox, Oy, Oz с данной прямой (с направлением вектора $\mathbf{s}^0$). В этом случае уравнения (2) и (3) примут вид:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}^0 t, \qquad (2')$$

$$x=a+\cos\alpha\cdot t, \quad y=b+\cos\beta\cdot t, \quad z=c+\cos\gamma\cdot t, \qquad (3')$$

причём в этом случае параметр t имеет простое геометрическое значение: t обозначает расстояние переменной точки M от точки $M_0(a, b, c)$, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли направление вектора $\overrightarrow{M_0M}$ одинаково или противоположно направлению вектора $\mathbf{s}^0$ ($\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{s}_0 t$).

Посмотрим, возможно ли определить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, зная m, n, p. Очевидно, имеем:

$$\mathbf{s}=\mathbf{s}_0 s,$$

где s обозначает длину вектора $\mathbf{s}$. Переписав последнее равенство в проекциях, получим:

$$m=\cos\alpha\cdot s, \quad n=\cos\beta\cdot s, \quad p=\cos\gamma\cdot s, \qquad (4)$$

т. е. m, n, p пропорциональны направляющим косинусам прямой линии, причём множителем пропорциональности служит длина $s=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ вектора $\mathbf{s}\{m, n, p\}$.

Таким образом, из равенств (4) находим:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{m}{s}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\beta&=\frac{n}{s}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{p}{s}=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Следовательно, направление прямой в пространстве определяется отношениями $m:n:p$ её угловых коэффициентов, что даёт возможность считать длину вектора $\mathbf{s}\{m, n, p\}$ произвольной.

Вместо параметрических уравнений (3) и (3′) обычно изображают прямую линию посредством системы двух уравнений первой степени между текущими координатами. Эти уравнения получаются немедленно из уравнений (3) или (3′) путем исключения параметра t. Так, из уравнений (3) находим:

$$\frac{x-a}{m}=t, \quad \frac{y-b}{n}=t \quad \frac{z-c}{p}=t,$$

или

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}. \qquad (5)$$

Уравнения (5) назовём *нормальными уравнениями прямой линии*.

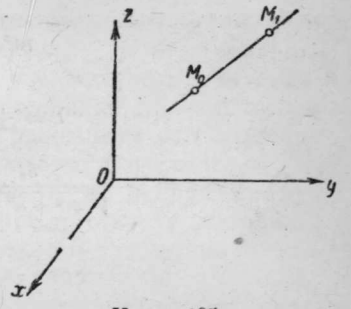
В частности, при $m=\cos\alpha$, $n=\cos\beta$, $p=\cos\gamma$ уравнения (5) будут:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Система двух уравнений (5) представляет нашу прямую линию как пересечение двух плоскостей, определяемых уравнениями

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{b}, \quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Замечание. Можно вывести уравнения прямой линии, не прибегая к векторам. Возьмём на прямой линии определённую точку $M_0(a, b, c)$ и переменную точку $M(x, y, z)$. Обозначим через α, β, γ углы данной прямой (определённым образом выбранного направления этой прямой) с положительными направлениями осей координат Ox, Oy, Oz, а через ρ — расстояние M_0M, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли направление отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ одинаково или противоположно выбранному направлению на прямой.



Черт. 105.

Проекции отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ на оси координат Ox, Oy и Oz (черт. 105) суть соответственно: $x-a$, $y-b$, $z-c$. По формуле проекции отрезка (ч. I, гл. I, § 7) имеем:

$$x-a=\rho\cos\alpha, \quad y-b=\rho\cos\beta, \quad z-c=\rho\cos\gamma.$$

Исключая ρ из трёх последних уравнений, запишем уравнения прямой линии в виде

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}, \qquad (5')$$

Умножая знаменатели отношений (5′) на одно и то же произвольное число, представим уравнения прямой линии в виде

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \tag{5}$$

где m, n и p суть количества, пропорциональные косинусам углов прямой линии с осями координат, т. е.

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma.$$

Эти уравнения (5) называют *нормальными уравнениями прямой линии*.

Посмотрим, как определить $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, зная m, n, p. По сказанному имеем: $m=\lambda\cos\alpha$, $n=\lambda\cos\beta$, $p=\lambda\cos\gamma$, где λ есть фактор пропорциональности. Возводя последние равенства в квадрат и складывая, получим:

$$m^2+n^2+p^2=\lambda^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma).$$

Так как $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (ч. II, гл. I, § 3), то

$$m^2+n^2+p^2=\lambda^2$$

и

$$\lambda=\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{4′}$$

В формулах (4′) можно брать знак + или —, соответственно двум направлениям прямой.

Числа m, n, p называются *угловыми коэффициентами прямой линии* и их отношения $m:n:p$ определяют её направление в пространстве.

§ 2. Уравнения прямой линии в проекциях. Записав нормальные уравнения (5) прямой линии в виде

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z-c}{p},\quad \frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

выразим из них x и y через z. Тогда получим:

$$x=Mz+x_0,\quad y=Nz+y_0, \tag{6}$$

где положено

$$M=\frac{m}{p}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad N=\frac{n}{p}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};\quad x_0=a-\frac{mc}{p},\quad y_0=b-\frac{nc}{p}.$$

Уравнения прямой линии (6) являются частным случаем уравнений (5). В самом деле, полагая в уравнениях (5) $c=0$ и $p=1$, получим уравнения (6), где $M=m$, $N=n$, $x_0=a$, $y_0=b$. Уравнения (5) можно привести к виду (6), если $\cos\gamma\neq 0$, т. е. $\gamma\neq\frac{\pi}{2}$, иными словами к виду (6) можно привести уравнения всякой прямой линии, не параллельной плоскости координат xOy.

Чтобы фактически выполнить такое приведение, поступают следующим образом. Допустим, что прямая линия, рассматриваемая как линия пересечения двух плоскостей, изображается системой двух уравнений первой степени:

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0. \tag{7}$$

Очевидно, системе вида (7) соответствует прямая линия, если плоскости, определяемые двумя уравнениями (7), не параллельны. Решая систему (7) относительно x и y, получим равносильную ей систему вида (6). Такое изображение прямой линии возможно, если уравнения (7) можно разрешить относительно x и y. В противном случае x и y исключаются из системы (7), и мы получаем уравнение вида $z=c$, т. е. данная прямая линия лежит в плоскости, параллельной плоскости координат xOy. Это обстоятельство вполне согласуется с замечанием, сделанным выше.

Каждое из уравнений (6) в отдельности изображает плоскость, одна из них параллельна оси Oy, а другая — оси Ox. Таким образом, представляя прямую линию уравнениями вида (6), мы рассматриваем её как пересечение двух плоскостей, проектирующих эту прямую на плоскости координат xOz и yOz. Следовательно, первое из уравнений (6), рассматриваемое в плоскости xOz, изображает проекцию данной прямой линии на эту плоскость; точно так же второе из уравнений (6), рассматриваемое в плоскость yOz, изображает проекцию данной прямой линии на плоскости yOz. Итак, можно сказать, что дать уравнения прямой линии в виде (6) — это значит дать её проекции на плоскости координат xOz и yOz.

Отсюда следует геометрический смысл постоянных M и N: M представляет собой угловой коэффициент проекции данной прямой на плоскость координат xOz (тангенс угла этой проекции с осью Oz), а N есть угловой коэффициент проекции данной прямой на плоскость координат yOz (тангенс угла этой проекции с осью Oz). Таким образом, числа M и N определяют направления проекций данной прямой линии на две плоскости координат, а значит, они характеризуют и направление самой данной прямой. Поэтому числа M и N называют угловыми коэффициентами данной прямой.

Чтобы выяснить геометрический смысл постоянных x_0 и y_0, положим в уравнениях (6) прямой линии $z=0$; тогда получим: $x=x_0$, $y=y_0$, т. е. точка $(x_0, y_0, 0)$ лежит на данной прямой. Очевидно, эта точка есть точка пересечения данной прямой с плоскостью xOy. Итак, x_0 и y_0 суть координаты следа данной прямой линии на плоскости координат xOy.

Пример 1. Даны уравнения прямой: $x=2$, $x+y-z+1=0$. Привести эти уравнения к виду (6).

Искомые уравнения будут: $x=2$, $y=z-3$.

Пример 2. Определить углы, образуемые с осями координат прямою $x=a$, $y=b$.

Уравнения данной прямой линии в нормальном виде будут:

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-0}{1},$$

так как $x=0\cdot z+a$, $y=0\cdot z+b$. Следовательно, имеем: $m=0$, $n=0$, $p=1$. Отсюда находим:

$$\cos\alpha=0,\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1}}=1.$$

Итак, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$; $\gamma=0$.

§ 3. Угол между двумя прямыми линиями. Пусть уравнения двух прямых линий суть:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},\qquad \frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}.$$

Направляющие косинусы этих прямых будут:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\\ \cos\alpha'&=\frac{m'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}},\quad \cos\beta'=\frac{n'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}},\\ \cos\gamma'&=\frac{p'}{\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}};\end{aligned}\right\}\qquad (4'')$$

Обозначая через φ искомый угол, найдём (ч. II, гл. I, § 3):

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

или

$$\cos\varphi=\frac{mm'+nn'+pp'}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2}}.\qquad (8)$$

Замечание. Формула (8) сразу вытекает из § 10 гл. II [формула (15′)], если заметить, что φ есть угол между векторами $\{m, n, p\}$ и $\{m', n', p'\}$, определяющими направления данных прямых.

Пример. Определить угол между прямыми

$$x=a,\quad y=b\quad \text{и}\quad x=c,\quad z=d.$$

Для первой прямой угловые коэффициенты будут: $m=0$, $n=0$, $p=1$. Угловые коэффициенты второй прямой суть: $m'=0$, $n'=1$, $p'=0$. Следовательно:

$$\cos\varphi=\frac{0\cdot0+1\cdot0+1\cdot0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=0,\quad \text{или}\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

§ 4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. В случае перпендикулярности прямых $\cos\varphi=0$, и из формулы (8) получаем искомое условие:

$$mm'+nn'+pp'=0\ (\textit{условие перпендикулярности}).\qquad (9)$$

Замечание. Это условие получится сразу, если заметим, что скалярное произведение векторов $\{m, n, p\}$ и $\{m', n', p'\}$ должно быть равно нулю.

Так как направление прямой определяется отношениями $m:n:p$, то условие параллельности двух прямых будет:

$$\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}\ (\textit{условие параллельности}).\qquad (10)$$

Задача 1. *Составить уравнения прямой линии, проходящей через данную точку* (a, b, c) *параллельно прямой*

$$\frac{x-a'}{m}=\frac{y-b'}{n}=\frac{z-c'}{p}.$$

Пусть уравнения искомой прямой будут:

$$\frac{x-a}{M}=\frac{y-b}{N}=\frac{z-c}{P}.\qquad (5')$$

Так как эта прямая параллельна данной прямой, то должно выполняться условие их параллельности:

$$\frac{M}{m}=\frac{N}{n}=\frac{P}{p},$$

откуда можно взять $M=m$, $N=n$, $P=p$. Следовательно, уравнения искомой прямой суть:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Задача II. *Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через точку* (a, b, c) *перпендикулярно прямой линии*

$$\frac{x-a'}{m}=\frac{y-b'}{n}=\frac{z-c'}{p}.$$

Уравнение любой прямой, проходящей через данную точку, будет:

$$\frac{x-a}{M}=\frac{y-b}{N}=\frac{z-c}{P}.$$

Условие перпендикулярности данной прямой с искомыми будет:

$$Mm+Nn+Pp=0.$$

Так как M, N и P пропорциональны соответственно $x-a$, $y-b$ и $z-c$, то уравнение искомого геометрического места будет:

$$m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0.$$

Очевидно, это есть плоскость, проходящая через точку (a, b, c) перпендикулярно данной прямой линии.

Замечание. Рассмотренную задачу можно решить также с помощью векторов следующим образом. Пусть $\mathbf{r}_0$—радиус-вектор данной точки (a, b, c), $\mathbf{s}$—направляющий вектор данной прямой и $\mathbf{r}$—радиус-вектор произвольной точки искомого геометрического места. Так как векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{s}$ перпендикулярны, то имеем:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{s}=0.$$

Это есть векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}_0(a, b, c)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{s}(m, n, p)$. Представляя его в координатах, получим:

$$m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0.$$

§ 5. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Пусть координаты данных точек суть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Общие уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1), будут:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

По условию прямая должна пройти через точку (x_2, y_2, z_2), т. е.

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}.$$

Подставляя в предыдущие уравнения вместо m, n, p величины x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, им пропорциональные, получим искомые уравнения:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

Пример. Составить уравнения прямой линии, проходящей через начало координат и точку (1, 1, 1).

Здесь $x_1=y_1=z_1=0$; $x_2=y_2=z_2=1$. Следовательно, пользуясь уравнениями (11), получим искомые уравнения:

$$x=y=z.$$

Замечание. Обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы двух данных точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) и напишем в векторном виде уравнение прямой, проходящей через эти точки. Очевидно, искомая прямая должна проходить через точку $\mathbf{r}_1$ параллельно вектору $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, а потому (см. § 1) её уравнение будет:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,t.$$

Переходя к координатам, заменим последнее уравнение тремя следующими:

$$x=x_1+(x_2-x_1)\,t,\quad y=y_1+(y_2-y_1)\,t,\quad z=z_1+(z_2-z_1)\,t,$$

откуда, исключая параметр t, получим уравнения (11).

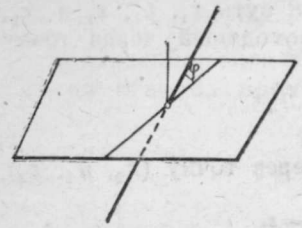
§ 6. Угол между прямой и плоскостью. Пусть уравнения прямой линии суть:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p},$$

а уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Искомый угол φ является дополнительным углом до 90° для угла, образованного прямой с перпендикуляром к плоскости (черт. 106). Так как угловые коэффициенты перпендикуляра к плоскости суть A, B, C, а угловые коэффициенты данной прямой m, n и p, то



Черт. 106.

$$\sin\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \quad (12)$$

§ 7. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. В случае параллельности прямой линии

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

угол между ними равен нулю, следовательно, $\sin\varphi=0$ и формула (12) даёт искомое условие:

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ (}\textit{условие параллельности}\text{)}. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е. Это условие получится сразу, если заметим, что векторы $\{A, B, C\}$ и $\{m, n, p\}$ перпендикулярны, и, значит, их скалярное произведение равно нулю.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности этой прямой и перпендикуляра к плоскости, т. е. будет:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \text{ (}\textit{условие перпендикулярности}\text{)}. \quad (14)$$

З а д а ч а I. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* (a, b, c) *перпендикулярно прямой*

$$\frac{x-a'}{m}=\frac{y-b'}{n}=\frac{z-c'}{p}.$$

Уравнение любой плоскости, проходящей через точку (a, b, c), имеет вид

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

Условие перпендикулярности этой плоскости и данной нам даёт:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p},$$

поэтому можно взять $A=m$, $B=n$, $C=p$. Подставляя эти значения A, B и C в уравнение плоскости, получим:

$$m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0.$$

З а м е ч а н и е. Из геометрических соображений легко сразу написать уравнение искомой плоскости в векторной форме. Действительно, обозначив через $\mathbf{r}_1\{a, b, c\}$ радиус-вектор данной точки, мы усматриваем, что вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, как лежащий в искомой плоскости, должен быть перпендикулярен к вектору $\mathbf{s}\{m, n, p\}$. Условие перпендикулярности векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{s}$ будет искомым уравнением плоскости:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{s}=0.$$

Выражая его в координатах, получим:

$$m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0.$$

З а д а ч а II. *Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через точку* (a, b, c) *параллельно плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Уравнения любой прямой, проходящей через точку (a, b, c), суть:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Условие параллельности искомых прямых и данной плоскости выразится равенством

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Заменяя в последнем условии m, n и p величинами $x-a$, $y-b$ и $z-c$, им пропорциональными, получаем:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

Очевидно, это есть уравнение плоскости, проходящей через точку (a, b, c) параллельно данной плоскости.

Замечание. Уравнение любой прямой, проходящей через точку $\mathbf{r}_1(a, b, c)$, будет:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}t,$$

где $\mathbf{s}$ есть тот вектор, которому прямая параллельна. Так как искомая прямая должна быть перпендикулярна к вектору $\mathbf{n}(A, B, C)$, то должно иметь место

$$\mathbf{ns} = 0.$$

Умножая уравнение прямой на вектор $\mathbf{n}$, получим:

$$\mathbf{rn} = \mathbf{r}_1\mathbf{n} + \mathbf{ns}t, \quad \text{или} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0,$$

так как $\mathbf{ns} = 0$. Уравнение $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0$ изображает плоскость, проходящую через точку $\mathbf{r}_1$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$. Переводя его в координатную форму, будем иметь:

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0.$$

§ 8. Общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую. Пусть уравнения данной прямой суть:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Составим уравнение первой степени:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (15)$$

которое при любом значении постоянного λ изображает плоскость. Если точка лежит на данной прямой линии, то её координаты одновременно удовлетворяют обоим уравнениям этой прямой и, следовательно, уравнению (15) при любом значении λ. Таким образом, уравнение (15) изображает плоскости, проходящие через данную прямую. Обратно, всякая такая плоскость определяется одной точкой $M(x_1, y_1, z_1)$, лежащей вне данной прямой линии; значение постоянного λ, соответствующее этой плоскости, определится из условия:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) = 0.$$

Уравнение (15) представляет *пучок плоскостей*, проходящих через данную прямую.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x + y - z = 0, \quad x - y + z - 1 = 0$$

и точку (1, 1, —1).

Уравнение любой плоскости, проходящей через данную прямую, имеет вид

$$x + y - z + \lambda(x - y + z - 1) = 0.$$

Условие прохождения этой плоскости через точку (1, 1, —1) даёт:

$$3 + \lambda(-2) = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{3}{2}.$$

Подставляя это значение λ в уравнение плоскости, получим:

$$x + y - z + \frac{3}{2}(x - y + z - 1) = 0,$$

или

$$5x - y + z - 3 = 0.$$

Замечание. Запишем уравнения двух данных плоскостей в векторной форме:

$$\mathbf{rn} + D = 0, \quad \mathbf{rN} + D_1 = 0,$$

где $\mathbf{n}\{A, B, C\}$ и $\mathbf{N}\{A_1, B_1, C_1\}$ суть векторы, перпендикулярные к этим плоскостям. Помножив второе уравнение на произвольный скаляр λ, сложим его с первым уравнением. Полученное уравнение

$$\mathbf{r}(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{N}) + D + \lambda D_1 = 0, \qquad (15')$$

очевидно, при любом значении постоянного λ изображает плоскость. Если точка $\mathbf{r}$ лежит на пересечении двух данных плоскостей, то её радиус-вектор $\mathbf{r}$ одновременно удовлетворяет обоим данным уравнениям и, следовательно, вновь образованному уравнению при любом значении λ. Таким образом, уравнение (15′) изображает плоскости, проходящие через прямую пересечения двух данных плоскостей. Обратно, всякая такая плоскость определяется одной точкой $M(\mathbf{r}_1)$, лежащей вне данной прямой линии, и значение постоянного λ, соответствующее этой плоскости, определится из условия

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{N}) + D + \lambda D_1 = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n} + D}{\mathbf{r}_1\mathbf{N} + D_1}.$$

Переходя к координатам, получим уравнения двух данных плоскостей в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$(1+a)(1+a) =$
$1 + a + a + a^2$

а уравнение соответствующего пучка плоскостей в виде

$$(A+\lambda A_1)x+(B+\lambda B_1)y+(C+\lambda C_1)z+D+\lambda D_1=0,$$

что совпадает с уравнением (15).

§ 9. Пересечение прямой с плоскостью. Пусть даны уравнения прямой линии:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \tag{16}$$

и уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{17}$$

Координаты точки пересечения прямой линии (16) с плоскостью (17) должны одновременно удовлетворять уравнениям (16) и (17), а потому для их определения нужно совместно решить эти уравнения, считая x, y, z за неизвестные.

Приравнивая каждое из равных отношений уравнений (16) вспомогательному неизвестному t, получаем четыре уравнения первой степени с четырьмя неизвестными x, y, z и t:

$$\frac{x-a}{m}=t,\ \frac{y-b}{n}=t,\ \frac{z-c}{p}=t,\quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Из первых трёх уравнений находим соответственно:

$$x=a+mt,\ y=b+nt,\ z=c+pt. \tag{18}$$

Подставляя эти значения x, y и z в четвёртое уравнение, получаем:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0$$

или

$$Aa+Bb+Cc+D+t(Am+Bn+Cp)=0,$$

откуда находим:

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}, \tag{19}$$

Внося найденное значение t в формулы (18), получим координаты искомой точки пересечения прямой линии (16) плоскостью (17). Если

$$Am+Bn+Cp\neq 0,$$

то t, вычисленное по формуле (19), имеет определённое конечное

значение; следовательно, в этом случае прямая пересекает плоскость в одной точке. В случае

$$Am+Bn+Cp=0,\quad Aa+Bb+Cc+D\neq 0$$

прямая параллельна плоскости (в силу первого равенства), а точка (a, b, c), через которую прямая проходит, лежит вне плоскости, следовательно, прямая не имеет ни одной общей точки с плоскостью. Наконец, если

$$Am+Bn+Cp=0,\quad Aa+Bb+Cc+D=0,$$

то прямая параллельна данной плоскости (в силу первого равенства) и проходит через точку (a, b, c), лежащую в этой плоскости (в силу второго равенства); следовательно, прямая вся лежит в плоскости.

З а м е ч а н и е. Обозначая через $\mathbf{r}_1(a, b, c)$ радиус-вектор данной точки на прямой линии и через $\mathbf{s}(m, n, p)$ вектор, которому данная прямая параллельна, запишем уравнение данной прямой в векторной форме:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{s}t.$$

Обозначив через $\mathbf{n}\{A, B, C\}$ вектор, перпендикулярный к данной плоскости, запишем её уравнение в векторном виде:

$$\mathbf{rn}+D=0.$$

Радиус-вектор точки пересечения прямой линии с плоскостью должен одновременно удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{s}t,\quad \mathbf{rn}+D=0,$$

а потому для его определения нужно совместно решить эти уравнения, считая $\mathbf{r}$ неизвестным. Это неизвестное мы определим, если найдём соответствующее ему значение параметра t.

Внося $\mathbf{r}$ из первого уравнения во второе, получим:

$$(\mathbf{r}_1+\mathbf{s}t)\,\mathbf{n}+D=0,\ \text{или}\ \mathbf{r}_1\mathbf{n}+t\,\mathbf{sn}+D=0,$$

откуда находим:

$$t=-\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{n}+D}{\mathbf{sn}}.$$

Внося найденное значение t в уравнение

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{s}t,$$

получим радиус-вектор искомой точки пересечения прямой с плоскостью. Переходя к координатам, получим из уравнений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}t, \quad \mathbf{r}\mathbf{n} + D = 0$$

уравнения (16) и (17) в координатной форме, а из формулы для t — её выражение (19). Если

$$\mathbf{s}\mathbf{n} \neq 0,$$

то данная прямая не будет перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, т. е. она не будет параллельна данной плоскости. В этом случае прямая линия пересекается с плоскостью в одной точке. Если

$$\mathbf{s}\mathbf{n} = 0 \text{ и } \mathbf{r}_1\mathbf{n} + D \neq 0,$$

то прямая будет перпендикулярна вектору $\mathbf{n}$, т. е. она будет параллельна данной плоскости, причём её точка $\mathbf{r}_1$ не лежит в данной плоскости. В этом случае прямая параллельна данной плоскости и расположена вне этой плоскости. Наконец, если

$$\mathbf{s}\mathbf{n} = 0 \text{ и } \mathbf{r}_1\mathbf{n} + D = 0,$$

то прямая параллельна данной плоскости и имеет с ней общую точку $\mathbf{r}_1$. В этом случае прямая лежит в данной плоскости.

§ 10. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости. Две прямые в пространстве, вообще говоря, не лежат в одной плоскости. Посмотрим, при каком условии две прямые

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \quad \frac{x-a'}{m'} = \frac{y-b'}{n'} = \frac{z-c'}{p'}$$

лежат в одной плоскости. Пусть уравнение плоскости, в которой лежат обе данные прямые, будет:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{20}$$

Условия, при которых первая прямая находится в плоскости (20), согласно предыдущему (§ 9), имеют вид

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Aa + Bb + Cc + D = 0. \tag{21}$$

Аналогично, условия прохождения плоскости (20) через вторую данную прямую суть:

$$Am' + Bn' + Cp' = 0, \quad Aa' + Bb' + Cc' + D = 0. \tag{21'}$$

Остаётся исключить неизвестные A, B, C, D из уравнений (21) и (21'), чтобы найти требуемое условие. Вычитая друг из друга вторые равенства (21) и (21'), исключим D:

$$A(a-a') + B(b-b') + C(c-c') = 0. \tag{22}$$

Из первых равенств (21) и (21') находим отношения $A : B : C$. В самом деле, разделив эти уравнения на C, определяем неизвестные $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ из полученных соотношений:

$$\frac{A}{C}m + \frac{B}{C}n + p = 0, \quad \frac{A}{C}m' + \frac{B}{C}n' + p' = 0.$$

Таким образом, находим:

$$\frac{A}{C} = \frac{np' - n'p}{mn' - m'n}, \quad \frac{B}{C} = \frac{pm' - p'm}{mn' - m'n},$$

или

$$A : B : C = (np' - n'p) : (pm' - p'm) : (mn' - m'n),$$

откуда следует, что

$$A = (np' - n'p)\,l, \quad B = (pm' - p'm)\,l, \quad C = (mn' - m'n)\,l,$$

где l есть произвольный фактор пропорциональности. Внося полученные значения A, B и C в равенство (22), по сокращении его на l найдём:

$$(np' - n'p)(a-a') + (pm' - p'm)(b-b') + (mn' - m'n)(c-c') = 0. \tag{23}$$

Это и есть *условие, при котором две данные прямые лежат в одной плоскости.*

Условие (23) принимает более простой вид в том случае, когда прямые даны уравнениями

$$x = Mz + x_0, \quad y = Nz + y_0$$

и

$$x = M'z + x_0', \quad y = N'z + y_0'.$$

В этом случае

$$p = p' = 1, \quad c = c' = 0, \quad m = M, \quad n = N, \quad m' = M', \quad n' = N';$$
$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad a' = x_0', \quad b' = y_0'$$

и условие (23) принимает вид

$$(N-N')(x_0-x_0')+(M'-M)(y_0-y_0')=0,$$

или

$$(N-N')(x_0-x_0')=(M-M')(y_0-y_0'),$$

откуда следует:

$$\frac{x_0-x_0'}{y_0-y_0'}=\frac{M-M'}{N-N'}. \qquad (24)$$

Пример 1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 1, 1) и пересекающей две данные прямые:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4};$$

Уравнения искомой прямой, проходящей через точку (1, 1, 1), суть:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p};$$

Условие нахождения этой прямой с первой из данных прямых в одной плоскости имеет вид:

$$(3n-2p)\cdot 1+(p-3m)\cdot 1+(2m-n)\cdot 1=0, \text{ или } m-2n+p=0.$$

Условие нахождения искомой прямой со второй из данных прямых в одной плоскости запишется в виде:

$$(4n-p)\cdot 0+(2p-4m)\cdot(-1)+(m-2n)\cdot(-2)=0, \text{ или } 2m+4n-2p=0,$$

что по сокращении на 2 даст:

$$m+2n-p=0.$$

Остаётся определить отношение $m:n:p$ из двух уравнений: $m-2n+p=0$ и $m+2n-p=0$. Разделив каждое из этих уравнений на p, находим неизвестные:

$$\frac{m}{p}=0, \quad \frac{n}{p}=\frac{1}{2}, \text{ т. е. } m:n:p=0:1:2.$$

Подставляя в уравнение искомой прямой вместо m, n, p соответственно 0, 1, 2, получим окончательное уравнение прямой, проходящей через точку (1, 1, 1) и лежащей в одной плоскости с первой прямой и в одной плоскости со второй прямой:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

Легко проверить, что эта прямая действительно пересекается с каждой из двух заданных прямых [1]).

Пример 2. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 1, 1), пересекающей прямую $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4};$$

Уравнения искомой прямой будут:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p};$$

где отношение $m:n:p$ определяется из условий:

$$m-2n+p=0, \quad 2m+n+4p=0,$$

из которых первое есть условие нахождения искомой прямой в одной плоскости с первой из данных прямых (см. пример 1), а второе выражает перпендикулярность искомой прямой со второй из данных прямых. Из этих условий находим:

$$m:n:p=9:2:(-5);$$

Уравнения искомой прямой будут:

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5};$$

Замечание 1. Условие (23) может быть получено проще, если воспользоваться определителями (ч. I, гл. VI, § 6). Действительно, исключая A, B и C из уравнения (22) и первых уравнений (21) и (21′), как из однородной системы с тремя неизвестными, получим:

$$\begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}=0.$$

Это и есть искомое условие (23), записанное при помощи определителя.

---

[1]) Вообще говоря, при других числовых данных, могло бы случиться, что прямая, найденная указанным образом, параллельна одной или даже обеим из заданных прямых. В этом случае мы заключили бы, что не существует прямой, проходящей через заданную точку и пересекающейся с обеими прямыми.

Замечание 2. Рассмотренную в этом параграфе задачу легко решить при помощи векторов. В самом деле, пусть уравнения прямых даны в векторной форме

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{s}t \text{ и } \mathbf{r}=\mathbf{r}'_0+\mathbf{s}'t,$$

причём $\mathbf{r}_0\{a, b, c\}$, $\mathbf{r}'_0\{a', b', c'\}$, $\mathbf{s}\{m, n, p\}$, $\mathbf{s}'\{m', n', p'\}$. Из геометрических соображений ясно, что обе прямые лежат в одной плоскости лишь в том случае, когда векторы $\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'_0$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{s}'$ компланарны. Таким образом, искомое условие будет:

$$((\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'_0)\,\mathbf{s}\,\mathbf{s}')=0$$

(гл. II, § 14). Переписав это условие в проекциях, получим

$$\begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}=0.$$

Упражнения

Прямая

1. Указать особенности в расположении следующих прямых [1]:

a) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} Ax+Cz=0, \\ A_1x+C_1z=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y+2z=0, \\ 5x-1=0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+3y-7z-5=0, \\ 4x+3y-7z-5=0. \end{cases}$

2*. При каком значении свободного члена D прямая

$$3x-y+2z-6=0, \quad x+4y-z+D=0$$

пересекает ось Oz?

3*. При каких значениях коэффициентов B и D прямая

$$x-2y+z-9=0, \quad 3x+By+z+D=0$$

лежит в плоскости xOy?

4*. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

[1]) Упражнения 1, 2*, 3* и 4* заимствованы из книги *О. Н. Цубербиллер*, Задачи и упражнения по аналитической геометрии.

для того чтобы прямая: a) проходила через начало координат; b) была параллельна оси Ox; c) пересекала ось Oy; d) совпадала с осью Oz?

5. Определить, лежат ли точки $A(5, -2, -3)$ и $B(8, 3, 1)$ на прямой

$$5x-3y-31=0, \quad 3x+4y+7z+14=0.$$

6. Проверить, что, исключив из двух уравнений предыдущей задачи: a) координату y, b) координату x, получим в обоих случаях уравнение плоскости, проходящей через точку A и не проходящей через точку B.

7*. Дана прямая

$$2x-3y+4z-12=0, \quad x+4y-2z-10=0.$$

Найти уравнения плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

8. Дана прямая

$$3x+2y-4z-5=0, \quad 6x-y-2z+4=0.$$

Найти уравнения проекций этой прямой на координатные плоскости.

9*. Найти проекцию прямой

$$x+y-z-1=0, \quad x-y+z+1=0$$

на плоскость $x+y+z=0$.

10. Найти проекцию прямой

$$2x+3y+4z+5=0, \quad x-6y+3z-7=0$$

на плоскость $2x+2y+z-15=0$.

11. Определить направляющие косинусы прямых:

a) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$; b) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}$.

12. Привести уравнения прямых

a) $\begin{cases} x=3z-5, \\ y=2z-8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2z-5, \\ y=6z+7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=4, \\ z=3x+12 \end{cases}$

к нормальному виду.

13. Найти углы между прямыми:

L_1 $\begin{cases} y=2x-7, \\ z=2x+5; \end{cases}$ L_2 $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x+8, \\ z=3x; \end{cases}$ L_3 $\begin{cases} y=6; \\ z=\dfrac{15}{8}x+6. \end{cases}$

14*. Определить направляющие косинусы прямой

$$x+2y-z-2=0, \quad x+y-3z-7=0.$$

15. Найти направляющие косинусы прямой

$$x+y-z=0, \quad x-y+2=0.$$

16. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0. \end{cases}$$

17. Через точку (2, —3, —8) провести прямую, параллельную а) оси Oz; b) прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{5}$.

18. Составить уравнения прямой, проходящей через точки (3, —2, —1) и (5, 4, 5).

19. Найти уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку (a, b, c).

20. Проверить, лежат ли прямые

a) $\begin{cases} x=7z-17, \\ y=3z-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4z-11, \\ y=-10z+25; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+y+3z=0, \\ 2x+3y+2z-9=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y+z+5=0; \\ x-3y-2z-3=0 \end{cases}$

в одной плоскости.

21. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (—3, 5, —9) и пересекающей прямые:

$$\begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10. \end{cases}$$

22. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 2, 3), пересекающей ось Oz и перпендикулярной к прямой $x=y=z$.

23. Найти уравнения прямой, пересекающейся с прямыми

$$\begin{cases} x=3z-1, \\ y=2z-3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2 \end{cases}$$

и перпендикулярной к ним обеим.

24. Провести через точку (7, 3, 5) прямую, направляющие косинусы которой суть $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$. Найти уравнения прямой, пересекающей первую прямую, проходящей через точку (2, —3, —1) и образующей с осью Ox угол в 60°.

25. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c) и пересекающей прямые

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}, \quad \frac{x-a''}{m''}=\frac{y-b''}{n''}=\frac{z-c''}{p''}.$$

26. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (a, b, c), пересекающей ось Oz и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x}{m'}=\frac{y}{n'}=\frac{z}{p'}.$$

27. Найти уравнения прямой, пересекающейся с прямыми

$$\begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b, \end{cases} \quad \begin{cases} x=m'z+a', \\ y=n'z+b' \end{cases}$$

и перпендикулярной к ним обеим.

Плоскость и прямая

28. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

и плоскости $2x+3y+3z-8=0$.

29. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} y=-2x+9, \\ z=9x-43 \end{cases}$$

и плоскости $3x-4y+7z-33=0$.

30. Найти угол между прямой

$$3x-2y=24, \quad 3x-z=-4$$

и плоскостью $6x+15y-10z+31=0$.

31. Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (1, 2, 3) на плоскость:

a) $4x-5y-8z+21=0$; b) $3x+11y=0$; c) $z=8$.

32. Через точку (3, —2, —1) провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

33. Найти кратчайшее расстояние от точки A (1, 2, 3) до прямой

$$x+y-z=1, \quad 2x+z=3.$$

34*. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми

$$x+y-z=1, \quad 2x+z=3 \quad \text{и} \quad x=y=z-1.$$

35. Каково должно быть значение коэффициента p, чтобы прямая

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-8}=\frac{z-2}{p}$$

была параллельна плоскости $3x-4y+7z-33=0$?

36. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1, -2, 3)$ и параллельной прямым

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{6}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-8}.$$

37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, -3, 1)$ и через прямую

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}.$$

38. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$x+y=0, \quad x-y+z-2=0$$

параллельно прямой $x=y=z$.

39. Провести через прямую

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

плоскость, параллельную прямой

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1};$$

40. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3};$$

41. Через точку $(-1, 0, 4)$ провести прямую, параллельную плоскости

$$3x-4y+z-10=0,$$

так, чтобы она пересекла прямую

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2};$$

42. Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через начало координат перпендикулярно к прямой $x=y=z$.

43. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (a, b, c) и параллельной прямым с угловыми коэффициентами (m, n, p), (m', n', p').

44. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (a, b, c) и через прямую

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}.$$

45. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

параллельно прямой

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

46. Провести через прямую

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

плоскость, параллельную прямой

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'}.$$

47. Найти уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}, \quad \frac{x-a'}{m}=\frac{y-b'}{n}=\frac{z-c'}{p};$$

48. Через точку (a, b, c) провести прямую, параллельную плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

так, чтобы она пересекала прямую

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'};$$

49. Составить уравнение геометрического места всех прямых, проходящих через точку (a, b, c) перпендикулярно прямой

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

ГЛАВА V

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Изображение поверхностей посредством уравнений. В аналитической геометрии всякую поверхность рассматривают как геометрическое место точек. В таком определении поверхности содержится свойство, общее всем её точкам. Обозначая через x, y, z координаты произвольной точки данной поверхности относительно некоторой прямоугольной системы координат, мы выражаем посредством уравнения между x, y и z свойство, общее всем точкам поверхности. Таким образом составляется уравнение между переменными координатами x, y и z, которому удовлетворяют координаты произвольной точки данной поверхности. Это уравнение называют *уравнением поверхности*, входящие в него координаты x, y и z — *текущими координатами*. Так, например, в главе III мы видели, что плоскость изображается уравнением первой степени относительно текущих координат.

В качестве другого примера возьмём *шаровую поверхность* и составим её уравнение. Положение шаровой поверхности относительно некоторой прямоугольной системы координат будет определено, если даны координаты её центра C. Обозначим их через a, b и c. Размер шаровой поверхности определяется радиусом R. Обозначая через x, y и z координаты произвольной точки M шаровой поверхности, выразим аналитически свойство, общее всем точкам M. Из определения шаровой поверхности следует, что расстояние точки M до центра C есть величина постоянная, равная радиусу R, т. е.

$$CM = R. \tag{1}$$

Определяя CM как расстояние между двумя точками C и M (ч. II, гл. I, § 2), мы выразим равенство (1) с помощью текущих координат точки M:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R.$$

Возвышая обе части последнего уравнения в квадрат, освободимся от радикала и получим *уравнение шаровой поверхности* в окончательном виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \tag{2}$$

В этом уравнении постоянные a, b, c и R суть соответственно координаты центра и радиус шаровой поверхности, переменные

x, y и z являются координатами произвольной точки шаровой поверхности. В частности, если центр шаровой поверхности находится в начале координат, то $a=b=c=0$, и уравнение (2) принимает более простой вид:

$$x^2+y^2+z^2 = R^2. \tag{3}$$

§ 2. Геометрический смысл уравнений. Мы видели, что всякая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, изображается уравнением между координатами её точек. Обратно, всякое уравнение между переменными x, y и z, вообще говоря, изображает поверхность как геометрическое место точек, координаты которых x, y и z удовлетворяют этому уравнению.

§ 3. Две основные задачи. Из изложенного в §§ 1 и 2 вытекает постановка двух основных задач:

1. *Дана поверхность как геометрическое место точек. Составить уравнение этой поверхности.*

2. *Дано уравнение между координатами x, y и z. Исследовать форму поверхности, изображаемой этим уравнением.*

§ 4. Шаровая поверхность. Мы видели, что шаровая поверхность радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$ изображается уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \tag{2}$$

Раскрывая скобки, придадим уравнению (2) вид

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0. \tag{2'}$$

Уравнение (2′) содержит члены второго измерения, первого измерения и свободный член (нулевого измерения) относительно x, y и z. Такое уравнение называют уравнением второй степени. Итак, шаровая поверхность изображается уравнением второй степени относительно текущих координат. Но, очевидно, не всякое уравнение второй степени изображает шаровую поверхность. Действительно, из уравнения (2′) усматриваем, что в уравнении шаровой поверхности коэффициенты при квадратах координат равны, а члены с произведениями координат (xy, yz, zx) отсутствуют. Обратно, если эти два условия [1) равенство коэффициентов при x^2, y^2 и z^2, 2) отсутствие членов xy, yz, zx] осуществлены, то уравнение изображает шаровую поверхность, так как оно приводится к виду (2′) путём деления на коэффициент при x^2.

Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, изображает ли оно шаровую поверхность или нет. Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$$

изображает шаровую поверхность, так как в нём коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а члены с произведениями координат отсутствуют. Желая узнать размер шаровой поверхности и положение её в пространстве относительно данной системы координат, мы должны определить величину радиуса и координаты её центра. С этой целью данное уравнение мы приведём к виду (2). Такое преобразование есть не что иное, как представление уравнения (2′) в виде (2). Возьмём в данном примере члены, содержащие x, т. е. x^2-2x, и представим этот двучлен как неполный квадрат разности $x-1$. Получим:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1.$$

Аналогично поступая с членами, содержащими y и x, получим:

$$y^2-4y=(y-2)^2-4;\ z^2=(z-0)^2.$$

После этого данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=9.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), усматриваем, что

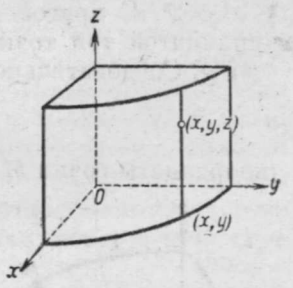
$$a=1,\ b=2,\ c=0,\ R=3.$$

§ 5. Цилиндрические поверхности. Положим, что данное уравнение не содержит буквы z:

$$F(x,\ y)=0.$$

На плоскости координат xOy это уравнение изображает некоторую линию L, — геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Этому уравнению удовлетворяют также координаты всех тех точек пространства, у которых две первые координаты совпадают с координатами любой точки линии L, т. е. тех точек пространства, которые проектируются на плоскость xOy в точки линии L. Совокупность

таких точек есть поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz и пересекающей линию L (черт. 107). Вообще поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной данному направлению и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической*. Линия L называется её *направляющей*, а все возможные положения движущейся прямой — *образующими*. Итак, *уравнение* $F(x,y)=0$ *изображает цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси* Oz.



Черт. 107.

Обратно, всякая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, изображается уравнением вида $F(x,y)=0$. Действительно, направляющая линия L может быть в этом случае взята в плоскости координат xOy, и её уравнение, рассматриваемое в пространстве, будет изображать данную цилиндрическую поверхность.

Точно так же, если уравнение не содержит буквы x (или y), то оно изображает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox (или Oy).

Пример 1. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

изображает цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть эллипс, лежащий в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*эллиптический цилиндр*).

Пример 2. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

изображает цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть гипербола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*гиперболический цилиндр*).

Пример 3. Уравнение

$$y^2=2px \qquad (6)$$

изображает цилиндрическую поверхность, у которой направляющая есть парабола, лежащая в плоскости xOy, а образующие параллельны оси Oz (*параболический цилиндр*).

§ 6. Поверхности вращения. Положим, что в плоскости yOz нам дана линия L, имеющая уравнение

$$F(Y,\ Z)=0.$$

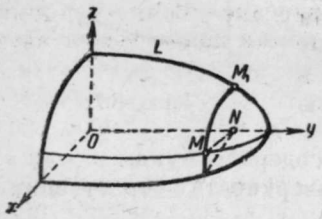
Найдём уравнение поверхности, полученной от вращения этой линии вокруг оси Oy (черт. 108).

Возьмём произвольную точку $M(x, y, z)$ нашей поверхности и проведём через неё плоскость перпендикулярно оси вращения Oy. Очевидно, в пересечении этой плоскости и нашей поверхности получится окружность с центром N на оси вращения. Координаты точки N будут $0, y, 0$. Радиус окружности MN как расстояние между точками N и M равен $\sqrt{x^2+z^2}$. С другой стороны, ясно, что этот радиус является аппликатой той точки M_1 данной линии L, ордината которой есть y. Следовательно, полагая в данном уравнении

$$Y=y,\quad Z=\sqrt{x^2+z^2}$$

(координаты точки M_1), мы получим искомое уравнение поверхности вращения:

$$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0.$$



Черт. 108.

Таким образом, мы приходим к следующему правилу:

Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, около оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\sqrt{x^2+z^2}$.

Аналогичные правила будут иметь место и по отношению к поверхностям вращения около других осей.

Пример 1. Уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

около оси Ox, будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \qquad (7)$$

Если тот же эллипс вращается около оси Oz, то уравнение полученной таким образом поверхности вращения будет иметь вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (7')$$

Если $a>c$, то в первом случае имеем удлинённый, а во втором случае сжатый *эллипсоид вращения*. При $a=c$ получаем шаровую поверхность.

Пример 2. Уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

около оси Ox, будет:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \qquad (8)$$

Это — так называемый *двухполостный гиперболоид вращения*.

Если ту же гиперболу будем вращать около оси Oz, то полученная таким образом поверхность будет иметь уравнение

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (8')$$

Это — так называемый *однополостный гиперболоид вращения*.

Пример 3. Уравнение поверхности, образованной вращением параболы

$$y^2=2pz$$

около оси Oz, будет:

$$x^2+y^2=2pz. \qquad (9)$$

Это — так называемый *параболоид вращения*.

§ 7. Уравнения линии в пространстве. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Пусть

$$F(x, y, z)=0 \text{ и } F_1(x, y, z)=0 \qquad (10)$$

суть уравнения тех поверхностей, пересечение которых даёт линию L. Координаты любой точки линии L удовлетворяют обоим уравнениям (10), так как эта точка лежит одновременно на обеих поверхностях. Итак, линия в пространстве рассматривается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений (10). Обратно, система двух уравнений (10) изображает линию в пространстве как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этой системе уравнений. Уравнения (10) называют *уравнениями линии L в пространстве*.

Очевидно, можно различным образом выбирать те поверхности, пересечением которых является данная линия L, и это обстоятельство соответствует тому факту, что вместо системы (10) можно взять любую другую систему двух уравнений, ей равносильную. Так, например, уравнения оси Oz будут:

$$x=0,\quad y=0.$$

Уравнения

$$x+y=0 \text{ и } x-y=0$$

также изображают ось Oz.

Проведём через линию L две цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям Oy и Oz. Уравнения этих цилиндрических поверхностей будут иметь вид (§ 5)

$$F(x, z)=0,\quad F_1(x, y)=0.$$

Так как линию L можно рассматривать как пересечение этих цилиндрических поверхностей, то система уравнений

$$F(x, z)=0, \quad F_1(x, y)=0 \tag{11}$$

изображает линию L. Каждое из уравнений (11), рассматриваемое в соответствующей плоскости координат, представляет, следовательно, проекцию данной линии L на плоскости xOz и xOy. Аналитически уравнения (11) получаются из уравнений(10) путём исключения букв y и z.

Пример. Написать уравнения окружности, получающейся в пересечении шаровой поверхности $x^2+y^2+z^2=1$ с плоскостью $z=\frac{1}{2}$.

Искомые уравнения окружности будут:

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad z=\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad x^2+y^2=\frac{3}{4}, \quad z=\frac{1}{2}.$$

Одно первое уравнение последней системы на плоскости координат xOy изображает окружность, являющуюся проекцией искомой окружности на эту плоскость. Эта проекция совпадает по размерам с искомой окружностью, так как последняя лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций.

§ 8. Цилиндрические поверхности (общий случай). Мы рассмотрели (§ 5) уравнение цилиндрической поверхности в том частном случае, когда образующие параллельны одной из осей координат. Вообще *цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию — направляющую цилиндрической поверхности.* Пусть направляющая цилиндрической поверхности L изображается уравнениями

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0. \tag{12}$$

Положим, что m, n и p суть угловые коэффициенты образующих цилиндрической поверхности. Общие уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}, \tag{13}$$

где (x, y, z) есть точка, принадлежащая направляющей L. Исключая x, y и z из четырёх уравнений (12) и (13), получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Пример. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой

$$x=y=z,$$

а направляющей служит прямая

$$x+y-z-1=0, \quad x-y+z=0.$$

Общие уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}.$$

Исключим x, y и z из последних четырёх уравнений. Обозначая через ρ величину каждого из последних отношений, найдём:

$$x=X-\rho, \quad y=Y-\rho, \quad z=Z-\rho.$$

Подставляя эти значения x, y и z в данные уравнения направляющей, получим

$$X+Y-Z-\rho-1=0, \quad X-Y+Z-\rho=0.$$

Исключая, наконец, ρ, найдём:

$$2Y-2Z-1=0.$$

Это, очевидно, есть уравнение плоскости, проходящей через данную направляющую и параллельной прямой $x=y=z$.

§ 9. Конические поверхности. *Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку — вершину конуса — и пересекающей данную линию — направляющую конуса.*

Пусть направляющая конуса изображается уравнениями

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0, \tag{14}$$

а вершина конуса имеет координаты x_0, y_0, z_0. Общие уравнения образующих конуса как прямых, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) и через точку (x, y, z) направляющей L, будут:

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}. \tag{15}$$

Исключая x, y и z из четырёх уравнений (14) и (15), получим искомое уравнение конической поверхности. Это уравнение обладает весьма простым свойством: оно однородно (т. е. все его члены—одного измерения) относительно разностей $X-x_0$, $Y-y_0$, $Z-z_0$. В самом деле, допустим сперва, что вершина конуса находится в начале координат ($x_0=y_0=z_0=0$). Пусть X, Y и Z—координаты любой точки конуса; они удовлетворяют, следовательно, уравнению конуса. После замены в уравнении конуса X, Y и Z соответственно через λX, λY, λZ, где λ — произвольный множитель, уравнение должно удовлетворяться, так как λX, λY и λZ суть координаты точки прямой, проходящей через начало координат в точку (X, Y, Z), т. е. образующей конуса. Следовательно, уравнение конуса не изменится, если все текущие координаты умножим на одно и то же число λ.

Отсюда следует, что это уравнение должно быть однородным относительно текущих координат.

В случае, если вершина конуса лежит в точке (x_0, y_0, z_0), мы перенесём начало координат в вершину, и по доказанному преобразованное уравнение конуса будет однородно относительно новых координат, т. е. относительно $X-x_0$, $Y-y_0$, $Z-z_0$.

Пример. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=c.$$

Общие уравнения образующих будут:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z};$$

Исключим x, y и z из последних четырёх уравнений. Заменяя z через c, определим x и y из последних двух уравнений:

$$x=c\frac{X}{Z}, \qquad y=c\frac{Y}{Z};$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение направляющей, будем иметь:

$$\frac{c^2}{a^2}\frac{X^2}{Z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{Y^2}{Z^2}=1,$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0. \tag{16}$$

Упражнения

1. Составить уравнение шаровой поверхности радиуса 4 с центром в точке (— 1, 2, 3).

2. Найти центр и радиус шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0.$$

3. Найти центр и радиус шаровой поверхности $x^2+y^2+z^2-2x=0$.

4. Найти центр и радиус шаровой поверхности

$$2x^2+2y^2+2z^2-5y-8=0.$$

5. Составить уравнение шаровой поверхности с центром в точке (1, 3, — 2), проходящей через начало координат.

6. Составить уравнение шаровой поверхности, проходящей через начало координат и точки (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, — 1).

7. Составить уравнение поверхности, полученной от вращения прямой линии $y=x$ около оси Ox.

8. Составить уравнение линии пересечения конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ с плоскостью $z=c$.

9. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и с направляющей

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \quad z=h.$$

10. Составить уравнение проекции линии

$$x^2+y^2-z=0, \quad z=x-1$$

на плоскость координат xOy.

11. Какую поверхность изображает уравнение $x^2=y^2+z^2$?

12. Какую линию изображает система уравнений

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=c?$$

13. Какую поверхность изображает уравнение

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0?$$

14. Какую поверхность изображает уравнение $x^2+y^2-2x=0$?

15. Какую поверхность изображает уравнение $x^2+y^2+4z^2-1=0$?

16. Какую поверхность представляет уравнение $x^2+y^2-z^2-1=0$?

17. Какую поверхность изображает уравнение $x^2-y^2-z^2-4=0$?

18. Какая поверхность изображается уравнением $z=x^2+y^2$?

19. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x=y=z$, а направляющей служит линия

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y+z=0.$$

ГЛАВА VI

ПОВЕРХНОСТИ 2-го ПОРЯДКА

§ 1. Порядок поверхности. Поверхность называется *алгебраической*, если левая часть её уравнения в декартовых координатах

$$F(x, y, z)=0$$

есть целый многочлен относительно x, y, z. Степень этого многочлена относительно x, y, z даёт *порядок алгебраической поверхности*. Можно показать, что порядок поверхности не зависит от выбора координатных осей. Мы знаем, что поверхности 1-го порядка суть плоскости. Не касаясь исследования общего уравнения поверхностей 2-го порядка, мы в этой главе разберём все возможные типы таких поверхностей, отправляясь от их простейших уравнений.

§ 2. Эллипсоид. Мы видели (гл. V, § 6), что уравнение поверхности, полученной от вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

около оси Oz, будет:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

Это уравнение изображает поверхность, называемую *эллипсоидом вращения*. Пересекая этот эллипсоид плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получим в сечении окружность, уравнения которой будут:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h \tag{1}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Следовательно, при изменении h от значения $-c$ до значения $+c$ окружность (1) описывает эллипсоид вращения.

Возьмём теперь вместо окружности (1) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h, \tag{2}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{3}$$

При изменении h от $-c$ до $+c$ этот эллипс описывает поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{I}$$

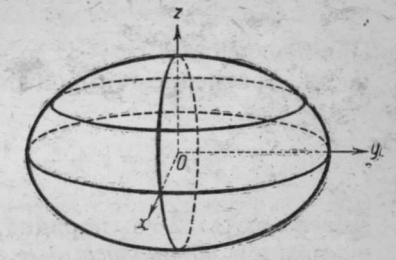
Поверхность 2-го порядка, изображаемая уравнением (I), называется *эллипсоидом*.

Пересекая эллипсоид плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(xOy); \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(xOz), \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(yOz). \tag{4}$$

Как мы уже видели, в сечении эллипсоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (2) с полуосями (3). При изменении h от $-c$ до $+c$ эти полуоси изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям a и b эллипса, лежащего в плоскости xOy. Два эллипса с пропорциональными полуосями называются подобными. Таким образом, эллипсоид есть поверхность, образованная движущимся эллипсом (плоскость которого остаётся параллельной плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по эллипсам (4) в плоскостях xOz и yOz (черт. 109).

Не уменьшая общности, мы можем считать $a \geqslant b \geqslant c$. Если $a=b=c$, то уравнение (I) изображает шаровую поверхность; если $a>b=c$, то уравнение (I) изображает удлинённый эллипсоид вращения с осью вращения Ox; если $a=b>c$, то уравнение (I) изображает сжатый эллипсоид вращения с осью вращения Oz. Если среди чисел a, b и c нет равных, то эллипсоид называется *трёхосным*.



Черт. 109.

Уравнение (I) содержит только квадраты координат, откуда следует, что эллипсоид симметричен относительно начала координат, а плоскости координат суть его плоскости симметрии, так как если некоторая точка $M(x, y, z)$ находится на эллипсоиде, то и точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ находятся на эллипсоиде при произвольном выборе знаков у координат.

§ 3. Однополостный гиперболоид. Уравнение поверхности, полученной от вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

около оси Oz, будет:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(гл. V, § 6). Это уравнение изображает поверхность, называемую *однополостным гиперболоидом вращения*. Пересекая его плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получим в сечении окружность, уравнения которой будут:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{h^2}{c^2}; \quad z=h \tag{5}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Следовательно, при изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ окружность (5) описывает однополостный гиперболоид вращения.

Возьмём теперь вместо окружности (5) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h; \tag{6}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{7}$$

При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ этот эллипс описывает поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (6):

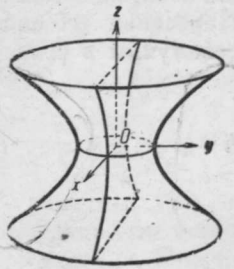
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{II}$$

Поверхность 2-го порядка, изображаемая уравнением (II), называется *однополостным гиперболоидом*.

Пересекая поверхность (II) плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении соответственно эллипс и две гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(xOy), \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,(xOz), \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,(yOz). \tag{8}$$

Как следует из предыдущего, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (6) с полуосями (7). При изменении h от $-\infty$ до $+\infty$ эти полуоси изменяются, оставаясь пропорциональными полуосям a и b эллипса, лежащего в плоскости xOy, и мы можем однополостный гиперболоид рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (плоскость которого остаётся параллельной плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по гиперболам (8) в плоскостях xOz, yOz (черт. 110). Если $a=b$, то уравнение (II) изображает однополостный гиперболоид вращения с осью вращения Oz.



Черт. 110.

Уравнение (II) содержит только квадраты координат, откуда следует, что однополостный гиперболоид симметричен относительно начала координат, а плоскости координат являются его плоскостями симметрии.

§ 4. Двухполостный гиперболоид. *Двухполостный гиперболоид вращения* мы получим, если гиперболу

$$\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

будем вращать около оси Oz. Его уравнение будет (гл. V, § 6):

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1.$$

Пересекая его плоскостью $z=h$, перпендикулярной оси вращения Oz, получим в сечении окружность, уравнения которой будут:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1, \quad z=h \tag{9}$$

и радиус которой равен

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{10}$$

Следовательно, при изменении h от c до $+\infty$ окружность (9) описывает одну полость гиперболоида, а при изменении h от $-c$ до $-\infty$ окружность (9) описывает другую его полость.

Возьмём вместо окружности (9) эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1; \quad z=h; \tag{11}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \quad \text{и} \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{12}$$

При изменении h от $-\infty$ до $-c$ и от $+c$ до $+\infty$ этот эллипс описывает двухполостную поверхность, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (11):

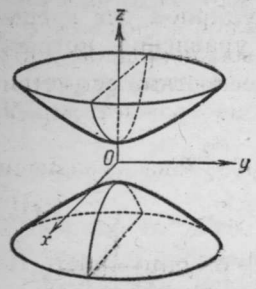
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1; \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{III}$$

Поверхность 2-го порядка, изображаемая уравнением (III), называется *двухполостным гиперболоидом*. Пересекая эту поверхность плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, мы получим в сечении соответственно мнимое место и две гиперболы:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\,(xOz), \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(yOz). \tag{13}$$

Как было выше сказано, в сечении двухполостного гиперболоида плоскостью $z=h$, параллельной плоскости xOy, получается эллипс (11) с полуосями (12), когда $|h|\geqslant c$. Отсюда вытекает, что двухполостный гиперболоид мы можем рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом (плоскость которого остаётся параллельной плоскости xOy), который при движении остаётся себе подобным и концы осей

которого скользят по гиперболам (13) в плоскостях xOz и yOz (черт. 111). Поверхность симметрична относительно начала координат, а плоскости координат суть её плоскости симметрии.



Черт. 111.

При $a=b$ уравнение (III) изображает двухполостный гиперболоид вращения с осью вращения Oz.

§ 5. Эллиптический параболоид. *Параболоид вращения* получается вращением параболы

$$y^2=2pz$$

около оси Oz. Его уравнение будет (гл. V, § 6):

$$x^2+y^2=2pz.$$

В сечении его плоскостью $z=h$, перпендикулярной оси вращения Oz, получается окружность, уравнения которой будут:

$$x^2+y^2=2ph;\quad z=h \tag{14}$$

и радиус которой равен

$$\sqrt{2ph}. \tag{15}$$

Следовательно, при изменении h от 0 до $+\infty$ окружность (14) описывает параболоид вращения.

Возьмём вместо окружности (14) эллипс

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1,\quad z=h; \tag{16}$$

лежащий в плоскости $z=h$, параллельной плоскости xOy, полуоси которого суть:

$$\sqrt{2ph},\quad \sqrt{2qh}. \tag{17}$$

При изменении h от 0 до $+\infty$ этот эллипс описывает поверхность 2-го порядка, называемую *эллиптическим параболоидом*, уравнение которой получим, исключив h из двух уравнений (16):

$$\frac{x^2}{2pz}+\frac{y^2}{2qz}=1,\quad \text{или}\quad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \tag{IV}$$

Пересекая эту поверхность плоскостями координат $z=0$, $y=0$, $x=0$, получим в сечении соответственно точку и две параболы:

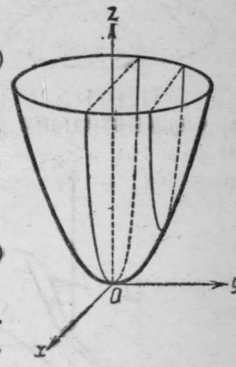
$$x^2=2pz\ (xOz),\quad y^2=2qz\ (yOz). \tag{18}$$

Из предыдущего усматриваем, что эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную движущимся эллипсом, который остаётся себе подобным и концы осей которого скользят по параболам (18) (черт. 112); плоскость эллипса при движении остаётся параллельной плоскости xOy.

Уравнение (IV) содержит только квадраты координат x и y, а потому плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии поверхности. При $p=q$ уравнение (IV) изображает параболоид вращения с осью вращения Oz.

§ 6. Гиперболический параболоид. Простейшее уравнение *гиперболического параболоида* имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{V}$$



Черт. 112.

т. е. отличается от уравнения (IV) только знаком при y^2. Плоскость координат xOz пересекает эту поверхность по параболе

$$x^2=2pz, \tag{19}$$

для которой ось Oz является осью симметрии и которая расположена в положительном направлении оси Oz. Плоскость $x=h$, параллельная плоскости yOz, пересекает поверхность (V) по параболе, уравнения которой будут:

$$y^2=-2qz+\frac{qh^2}{p},\quad x=h,$$

или

$$y^2=-2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right),\quad x=h. \tag{20}$$

Из этих уравнений усматриваем, что эти параболы, расположенные в плоскостях $x=h$, имеют один и тот же параметр ($=-q$), их оси симметрии находятся в плоскости xOz и параллельны оси Oz, а их вершины имеют координату $z=\frac{h^2}{2p}$. Так как уравнение параболы (19), расположенной в плоскости xOz, при $x=h$ даёт то же значение для z, то отсюда заключаем, что вершины парабол (20) расположены на параболе (19) (черт. 113).

Таким образом, гиперболический параболоид (V) можно рассматривать как поверхность, образованную движущейся параболой с отрицательным параметром ($=-q$), ось симметрии которой остаётся в плоскости xOz, а вершина движется по па-

раболе (19). Плоскость параболы остаётся параллельной плоскости yOz.

Плоскость xOy даёт в сечении с поверхностью (V) линию

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0,$$

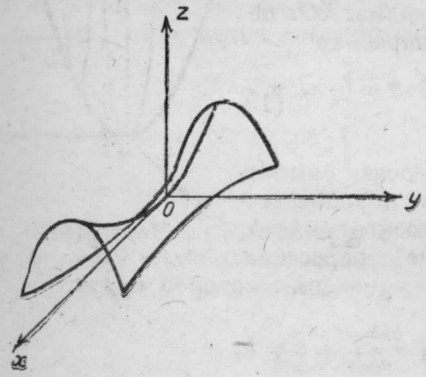
уравнение которой распадается на два;

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0,$$

и, следовательно, это сечение есть совокупность двух пересекающихся прямых.



Черт. 113.

Так как уравнение (V) содержит только квадраты координат x и y, то плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии для поверхности.

Гиперболический параболоид не может быть поверхностью вращения, так как с любой плоскостью он пересекается по гиперболе или параболе, и никогда в сечении его плоскостью не может получиться эллипс (или окружность).

§ 7. Конус 2-го порядка. В примере § 9 гл. V мы составили уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей линией

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=c.$$

Полученное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \text{(VI)}$$

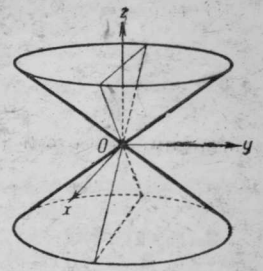
изображает *конус 2-го порядка*. Поверхность симметрична относительно начала координат, а плоскости координат суть её плоскости симметрии (черт. 114).

§ 8. Цилиндры 2-го порядка. В примерах § 5 гл. V мы рассмотрели уравнения цилиндров 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(VII)}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(VIII)}$$

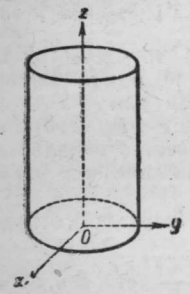
$$y^2=2px. \qquad \text{(IX)}$$



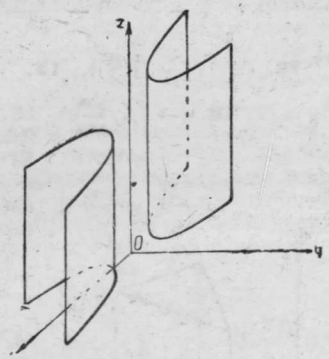
Черт. 114.

Направляющие линии этих цилиндров лежат в плоскости xOy и суть соответственно эллипс, гипербола и парабола. Образующие этих цилиндров параллельны оси Oz.

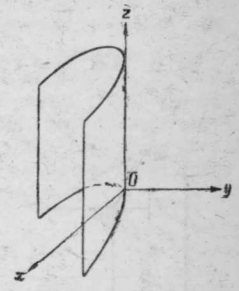
Цилиндры, изображаемые уравнениями (VII), (VIII), (IX), носят название *эллиптического* (черт. 115), *гиперболического*



Черт. 115.



Черт. 116.



Черт. 117.

(черт. 116) и *параболического* (черт. 117).

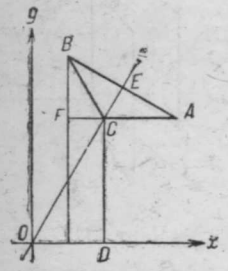
При $a=b$ эллиптический цилиндр становится поверхностью вращения с осью вращения Oz.

ОТВЕТЫ

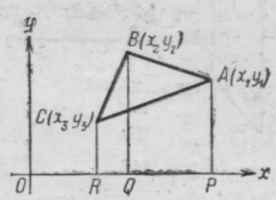
К стр. 25—27.

2. (5, 2). **3.** (—4, 2). **4.** $x=a$, $y=-b$. **5.** $x=-a$, $y=b$. **6.** $x=-a$, $y=-b$. **8.** (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2) или (0, 0), (0, 2), (—2, 2), (—2, 0), или (0, 0), (—2, 0), (—2, —2), (0, —2), или (0, 0), (0, —2), (2, —2), (2, 0). **9.** $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$. **10.** (3, 0), (0, 4), (—3, 0), (0, —4) или (4, 0), (0, 3), (—4, 0), (0, —3). **11.** $(a, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-a, 0)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

12. $AB=\sqrt{98}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **13.** $(9, 2(1+3\sqrt{3}))$. **15.** $10+2\sqrt{5}$. **16.** $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, 1. **17.** $x=-14$, $y=17$. **18.** (—3,4, 0). **19.** (15, 15), или (3, 3). **20.** (1, 10), или (—11, 10).



Черт. 118.



Черт. 119.

21*. Так как $\angle OCD=30°$, а $\angle ODC=90°$, то, как известно из элементарной геометрии, $OD=\frac{1}{2}OC$ (черт. 118), откуда $OC^2=\frac{OC^2}{4}+12$, т. е. $OC=4$ и $OD=2$. Следовательно, $AC=2$, а так как $\angle CAE=30°$, то $CE=1$ и $AE=\sqrt{3}$. Из равенства треугольников ACE и BCF имеем: $FC=1$ и $FB=\sqrt{3}$. Следовательно, координаты точки B суть $x=1$, $y=3\sqrt{3}$. **22.** (4, 5); (—2, —3). **23.** $(^8/_5, ^8/_5)$. **24.** (—3, —5), или (2, —7).

25. $\left(x=\frac{\pm a\pm\sqrt{b^2-h^2}}{2}, y=\frac{h}{2}\right)$. **26*.** Обозначая координаты середины стороны BC через a и b, получаем $a=-1$, $b=4$. Так как медианы треугольника пересекаются в точке, в которой каждая из них делится в отношении 2 : 1 (считая от вершины, из которой проводится медиана), то координаты (x, y) искомой точки по формулам (6) и (7) будут:

$$x=\frac{1+2\cdot(-1)}{2+1}=-\frac{1}{3},\quad y=\frac{2+2\cdot 4}{2+1}=\frac{10}{3}.$$

27. (3, —4); (4, —2); (3, —6); (2, —4). **28.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **30.** (1, —1).

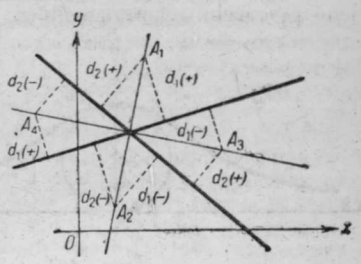
31. (—4, —3), (—4, —5), (2, —3), (2, 5). **32.** (9, —17), (—9, 17). **33.** $x'=y$, $y'=x$. **34.** Соответствующая координата изменит знак. **35.** (5, 2), (—5, —2). **36.** $^3/_2$ кв. ед. **37*.** (черт. 119). Пл. $\triangle ABC=$ пл. трап. $ABQP+$ $+$ пл. трап. $BCRQ$—пл. трап. $ACRP=\pm\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+$ $+y_3)-(x_1-x_3)(y_1+y_3)]=\pm\frac{1}{2}(x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_2y_2+x_2y_3-$ $-x_3y_2-x_2y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_3y_1+x_3y_3)$. Вынося за скобки во втором и десятом членах x_1, в седьмом и последнем $-x_3$, в третьем и шестом $-x_2$, в восьмом и одиннадцатом x_3, получаем: пл. $\triangle ABC=\pm^1/_2[x_1(y_2-y_3)-x_3(y_2-$ $-y_3)-x_2(y_1-y_3)+x_3(y_1-y_3)]=\pm^1/_2[(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)]$. **38.** Лежат. **39.** $P=13$, $\varphi=\operatorname{arctg}{}^{12}/_5$. **40.** $(AB)_x=x_2-x_1$, $(AB)_y=y_2-y_1$. **41*.** $R=15$. *Указание.* Составляющие равнодействующей по осям равны соответственно суммам составляющих по осям отдельных сил, приложенных к точке. **42*.** Всякая точка, лежащая на окружности, должна быть удалена от центра на расстояние, равное радиусу окружности. Поэтому для того, чтобы точка $M(x, y)$ лежала на окружности радиуса r с центром в начале координат, нужно, чтобы её расстояние от начала координат было равно r. Выражая это расстояние по известной формуле, получаем: $\sqrt{x^2+y^2}=r$, или $x^2+y^2=r^2$, т. е. координаты точки M должны быть связаны условием, выражающимся найденной формулой. **43.** а) $x=y$; b) $x=-y$. **44*.** $(x+1)^2+(y-2)^2=9$. См. решение упражнения 42*. В этом случае надо воспользоваться формулой расстояния не от начала координат, а от точки (—1, 2). Таким образом, условие, которому должны быть подчинены координаты точки M, выражается формулой несколько более сложной, чем в упражнении 42*. Это объясняется тем, что центр окружности не совпадает с началом координат. **45.** Окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

К стр. 48—51.

2. $x-\sqrt{3}y+14=0$. **3.** $x+\sqrt{3}y-10=0$. **5*.** 3; $(2^{11}/_{17}, -1^7/_{17})$. 7; $(-5^3/_5, -4^1/_5)$. *Указание.* Приведя уравнения данных прямых к нормальному виду, получаем: $^{15}/_{17}x-{}^8/_{17}y-3=0$ и $-{}^4/_5x-{}^3/_5y-7=0$, откуда видим, что искомые длины перпендикуляров равны соответственно 3 и 7. Так как $\cos\alpha=\frac{x}{p}$ и $\sin\alpha=\frac{y}{p}$, где x и y суть координаты основания перпендикуляра p, опущенного из начала координат на прямую, и α—угол, образуемый перпендикуляром с осью Ox, то искомые координаты будут найдены из формул: $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$. Следовательно, в нашем случае координаты оснований будут: $x=3\cdot{}^{15}/_{17}=2^{11}/_{17}$; $y=3\cdot(-{}^8/_{17})=-1^7/_{17}$; $x=7\cdot(-{}^4/_5)=-5^3/_5$; $y=7\cdot(-{}^3/_5)=-4^1/_5$. **7.** a) $y=x+5$; b) $y=\sqrt{3}x+5$; c) $y=-x+5$; d) $y=5$. **8.** $\sqrt{3}x-3y-9=0$; **9.** $y=x$; b) $y=-x$; c) $y=0$. **10.** $4x-3y-12=0$. **12.** 45°. **15.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$; $-\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{4}+$ $+\frac{y}{3}=-1$; $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$; или $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; $-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-1$; $\frac{x}{3}-$ $-\frac{y}{4}=1$. **16.** 20 кв. ед. **17.** $45^3/_8$ кв. ед. **18.** a) $a=-b$; b) $a=-\frac{b\sqrt{3}}{3}$;

c) $a=b$. **20.** $x-y+1=0$. **21.** $7x-2y-20=0$. **22.** $3x+y-5=0$; **23.** $^{45}/_{22}$; $^{24}/_{11}$. **24.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) 0; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{4}$. **25.** 90°. **26.** $9x+y-30=0$, $x-9y+24=0$. **27*.** 26°30′; 71°30′; 82°. *Указание.* При определении внутренних углов треугольника по угловым коэффициентам k_1, k_2, k_3 его сторон (не перпендикулярных Ox) следует выписать эти коэффициенты в порядке их алгебраического убывания: $k_1>k_2>k_3$ и тогда формулы $\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$, $\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}$, $\frac{k_3-k_1}{1+k_3k_1}$ определят именно внутренние (а не внешние) углы треугольника. В этом можно убедиться на основании замечания § 7, рассмотрев все возможные случаи расположения треугольника с одной из вершин в начале координат. **28.** 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$; 135°, arctg $^1/_2$, arctg $^1/_3$. **29.** (4, 1). **30.** a) $y=2x$; b) $y+3x=0$; c) $2y=x$ и $y=-2x$. **31.** a) $y=3$; b) $y=x+5$; c) $y=4x+11$; d) $(2-\sqrt{3})x-(1+2\sqrt{3})y+7+4\sqrt{3}=0$, или $(2+\sqrt{3})x-(1-2\sqrt{3})y+7-4\sqrt{3}=0$; e) $y+2x+1=0$. **32.** $5x+25y+1=0$; $x+5y-5=0$. **33.** $5x-4y-16=0$. **34.** $x+3y-1=0$. **35.** $53x+202y=0$. **36.** $x+y-6=0$; $x-y=0$. **37.** $4x-3y-17=0$. **38.** $3x-2y-7=0$. **39.** $x+y=0$. **40.** $5y-9=0$; $9x-18y-8=0$; $9x-3y-35=0$. **41.** $x-7y+10=0$; $x+3=0$; $x-y+4=0$; (−3, 1); **42.** $y+2x-2=0$; $x+2y=2$; $y=x$. **43.** $x-y+3=0$; $x+2y-4=0$; $7x-y+7=0$; $(-^2/_3, ^7/_3)$. **44*.** Из уравнений сторон треугольника находим координаты его вершин A (3, 1), B (0, 4), C (−1, 0). Определяем далее, середину стороны AB; координаты этой точки равны $(^3/_2, ^5/_2)$. Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от вершины), то для нахождения точки пересечения медиан пользуемся формулой деления отрезка в данном отношении; таким образом, найдём точку пересечения медиан $(^2/_3, ^5/_3)$. Теперь остаётся провести прямую через (0, 0) и $(^2/_3, ^5/_3)$, для чего следует применить уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Следовательно, окончательно имеем: $\frac{y}{^5/_3}=\frac{x}{^2/_3}$, или $5x-2y=0$; **45.** $3x-4y=0$. **46*.** (2, 0). *Указание.* Искомая точка является точкой пересечения с данной прямой перпендикуляра, восставленного к отрезку, соединяющему данные точки, в его середине. **47.** (1,1). **48.** $(^{11}/_6; ^1/_6)$. **49.** $x+y-11=0$; $3x-y-16=0$. **50.** $(2\pm2\sqrt{3}, 3)$. **51.** $\frac{37\sqrt{2}}{10}$. **52.** 5,2. **53*.** $3x-4y-25=0$ и $3x-4y+5=0$. *Указание.* Прежде всего очевидно, что задача имеет два ответа, так как прямую, параллельную данной прямой и отстоящую от неё на расстоянии 3 единиц масштаба, можно провести как по одну, так и по другую сторону от данной прямой, т. е. на расстояниях +3 и −3. Все точки искомой прямой отстоят от данной прямой на одном и том же расстоянии. Следовательно, если мы возьмём координаты (x, y) произвольной точки искомой прямой и подставим их в формулу расстояния данной точки от данной прямой, то эта формула обратится уже в уравнение искомой прямой. Таким образом, мы и получаем два уравнения: $\frac{3x-4y-10}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm3$, где x и y являются уже текущими координатами точки не данной, а искомой прямой. Простые преобразования приводят нас к ответу, данному выше. **54.** $3x-4y-47=0$ и $3x-4y+33=0$. **55*.** $|d|=7$. *Указание.* Для определения искомого расстояния следует на одной из прямых выбрать

фиксированную точку и определить расстояние от этой точки до другой прямой. В данной задаче удобно, например, из уравнения первой прямой, положив $y=0$, определить точку (5, 0). Тогда расстояние от этой точки до второй прямой выразится числом $\frac{3\cdot5+4\cdot0+20}{-\sqrt{3^2+4^2}}=-7$. **56.** $|d|=3$. **57** 0,3 $\sqrt{5}$. **58*.** $3x-4y-7=0$; $5x+12y-49=0$. *Указание.* Уравнение искомой прямой (касательной) берём в форме уравнения прямой, проходящей через данную точку (5, 2) по направлению k: $y-2=k(x-5)$. Таким образом, задача сводится к нахождению углового коэффициента k. Так как искомая прямая должна касаться круга радиуса 4 с центром в точке (−3, 1), то задача проведения касательной из данной точки равносильна задаче проведения через данную точку (5, 2) прямой, проходящей на расстоянии 4 единиц от точки (−3, 1). Поэтому для определения коэффициента k можно воспользоваться формулой расстояния данной точки от прямой. Для этого надо уравнение прямой привести к нормальному виду и вместо текущих координат подставить координаты (−3, 1).



Черт. 120.

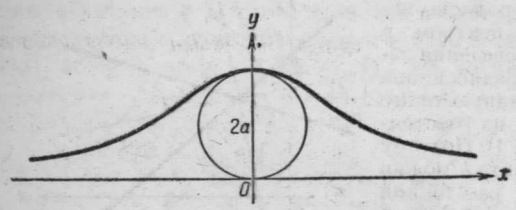
Таким образом будем иметь: $\frac{1-8k}{\sqrt{k^2+1}}=\pm4$, откуда и найдём значения углового коэффициента: $k_1=^3/_4$; $k_2=-^5/_{12}$. Подставляя эти значения в уравнение искомой прямой, мы найдём уравнения двух касательных: $3x-4y-7=0$, $5x+12y-49=0$. **59.** $7x-6y-19=0$ и $9x+2y-5=0$. **60*.** $3x-3y+19=0$; $3x+3y-5=0$. *Указание.* Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Следовательно, расстояния d_1 и d_2 любой точки биссектрисы до сторон угла будут равны по абсолютной величине. Для всех точек биссектрисы угла, в котором лежит точка A_1 (черт. 120), эти расстояния равны и по величине, и по знаку, т. е. координаты точек биссектрисы A_1A_2 удовлетворяют уравнению $d_1-d_2=0$. Для биссектрисы же смежных углов уравнение будет иметь вид $d_1+d_2=0$, так как расстояния d_1 и d_2 будут равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Следовательно, в нашем случае для искомых биссектрис получим уравнения: $\frac{3x+4y-9}{5}-\frac{12x+9y-8}{15}=0$ и $\frac{3x+4y-9}{5}+\frac{12x+9y-8}{15}=0$, или $3x-3y+19=0$ и $3x+3y-5=0$. Угловые коэффициенты найденных прямых суть 1 и −1, т. е. удовлетворяют условию перпендикулярности. **61.** $3x-y-3=0$; $x+3y-11=0$. **62.** $x+y=0$.

К стр. 67—70

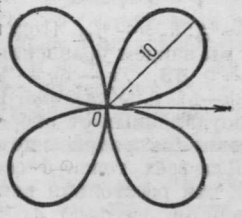
1*. Из уравнения кривой непосредственно видно, что кривая симметрична относительно оси Oy: перемена знака при x не изменяет значения y, так как x содержится в уравнении во второй степени. Так как значение

$y=0$ не удовлетворяет уравнению кривой, то кривая не пересекает оси Ox.

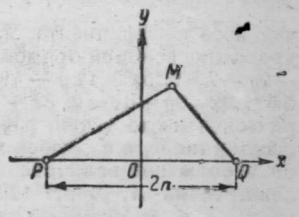
Решим теперь уравнение кривой относительно y: $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$. Считая постоянное $a>0$, замечаем, что при всех значениях x ордината $y>0$; это означает, что кривая целиком расположена в верхней полуплоскости. Из этого же выражения видно также, что с возрастанием абсолютной величины x ордината y уменьшается. При $x=0$ ордината $y=2a$. Произведя такое исследование уравнения кривой и построив некоторое количество точек кривой, координаты которых определим непосредственным вычислением одной из текущих координат по данным произвольным значениям другой, убедимся, что кривая имеет такой вид, как изображено на чертеже 121. При построении кривой следует постоянному a дать некоторое произвольное значение. **2***. Радиус-вектор r достигает наибольшего значения, когда $\sin 2\varphi$ имеет наибольшее значение, что наступает, когда $\sin 2\varphi=1$ или когда $\varphi=45°$, 225° и т. д.; тогда $r=10$. Радиус-вектор r принимает наименьшее значение, когда $\sin 2\varphi$ получает наименьшее значение, что имеет место, когда $\sin 2\varphi=-1$ или когда $\varphi=135°$ и 315° и т. д. Это наименьшее значение r есть -10. Когда $\varphi=0°$, 90°, 180° и т. д., тогда $r=0$. Теперь следует построить ряд точек кривой, координаты которых можно определить непосредственным нахождением одной из них по данным произвольным значениям другой. Кривая состоит из четырёх петель, как показывает прилагаемый черт. 122, и по этой причине и называется четырёхлепестковой розой. **10.** a) ось Ox и парабола; b) пара параллельных прямых; c) начало координат; d) мнимое место точек. **11.** $5x-3y+17=0$.



Черт. 121.



Черт. 122.



Черт. 123.

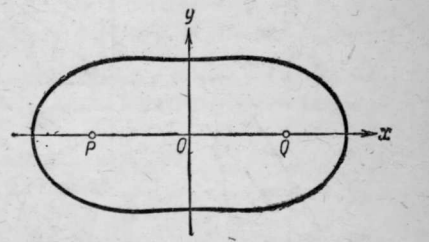
12. $y=\frac{x^2}{8}+2$. **13.** Окружность $x^2+y^2=6x$. **14.** Эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

15. Окружность $(x-3)^2+y^2=9$. **16.** Окружность $(x-2a)^2+y^2=4a^2$.

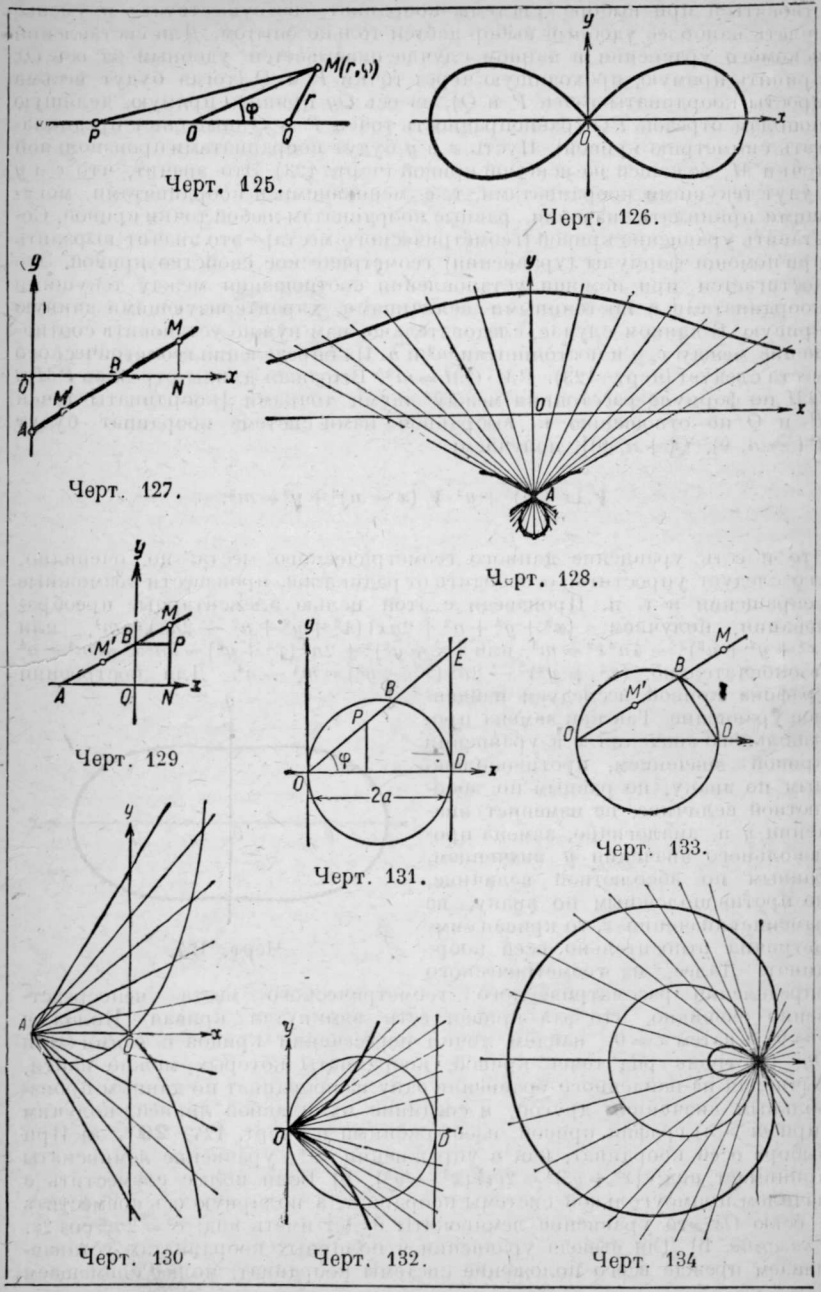
17. Правая ветвь гиперболы $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. **18.** $p=r\cos(\alpha-\varphi)$, где p есть длина перпендикуляра, опущенного на прямую из полюса, а α — угол, составляемый им с полярной осью. **19***. Обозначим расстояние между точками P и Q через $2n$. Прежде чем составлять уравнение кривой, нужно выбрать систему координат. От выбора системы координат зависит бо́льшая или меньшая сложность искомого уравнения. Так, ранее мы видели, что если начало координат поместить в центре окружности, то уравнение её будет иметь более простой вид, чем при другом выборе системы координат. Правил, которыми можно было бы руководствоваться при выборе системы координат, не существует, и уменье делать наиболее удобный выбор даётся только опытом. Для составления искомого уравнения в данном случае оказывается удобным за ось Ox принять прямую, проходящую через точки P и Q (тогда будут весьма просты координаты точек P и Q), за ось Oy принять прямую, делящую пополам отрезок PQ (равноправность точек P и Q позволяет предполагать симметрию кривой). Пусть x и y будут координатами произвольной точки M, лежащей на искомой кривой (черт. 123). Это значит, что x и y будут текущими координатами, т. е. меняющимися координатами, могущими принимать значения, равные координатам любой точки кривой. Составить уравнение кривой (геометрического места)—это значит выразить при помощи формулы (уравнения) геометрическое свойство кривой. Это достигается при помощи установления соотношения между текущими координатами и постоянными величинами, характеризующими данную кривую. В данном случае, следовательно, нам нужно установить соотношение между x, y и постоянными m^2 и n. Из определения геометрического места следует (черт. 123): $PM\cdot QM=m^2$. Выражая длины отрезков PM и QM по формуле расстояния между двумя точками [координаты точек P и Q по отношению к выбранной нами системе координат будут $P(-n, 0)$, $Q(+n, 0)$], получаем:

$$\sqrt{(x+n)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-n)^2+y^2}=m^2.$$

Это и есть уравнение данного геометрического места; но, очевидно, его следует упростить: освободить от радикалов, произвести возможные сокращения и т. п. Произведя с этой целью элементарные преобразования, получаем: $(x^2+y^2+n^2+2nx)(x^2+y^2+n^2-2nx)=m^4$, или $(x^2+y^2+n^2)^2-4n^2x^2=m^4$, или $(x^2+y^2)^2+2n^2(x^2+y^2)-4n^2x^2=m^4-n^4$ и окончательно: $(x^2+y^2)^2-2n^2(x^2-y^2)=m^4-n^4$. Для построения графика кривой исследуем найденное уравнение. Так как замена произвольного значения x в уравнении кривой значением, противоположным по знаку, но равным по абсолютной величине, не изменяет значения y и, аналогично, замена произвольного значения y значением, равным по абсолютной величине, но противоположным по знаку, не изменяет значения x, то кривая симметрична относительно осей координат. Далее, из геометрического определения рассматриваемого геометрического места непосредственно очевидно, что эта кривая есть замкнутая кривая. Положив $y=0$, а затем $x=0$, найдём точки пересечения кривой с осями Ox и Oy. Построив ряд точек кривой, координаты которых можно найти, вычисляя из найденного уравнения одну из координат по данным произвольным значениям другой, и соединив их плавной линией, получим (при $m>n$) график кривой, изображённый на черт. 124. **20***. a) При выборе осей координат, как в упражнении 19*, уравнение лемнискаты принимает вид: $(x^2+y^2)^2=2m^2(x^2-y^2)$. b) Если полюс совместить с началом прямоугольной системы координат, а полярную ось совместить с осью Ox, то уравнение лемнискаты будет иметь вид: $r^2=2m^2\cos 2\varphi$. *Указание.* b) Для вывода уравнения в полярных координатах устанавливаем прежде всего положение системы координат: полюс совмещаем



Черт. 124.



с началом координат выбранной нами прямоугольной системы, а полярную ось совмещаем с осью Ox. Тогда будем иметь (черт. 125): $PM \cdot QM = m^2$. Выражая отрезки PM и QM по известной формуле тригонометрии, приходим к уравнению

$$\sqrt{r^2+m^2+2mr\cos\varphi}\cdot\sqrt{r^2+m^2-2mr\cos\varphi}=m^2.$$

Производя элементарные преобразования, получаем: $(r^2+m^2)^2-4m^2r^2\cos^2\varphi=m^4$; $r^4=4m^2r^2\cos^2\varphi-2m^2r^2$, или $r^4=2m^2r^2(2\cos^2\varphi-1)$, и окончательно: $r^2=2m^2\cos 2\varphi$. График этой кривой изображён на черт. 126. **21***. $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$. *Указание.* Из подобия треугольников BMN и BAO (черт. 127) имеем: $\frac{y}{BN}=\frac{a}{OB}$. Так как $OB=x-BN$ и $BN=\sqrt{b^2-y^2}$, то приходим к уравнению: $\frac{y}{\sqrt{b^2-y^2}}=\frac{a}{x-\sqrt{b^2-y^2}}$, или $xy=(a+y)\sqrt{b^2-y^2}$, и окончательно: $x^2y^2=(a+y)^2(b^2-y^2)$. Способ построения кривой ясен из прилагаемого черт. 128. В данном случае график получается весьма просто из самого геометрического определения кривой. На чертеже изображён вид кривой для случая $a<b$. Графики для случаев $a>b$ и $a=b$ вычертите самостоятельно. Весьма полезно убедиться в справедливости полученных графиков путём исследования уравнения конхоиды. **22***. $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$. Из черт. 129 имеем: $\frac{y}{AN}=\frac{OB}{AO}$, $AN=a+x$, $AO=a$, $OB^2=BM^2=x^2+(y-OB)^2$, откуда $OB=\frac{x^2+y^2}{2y}$.

Подставляя найденные значения в составленную выше пропорцию, после элементарных преобразований приходим к уравнению $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$. График строфоиды дан на черт. 130, из которого виден и способ построения кривой. **23***. $x^3=y^2(2a-x)$. *Указание.* Из черт. 131 имеем: $OP=\sqrt{x^2+y^2}$, $ED^2=OE\cdot BE$, откуда $BE=\frac{ED^2}{OE}$; $ED=2a\cdot\operatorname{tg}\varphi=2a\cdot\frac{y}{x}$, $OE=\frac{2a}{\cos\varphi}=\frac{2a\sqrt{x^2+y^2}}{x}$. Так как $OP=BE$, то $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4a^2y^2\cdot x}{x^2\cdot 2a\sqrt{x^2+y^2}}$, и окончательно: $x^3=y^2(2a-x)$. График кривой изображён на черт. 132. Из этого чертежа ясен и способ построения кривой. **24***. $r=m+2a\cos\varphi$. *Указание.* Примем точку O за полюс, а полярную ось совместим с диаметром OD. Из прямоугольного треугольника OBD (черт. 133) имеем: $r=OM=BM+OB=m+2a\cos\varphi$. Следовательно, искомое уравнение есть: $r=m+2a\cos\varphi$. График кривой дан на черт. 134, из которого ясен и способ вычерчивания этой кривой. На чертеже изображён случай $m<2a$. Графики для случаев $m=2a$ и $m>2a$ построить самостоятельно. **27***. $4dx+R^2-r^2=0$, если за ось Ox принять линию центров, а ось Oy провести через середину линии центров. **28.** Если за полюс принять вершину прямого угла, а за полярную ось одну из его сторон, то уравнение геометрического места будет иметь вид $r=a\sin 2\varphi$ (см. упражнение 2). **30.** Если за ось Ox принять основание AB треугольника, а за ось Oy соответствующую высоту и обозначить абсциссы

точек A, B через a, b и ординату точки C через c, то уравнение геометрического места будет: $y=c$ и $\frac{x}{\frac{1}{2}(a+b)}+\frac{y}{c}=1$. (Проверить результат геометрически). **31.** Прямая, перпендикулярная к прямой, соединяющей заданные точки. **32.** Окружность. **33.** Прямая. **34.** $x^2-y^2=a^2$, если координаты заданных точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$.

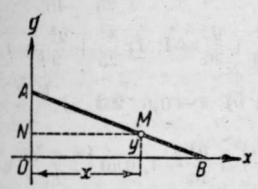
К стр. 89—95

1. a) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$; b) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$; c) $(x-5)^2+(y-6)^2=13$. **2*.** $(x-3)^2+(y+5)^2=100$. *Указание.* Уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ должно удовлетворять координатам данных точек. Подставляя последовательно вместо текущих координат координаты этих точек, получим три уравнения относительно неизвестных величин a, b и r^2; решив эту систему, найдём искомое уравнение. **3*.** $B=0$, $C=A$, $D=-6A$, $E=-4A$, $F=-12A$. *Указание.* Уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке (3, 2) может быть написано в виде $(x-3)^2+(y-2)^2=25$, или, раскрывая скобки и перенося все члены в левую часть уравнения: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$. Так как уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ должно выражать эту же окружность, то коэффициенты этого уравнения должны быть пропорциональны коэффициентам написанного выше уравнения. **4*.** a) $(2, -1)$, $r=2$; b) $(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$, $r=\frac{5\sqrt{2}}{4}$; c) $(3, 0)$, $r=4$. *Указание.* a) Приведя данное уравнение к виду $(x-2)^2+(y+1)^2=4$, заключаем, что координаты центра суть $(2, -1)$ и радиус равен 2. b) Предварительно разделить уравнение на 2, а затем поступить подобно тому, как это сделано в п. «a». **5.** $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$. **6.** $x^2+y^2-6x=0$. **7.** $x^2+y^2+8y=0$. **8.** $(x+5)^2+(y-3)^2=9$ и $(x+5)^2+(y+3)^2=9$. **9*.** $(x-4)^2+(y-7)^2=9$. *Указание.* Длина радиуса равна расстоянию от центра окружности до данной прямой. **10*.** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$. *Указание.* Возьмём искомое уравнение касательной в форме: $y-y_0=k(x-x_0)$. Для того чтобы определить угловой коэффициент k касательной, дифференцируем уравнение окружности: $2(x-a)\,dx+2(y-b)\,dy=0$, откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$, следовательно: $k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=-\frac{x_0-a}{y_0-b}$. Подставляя найденное значение коэффициента k в уравнение касательной, приведя всё уравнение к общему знаменателю и прибавляя к левой части сумму $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$, а к правой — равную этой сумме величину r^2 [точка (x_0, y_0) лежит на окружности, а потому координаты её удовлетворяют уравнению окружности], после элементарных преобразований получим уравнение касательной: $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$. **11.** $x_0x+y_0y=r^2$. **12.** $4x+3y-30=0$. **13*.** $x-3y-10=0$ и $3x-y+10=0$. *Указание.* Уравнение касательной возьмём в форме $x_0x+y_0y=10$, где (x_0, y_0) суть координаты точки касания. Значения этих координат найдём из двух условий: 1) координаты (x_0, y_0) должны удовлетворять уравнению окружности (точка касания лежит на окружности) и 2) точка $(-5, -5)$ лежит на касательной, а потому её координаты должны удовлетворять уравнению касательной. Таким образом, получаем систему двух уравнений относительно x_0, y_0: $x_0^2+y_0^2=10$, $5x_0+5y_0=-10$. Решив эту систему, найдём две пары значений: $x_0=1$, $y_0=-3$ и $x_0=-3$, $y_0=1$. Подставляя эти значения в уравнение касательной

получим касательные: $x-3y-10=0$ и $3x-y+10=0$. **14.** $x+2y+5=0$ и $2x-11y+25=0$. **15*.** $2x+3y\pm13=0$. *Указание.* Координаты точки касания найдутся из двух условий: 1) эта точка лежит на окружности и 2) угловые коэффициенты касательной и данной прямой равны. **16*.** $d=6$. *Указание.* Длина (d) касательной есть катет прямоугольного треугольника, вершины которого лежат: 1) в центре окружности, 2) в данной точке M и 3) в точке касания. Поэтому величина d^2 определится как разность между квадратом гипотенузы (расстояние между центром окружности и данной точкой M) и квадратом радиуса окружности. Таким образом, будем иметь: $d^2=[(7-2)^2+(8-3)^2]-14$, откуда $d=6$. **17.** $d=9$. **18.** a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$; d) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; e) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; f) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; g) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **19.** $2a=10$; $2b=8$; $F_1(3, 0)$; $F_2(-3, 0)$; $\varepsilon=0{,}6$. **20.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; d) 0,8. **21.** $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. **22.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, или $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{(25/4)^2}=1$ в зависимости от того, лежит ли на оси Ox большая или малая ось эллипса. **23.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$. **24.** $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y-5)^2}{320/11}=1$. **25.** Ни одной; две; одну. **26.** $x-3y+12=0$. **27.** $(5, -4)$. **28*.** $x+y-3=0$ и $x-5y-9=0$. *Указание.* Обозначим координаты точки касания через x_1, y_1. Тогда уравнение касательной будет иметь вид: $\frac{xx_1}{6}+\frac{yy_1}{3}=1$. Таким образом, задача сводится к нахождению координат точки касания. Так как касательная проходит через точку $(4, -1)$, то координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравнению $\frac{4x_1}{6}-\frac{y_1}{3}=1$. С другой стороны, координаты x_1, y_1 должны удовлетворять уравнению эллипса: $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$. Решая полученную систему уравнений относительно x_1, y_1, находим координаты точек касания $(2, 1)$ и $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$. Подставляя найденные значения координат x_1, y_1 в уравнение касательной, получаем касательные $x+y-3=0$ и $x-5y-9=0$. **29.** $9x+5y-39=0$ и $x-y+5=0$. **30*.** $3x-y\pm7=0$. *Указание.* Координаты точки касания можно определить из условий: 1) они должны удовлетворять уравнению эллипса и 2) угловые коэффициенты искомых касательных должны быть равны угловому коэффициенту данной прямой. **31.** $x+y\pm3=0$. **32.** $x=\pm12$. **33.** $\frac{x^2}{60}+\frac{y^2}{24}=1$, или $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$. **34.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. **35.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **36.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$. **37.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **38*.** $5x+6y-11=0$. *Указание.* Если обозначим через k угловой коэффициент искомой хорды, а через k' — угловой коэффициент диаметра, сопряжённого хордам, имеющим направление k, то, как известно (стр. 78), угловые коэффициенты k и k' будут связаны соотношением $k=-\frac{5}{6k'}$. Так как всякий диаметр проходит через начало координат, то уравнение диаметра, имеющего на-

правление k', можно представить в виде $y=k'x$. Вследствие того, что диаметр должен проходить через точку (1, 1) (он сопряжён хордам, имеющим направление k, и, следовательно, должен проходить через середину искомой хорды), координаты (1, 1) должны удовлетворять уравнению $y=k'x$, откуда получаем: $k'=1$ и $k'=-5/6$. Следовательно, уравнение искомой хорды будет: $y-1=-5/6\,(x-1)$, или $5x+6y-11=0$.

39. $5x-4y-14=0$. **40.** $\frac{48\sqrt{2}}{5}$. **41*.** Концы диаметра симметричны относительно начала координат, т. е. координаты концов одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Поэтому, если координаты одного из концов диаметра обозначим через x_1, y_1, то координаты другого конца будут $-x_1$, $-y_1$. Следовательно, уравнения касательных, проведённых в концах диаметра, будут иметь вид $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ и $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=-1$, откуда видим, что угловые коэффициенты этих прямых равны.



Черт. 135.

42. $y=\pm 3x$. **43.** 60°. **44.** $k=1/2$; $k'=-1$; $4\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

45. $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$. **46*.** $y=\pm\frac{b}{a}x$. *Указание.* Пусть $y=kx$ и $y=k'x$ будут уравнения искомых диаметров. Диаметр $y=k'x$, равный диаметру $y=kx$, очевидно, симметричен с ним относительно осей. Следовательно, $k'=-k$. Поэтому $kk'=-k^2=-\frac{b^2}{a^2}$, откуда $k=+\frac{b}{a}$ и $k'=-\frac{b}{a}$.

47. $y=\pm 3x$. **48.** $\frac{\pi}{3}$. **49*.** Эллипс. *Указание.* Стороны прямого угла принимаем за оси координат. Полагаем $AM=a$ и $BM=b$. Из черт. 135 мы имеем: $\frac{x}{a}=\sin MAN$, $\frac{y}{b}=\cos MAN$, откуда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, т. е. точка M описывает эллипс. Если точка M совпадает с серединой отрезка AB, то $a=b$, и мы имеем окружность: $x^2+y^2=a^2$. **50.** $\rho=\frac{4}{3-\sqrt{5}\cos\varphi}$.

51. a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$; c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; d) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$; e) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$; f) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$. **52.** $2a=24$; $2b=10$; $F_1(13,\ 0)$; $F_2(-13,\ 0)$; $\varepsilon=13/12$.

53. $\varepsilon\cos\frac{a}{2}=1$. **54.** $y=\pm 4/3x$. **55.** $r_1=6$; $r_2=14$. **56.** $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

57. $x-y-2=0$; $x-y+2=0$. **58.** $x-y-1=0$; $9x+5y-23=0$.

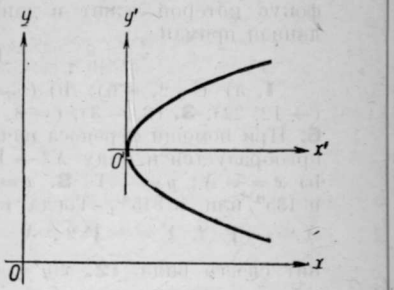
59. $3x-2y\pm 4=0$. **62.** b. **63.** $a=\frac{p}{\varepsilon^2-1}$, $b=\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. **64.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$.

65. $2x-y\pm 1=0$. **66.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$. **67.** $\varepsilon=\sqrt{3}$. **68.** $2x-y=0$ и $x-3y=0$.

69*. $5y\pm 2x=0$. *Указание.* Координаты точек пересечения диаметра с гиперболой найдутся из двух условий: 1) эти точки лежат на гиперболе и 2) расстояния этих точек от центра гиперболы равны $\sqrt{29}$.

70. $y=\pm\frac{5}{3}x$. **71.** a) $x^2-y^2=8$; b) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. **72*.** a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Действительная ось делит угол между асимптотами пополам. **73*.** Обозначая через (x, y) координаты произвольной точки гиперболы и через d_1 и d_2 расстояния этой точки до асимптот, будем иметь: $d_1=\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $d_2=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $d_1d_2=\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{c^2}$.

74. $mx+x_0y=2mx_0$. **75.** a) $y^2=16x$; b) $y^2=8x$; c) $y^2=-8x$; d) $x^2=12y$; e) $x^2=8y$; f) $x^2=-8y$; g) $y^2=6x-9$; h) $x^2=6y-9$. **76*.** a) $(y-b)^2=2p(x-a)$; b) $(y-b)^2=-2p(x-a)$; c) $(x-a)^2=2p(y-b)$; d) $(x-a)^2=-2p(y-b)$. *Указание.* a) Перенесём предварительно начало координат в точку (a, b), не меняя направления осей (черт. 136). Тогда по отношению к новой системе координат $x'O'y'$ парабола будет расположена так, что её ось симметрии совпадает с осью абсцисс и вершина будет лежать в начале координат; следовательно, уравнение её будет иметь вид $y'^2=2px'$. Переходя теперь к прежней системе координат (формулы перехода: $x'=x-a$, $y'=y-b$), получаем уравнение параболы относительно системы координат xOy: $(y-b)^2=2p(x-a)$. b) Так как в этом случае абсцисса фокуса относительно новой системы координат $(x'O'y')$ отрицательна, то уравнение параболы (относительно новой системы) принимает вид $y'^2=-2px'$. Переходя опять к прежней системе, получаем уравнение $(y-b)^2=-2p(x-a)$.



Черт. 136.

77*. a) Координаты вершины $\left(-\frac{B}{2A};\ \frac{4AC-B^2}{4A}\right)$; $p=\frac{1}{2A}$; ось симметрии параллельна оси Oy. b) Координаты вершины $\left(\frac{4MP-N^2}{4M};\ -\frac{N}{2M}\right)$; $p=\frac{1}{2M}$; ось симметрии параллельна оси Ox. *Указание.* a) Перенесём свободный член C в левую часть, разделим всё уравнение на A и дополним правую часть до полного квадрата: $\frac{y}{A}-\frac{C}{A}+\frac{B^2}{4A^2}=x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}$; таким образом, получаем уравнение в форме $\frac{1}{A}\left(y-\frac{4AC-B^2}{4A}\right)=\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$. Мы видим, что данная кривая есть действительно парабола, вершина которой лежит в точке $\left(-\frac{B}{2A},\ \frac{4AC-B^2}{4A}\right)$, параметр её равен $\frac{1}{2A}$ и ось симметрии параллельна оси Oy. b) Поступая, как и в предыдущем случае, получаем уравнение: $\frac{1}{M}\left(x-\frac{4MP-N^2}{4M}\right)=\left(y+\frac{N}{2M}\right)^2$. **78.** a) Координаты вершины $(1, 6)$; $p=\frac{1}{4}$; ось симметрии параллельна оси Oy. b) Координаты

вершины (5, 25); $p = -\frac{1}{2}$; ось симметрии параллельна оси Oy. c) Координаты вершины (— 6, — 3); $p = \frac{1}{2}$; ось симметрии параллельна оси Ox. **79.** $2p$. **80*.** $3x - y - 11 = 0$. *Указание.* Уравнение хорды напишем в виде: $y - 1 = k(x - 4)$. Уравнение диаметра, сопряжённого хордам, имеющим направление k, есть (стр. 84): $y = \frac{3}{k}$. Так как этот диаметр должен пройти через точку (4, 1), то будем иметь: $1 = \frac{3}{k}$, откуда определяем $k = 3$. Таким образом, получаем искомое уравнение хорды: $y - 1 = 3(x - 4)$, или $3x - y - 11 = 0$. **81.** $4x - y - 5 = 0$. **82.** $y = \pm 4$. **83.** $2x - 2y + 5 = 0$ и $8x + 4y + 5 = 0$. **84.** $(9, 6\sqrt{3})$. **85.** $x + y + 1 = 0$ и $x + 3y + 9 = 0$. **86.** a) $2x - y + 2 = 0$; b) $x + y + 4 = 0$. **87.** Парабола, фокус которой лежит в данной точке и директрисой которой служит данная прямая.

К стр. 112—114

1. a) $(-2, -6)$; b) $(-2, 4)$; c) $(6, -6)$; d) $(6, 4)$. **2.** $(12, -22)$; $(-12, 22)$. **3.** $(3, -3)$; $(-3, 3)$ **4.** $(-7, 5)$. **5.** $4X^2 - 5XY + Y^2 + 11 = 0$. **6.** При помощи переноса начала (сохраняя направления осей) уравнение преобразуется к виду $X^2 - Y^2 = {}^3/_4$ (гипербола). **7.** a) $x = X$; $y = -Y$; b) $x = -X$; $y = -Y$. **8.** $x = Y$; $y = X$. **9.** $X = +2$, $Y = 0$. **10.** На угол в 135° или в 315°. Тогда координаты точки M будут соответственно: $X = -\sqrt{2}$, $Y = -\sqrt{2}$; $X = +\sqrt{2}$, $Y = +\sqrt{2}$. **11.** Уравнение не изменит своего вида. **12.** $x'y' = -\frac{a^2}{2}$. **13.** $X^2 - Y^2 = 2$. **14.** Повернуть систему координат на угол в 45°; тогда уравнение примет вид $X^2 + 3Y^2 = 2$ (эллипс). **15.** Не изменяя направлений осей, сделать перенос начала (система XOY) и затем сделать поворот системы координат $XO'Y$ (система $X'O''Y'$). Уравнение преобразуется к виду $9X'^2 + 3Y'^2 = 68$ (эллипс). **16.** $Y = 4X^2$. Вершина O' (1, 1). Новые оси координат имеют направления старых осей. **17.** $Y = -3X^2$. Вершина $O'\left(\frac{5}{6}, \frac{25}{12}\right)$. Новые оси координат имеют направления старых осей. **18.** $XY = -5$. Центр $(-4, 2)$. Новые оси координат имеют направления старых осей. **19.** a) $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$, новое начало $O'(3, -1)$; b) $X^2 - Y^2 = 1$, новое начало $O'(-3, 2)$; c) $Y^2 = 4X$, новое начало $O'(-4, 4)$; d) $X^2 = 2Y$, новое начало $O'(-3, -2)$. *Указание.* Выделить сначала в каждом уравнении полные квадраты. **20.** a) $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$; b) $Y^2 = 2X^2$ (пара прямых); c) $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{4} = 1$. **21.** $X = +\frac{14}{5}$, $Y = -\frac{2}{5}$, если в формулах (11) и (12) (стр. 107) перед радикалами взять знаки минус. **22.** $(3, -2)$, если в формуле (11) перед радикалом взять знак +, а в формуле (12) (стр. 107) знак —. **23.** $A(1, 1)$; $B(2, 2\sqrt{3})$, $C(-4, 4)$, $D(\sqrt{3}, -1)$. **24.** $A\left(r = \sqrt{13}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$, $B\left(r = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{3\pi}{4}\right)$, $C(r = 3, \varphi = 0)$, $D\left(r = 4, \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$. **25.** $r = \frac{2a}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **26.** a) $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = m^2(x^2 + y^2)$, b) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **27.** Второго.

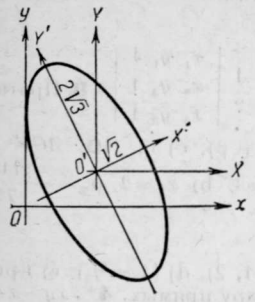
К стр. 140—141

1. —4; 8; —48; ab; $-2(x^3 + y^3)$; $(x - y)(y - z)(z - x)$. **2.** a) $x = 1$; $y = 0$; $z = 1$. b) $x = a$; $y = 1$; $z = -1$. c) $x = 7k$, $y = -2k$; $z = -5k$, где k произвольно. d) $x = y = z = 0$. e) $x = {}^1/_5(9 - 7z)$, $y = {}^1/_5(1 + 2z)$, z произвольно. f) Система несовместна. **3.** 4 кв. ед. **4.** Да, лежат. **5.** $x + 4y - 11 = 0$. **6.** $h_c = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$. **7.** $\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. **8.** Против часовой стрелки. **9.** a) $\cos(\alpha + \beta)$; b) $\sin(\alpha + \beta)$; c) 0. **10.** $ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2$. **11.** a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{11}{7}$; c) $x = 2$.

К стр. 171—173

1. (1, 1). **2.** a) (2, —1); b) $({}^3/_{28}, -{}^{13}/_{28})$; c) (—1, 2); d) $(1, -{}^3/_2)$; e) кривая центра не имеет; f) кривая распадается на пару прямых. **4*.** $xy - x - 4 = 0$. *Указание.* Если перенесём начало координат в центр искомой кривой, то уравнение её не будет иметь членов, содержащих первые степени текущих координат. Следовательно, уравнение её может быть написано в виде: $AX^2 + 2BXY + CY^2 + F' = 0$, где X и Y суть текущие координаты относительно новой системы координат, а F' — свободный член, получающийся, как известно, подстановкой в первоначальное уравнение, координат центра вместо текущих координат. Написанному уравнению должны удовлетворять координаты точек, через которые проходит кривая, но координаты этих точек должны быть уже выражены относительно новой системы координат. Пользуясь формулами переноса начала, находим координаты точек относительно новой системы: (2, 2), (4, 1), (—1, —4). Подставляя эти координаты вместо текущих координат, получаем систему уравнений относительно коэффициентов A, B, C, F': $4A + 8B + 4C + F' = 0$, $16A + 8B + C + F' = 0$, $A + 8B + 16C + F' = 0$. Деля каждое уравнение на F', находим: $\frac{A}{F'} = 0$, $\frac{B}{F'} = -{}^1/_8$, $\frac{C}{F'} = 0$ и получаем, таким образом, уравнение: $XY - 4 = 0$. Переходя теперь к старой системе координат, находим искомое уравнение $xy - x - 4 = 0$. **5.** $x^2 - xy + 2x - 2 = 0$. **6.** a) $4x^2 - 4y^2 - 3 = 0$. b) $2x^2 - 3y^2 - 2 = 0$; c) $4x^2 - 16y^2 - 11 = 0$. **7.** a) $3x^2 + y^2 = 2$; b) $6x^2 + y^2 = 12$; c) $6x^2 - 4y^2 = 7$. **8*.** a) $6x^2 + y^2 = 12$; b) $y^2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}x$; c) $(x - {}^1/_2)^2 + (y - {}^3/_2)^2 = 9$. *Указание.* a) Так как в данном случае $AC - B^2 = 5 \cdot 2 - 4 = 6 \neq 0$, то данная кривая имеет определённый центр. Для нахождения координат центра дифференцируем сперва уравнение кривой по x, затем по y и приравниваем нулю получающиеся при этом выражения: $10x + 4y - 24 = 0$, $4x + 4y - 12 = 0$. Решая эту систему уравнений, находим координаты центра: $x = 2$, $y = 1$. Подставив найденные значения в уравнение кривой вместо текущих координат, определяем свободный член простейшего уравнения $U_0 = -12$. Для нахождения коэффициентов при текущих координатах простейшего уравнения составляем уравнение вида: $k^2 - (A + C)k + (AC - B^2) = 0$, корни которого k_1 и k_2 и будут коэффициентами уравнения $k_1X'^2 + k_2Y'^2 + U_0 = 0$. В данном случае будем иметь: $k^2 - 7k + 6 = 0$, откуда $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Следовательно, простейшее уравнение будет $6X'^2 + Y'^2 - 12 = 0$, или $\frac{X'^2}{2} + \frac{Y'^2}{12} = 1$, т. е. данная кривая есть эллипс. Для

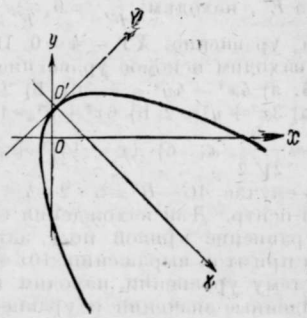
построения исследуемой кривой находим уравнения главных диаметров. Воспользовавшись соответствующими формулами, получим: $x-2y=0$ (уравнение оси $O'X'$), $2x+y-5=0$ (уравнение оси $O'Y'$). Построив по найденным уравнениям главные оси кривой и зная уравнение кривой относительно этих осей, строим график эллипса (черт. 137).



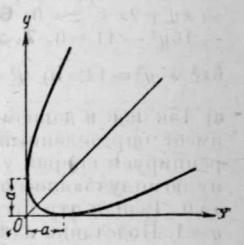
Черт. 137.

b) В этом случае $AC-B^2=1-1=0$; следовательно, кривая будет параболой. Переписывая уравнение кривой в форме $(x+y)^2-4x+y-1=0$ (1), видим, что $\alpha=1$, $\beta=1$, $D=-2$, $E=1/2$. Составляем уравнение главного диаметра, которое, как известно, имеет вид $\alpha x+\beta y+\frac{\alpha D+\beta E}{\alpha^2+\beta^2}=0$. Подставляя найденные выше значения коэффициентов, получаем: $x+y-3/4=0$. Решая совместно уравнения главного диаметра кривой, находим координаты вершины параболы $(1/16, 11/16)$. Теперь для приведения уравнения (1) к простейшему виду применяем формулы преобразования координат: $x=X\cos\varphi-Y\sin\varphi+x_0$, $y=X\sin\varphi+Y\cos\varphi+y_0$, где x_0, y_0 суть координаты вершины, а $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ определяются при помощи формул $\sin\varphi=\mp\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\cos\varphi=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Беря в этих формулах верхние знаки, получаем: $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi=+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и формулы преобразования координат принимают вид: $x=\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}+1/16$, $y=-\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}}+11/16$. Подставляя эти значения x и y в уравнение (1), приходим к уравнению $Y^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}X$.

Для построения параболы строим прежде главный диаметр по его уравнению и вершину параболы $(1/16, 11/16)$ (черт. 138). Положительное направление на новой оси абсцисс определяется знаками sin и cos угла φ; так как в исследуемом случае мы взяли для $\sin\varphi$ знак —, а для $\cos\varphi$ знак +, то, значит, угол φ лежит в четвёртой четверти (в нашем примере он равен 335°). Зная теперь уравнение параболы относительно системы $XO'Y$, легко построим и её график (черт. 139).



Черт. 138.



Черт. 139.

Замечание. Если бы мы взяли нижние знаки в формулах, определяющих $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то пришли бы к уравнению $Y^2=-\frac{5}{2\sqrt{2}}X$. Однако это отнюдь не значит, что мы имели бы другой график параболы: в этом случае угол φ лежал бы во второй четверти, т. е. положительное направление на оси $O'X$ было бы противоположно тому, какое указано на черт. 138. **9.** a) $x^2-y^2=1$; b) $2x^2-4y^2=9$; c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; d) $y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x$; e) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$; f) $y^2=4\sqrt{2}x$; g) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; h) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; i) $y^2=\frac{3}{2\sqrt{2}}x$; k) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; l) $y^2=\frac{6}{\sqrt{5}}x$; m) $y^2=\frac{1}{5\sqrt{5}}x$; n) $13x^2+52y^2=3$; o) $(5+\sqrt{10})x^2+(5-\sqrt{10})y^2=26/3$; p) $(\sqrt{29}-2)x^2-(2+\sqrt{29})y^2-2=0$; q) $13y^2-\frac{108}{\sqrt{13}}x=0$. **10*.** Парабола. Осью симметрии служит биссектриса координатного угла. Парабола касается осей координат в точках $(a, 0)$, $(0, a)$. *Указание.* Возводя данное уравнение во вторую степень, получаем: $x+2x^{1/2}y^{1/2}+y=a$. Уединяя член $2x^{1/2}y^{1/2}$, возводя опять обе части уравнения в квадрат и перенося все члены в левую часть уравнения, приходим к уравнению: $x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ (1), откуда легко видеть, что кривая есть парабола. Уравнение главного диаметра: $y=x$. Полагая в уравнении (1) $y=0$, получаем: $(x-a)^2=0$, откуда следует, что парабола касается оси Ox в точке $(a, 0)$. Аналогичным образом убеждаемся, что парабола касается оси Oy в точке $(0, a)$ (черт. 139).

К стр. 183—184

2. Точка лежит: a) на оси Ox; b) на оси Oy; c) на плоскости yz; d) на плоскости xz. **3.** a) Относ. плоскости xOy: $(2, -3, 1)$; $(a, b, -c)$; относ. плоскости yOz: $(-2, -3, -1)$; $(-a, b, c)$; относ. плоскости xOz: $(2, 3, -1)$; $(a, -b, c)$; относ. оси Ox: $(2, 3, 1)$; $(a, -b, -c)$; относ. оси Oy: $(-2, -3, 1)$; $(-a, b, -c)$; относ. оси Oz: $(-2, 3, -1)$; $(-a, -b, c)$; c) относ. начала координат: $(-2, 3, 1)$; $(-a, -b, -c)$. **4.** $S\left(0, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $P_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $P_3\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$, $P_4\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right)$. **5.** a) На плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOz и yOz; b) на плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOy и xOz; c) на плоскости, делящей пополам двугранный угол между плоскостями xOy и yOz. **6.** $OA=\sqrt{50}$; $d_x=\sqrt{34}$; $d_y=\sqrt{41}$; $d_z=5$. **7.** $d=3$. **8*.** $r=7/2$. *Указание.* Определяем сперва координаты центра сферы как точки, равноудалённой от данных точек. **9.** $(1, 5/3, 1/3)$. **10.** $\sqrt{149}$, $2\sqrt{14}$; 13, $(6, 3, 20/3)$. **11.** $B(10, 0, 13/5)$. **12.** Относительно одной системы $(-3, -1, 3)$; относительно другой системы $(3, 1, -3)$. **13.** Не существует. **14.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **15.** $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **16.** $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/3$; $\cos\gamma=-1/3$; **17.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm 1/3\sqrt{3}$. **18.** $R=11$, $\cos\alpha=-6/11$, $\cos\beta=-2/11$, $\cos\gamma=9/11$. **19.** $\gamma=60°$, $A(3, 3\sqrt{2}, 3)$. **20.** $r=10\sqrt{3}$; $z=-\sqrt{11}$, $\cos\beta=4/15\sqrt{3}$, $\cos\gamma=-1/30\sqrt{33}$. **21.** $\cos\varphi_1=3/7\sqrt{5}$, $\cos\varphi_2=1/7\sqrt{13}$, $\cos\varphi_3=2/7\sqrt{10}$. **22*.** $d=13$, $\cos\alpha=8/13$, $\cos\beta=-4/13$, $\cos\gamma=12/13$. *Указание.* Для определения направляющих косинусов прямой, проходящей через эти точки, переносим начало координат в точку A, сохраняя неизмен-

ными направления осей. Определяем координаты точки B относительно новой системы: $x'=5-2=3$, $y'=1-5=-4$, $z'=11+1=12$. Теперь легко видеть, что $\cos\alpha={}^{3}/_{13}$, $\cos\beta=-{}^{4}/_{13}$, $\cos\gamma={}^{12}/_{13}$. **23.** $d=5$, $\cos\alpha={}^{4}/_{5}$, $\cos\beta=-{}^{3}/_{5}$, $\cos\gamma=0$. **24.** 60°. **25.** 90°.

К стр. 216—217

1. $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{r}_0$, или $x=x'+a$, $y=y'+b$, $z=z'+c$. **2*.** $x=x'\cos(x,x')+y'\cos(x,y')+z'\cos(x,z')$, $y=x'\cos(y,x')+y'\cos(y,y')+z'\cos(y,z')$, $z=x'\cos(z,x')+y'\cos(z,y')+z'\cos(z,z')$. *Указание.* $i\mathbf{x}+j\mathbf{y}+k\mathbf{z}=i'\mathbf{x}'+j'\mathbf{y}'+k'\mathbf{z}'$, где i, j, k—три основных единичных вектора старой системы, а i', j', k' — единичные векторы новой системы. **3.** $x=x'\cos(x,x')+y'\cos(x,y')+z'\cos(x,z')+a$, $y=x'\cos(y,x')+y'\cos(y,y')+z'\cos(y,z')+b$, $z=x'\cos(z,x')+y'\cos(z,y')+z'\cos(z,z')+c$. **5.** $\mathbf{r}=\dfrac{\mathbf{r}_1+l\mathbf{r}_2}{1+l}$.

6. $\mathbf{r}=\dfrac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$; $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$; $z=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$;

7. $\mathbf{r}=\dfrac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$; $x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$; $y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$;

$z=\dfrac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}$. **8.** $A=\sqrt{3}$ $\alpha=\beta=\gamma=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **9*.** *Указание.* Решение получается аналогично примеру 6 на стр. 202. **10*.** *Указание.* Диагонали параллелограмма $\overrightarrow{CC}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и $\overrightarrow{AB}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$. **13.** 135°. **14.** 60°. **15*.** *Указание.* Взять в плоскости OXY два единичных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, составляющих с осью абсцисс соответственно углы α и $-\beta$, и составить $\mathbf{ab}$. **16.** Нельзя. **17*.** *Указание.* Рассмотреть векторное произведение двух единичных векторов, лежащих в плоскости xy и составляющих с осью x соответственно углы α и β.

18. $3\sqrt{10}$. **19.** ${}^{1}/_{2}\sqrt{1562}$. **20.** ${}^{1}/_{2}\sqrt{\begin{vmatrix}Y&Z\\Y'&Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z&X\\Z'&X'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X&Y\\X'&Y'\end{vmatrix}^2}$.

21. $\sin C=\dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix}Y&Z\\Y'&Z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z&X\\Z'&X'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X&Y\\X'&Y'\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\ \sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}}$. **22.** 1. **26.** 22,5.

27. ${}^{45}/_{109}\sqrt{109}$. **28.** $-58\mathbf{i}-20\mathbf{j}+\mathbf{k}$; -104. **29*.** $\dfrac{(\mathbf{A}-\mathbf{C})(\mathbf{B}\times\mathbf{D})}{|\mathbf{B}\times\mathbf{D}|}={}^{7}/_{6}\sqrt{6}$.

Указание. Искомое расстояние будет представлять высоту параллелепипеда, основание которого есть параллелограмм, определяемый векторами—сторонами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, а третье ребро изображается вектором $\mathbf{A}-\mathbf{C}$.

30*. $\dfrac{|(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times\mathbf{C}|}{C}=\dfrac{20\sqrt{2}}{11}$. *Указание.* Искомое расстояние будет представлять высоту параллелограмма, основание которого есть вектор $\mathbf{C}$, а другая сторона изображается вектором $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

К стр. 238—240

1. a) Нет; b) проходит; c) нет; d) проходит; e) нет. **2*.** a) $\cos\alpha={}^{2}/_{7}$, $\cos\beta={}^{3}/_{7}$, $\cos\gamma={}^{6}/_{7}$, $p=5$; b) $\cos\alpha={}^{21}/_{79}$, $\cos\beta={}^{30}/_{79}$, $\cos\gamma=-{}^{70}/_{79}$, $p={}^{84}/_{79}$; c) $\cos\alpha=-{}^{1}/_{3}$, $\cos\beta={}^{2}/_{3}$, $\cos\gamma=-{}^{2}/_{3}$, $p=7$. **3.** $x=y=z=10$. **4.** $x=y=z=4$. **5.** $2x+9y-6z-121=0$. **6*.** *Указание.* Уравнение искомой плоскости будет: $A_1(x-8)+B_1(y+7)+C_1(z-5)=0$, причём вектор $\mathbf{n}\{A_1, B_1, C_1\}$ можно

принять равным вектору $\overrightarrow{AB}(6,-6,7)$, т. е. $A_1=6$, $B_1=-6$, $C_1=7$. Подставляя последние числа в уравнение плоскости, получим $6x-6y+7z-125=0$. **7.** $10x+2y+11z-148=0$. **8.** 2, -4, ${}^{1}/_{2}$. **9.** $x+y+z-2=0$. **10.** a) Плоскость параллельна оси Oz; b) плоскость параллельна плоскости yOz; c) плоскость проходит через ось Ox. **11.** a) $3x+2z-5=0$; b) $y-3z=0$; c) $y-2=0$. **12.** a) $3x+5y+7z-100=0$; b) $15x+17y-42z+238=0$. **13.** a) 45°; b) 60°; c) $\cos\varphi={}^{8}/_{21}$. **14.** a) $3x-7y+5z=0$; b) $3x-7y+5z-66=0$; c) $3x-7y+5z-39=0$; d) $3x-7y+5z-9=0$. **15.** a) $5x+7y+3=0$; b) $y-z+7=0$; c) $5x+7z-46=0$. **16.** $3x+y+2z-23=0$. **17.** $2x+3y+z=0$. **18.** a) (5, —7, 8); b) (—10, 0, 2); c) (3, —2, —5). **19.** $d=1$. **20.** (0, $-{}^{73}/_{282}$, 0) и (0, ${}^{73}/_{13}$, 0). **21.** $35y+12z=0$ и $3y-4z=0$. **22.** $20x-4y-5z+133=0$ и $20x-4y-5z-119=0$. **23.** 3 единицы длины. **24*.** $45x+184y+482z-553=0$ и $96x-13y-4z-1106=0$. *Указание.* Искомые плоскости являются геометрическими местами точек, равноудалённых от двух данных плоскостей. Для точек одной из искомых плоскостей эти расстояния равны по абсолютной величине и по знаку, а для точек другой — расстояния равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. Поэтому уравнение одной плоскости будет: $\dfrac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=\dfrac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}}$, а другой $\dfrac{3x+2y+6z-35}{\sqrt{9+4+36}}=$

$=-\dfrac{21x-30y-70z-237}{\sqrt{441+900+4900}}$. После элементарных преобразований получим уравнения, данные в ответе. **25.** $4x-50y-22z+675=0$ и $46x-50y+122z+375=0$. **26.** $(a_1-a)(x-a)+(b_1-b)(y-b)+(c_1-c)(z-c)=0$.

27. $\begin{vmatrix}x&z&1\\x_1&z_1&1\\x_2&z_2&1\end{vmatrix}=0$. **28.** $z_1y-y_1z=0$. **29.** $y-y_1=0$. **30.** $x-z+l(y-z)=0$,

где l есть произвольный параметр. **31.** $\begin{vmatrix}x&y&1\\x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}=0$. **32.** $\begin{vmatrix}x&y&z\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=0$.

33. $x=7k$, $y=-2k$, $z=-5k$, где k произвольно. **34.** $x=\dfrac{9-7z}{5}$, $y=\dfrac{1+2z}{5}$, а z произвольно. **35.** Нет точки пересечения.

36. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{ab}=0$; $\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\m&n&p\\m_1&n_1&p_1\end{vmatrix}=0$. **37.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}=0$;

$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\m&n&p\end{vmatrix}=0.$

К стр. 260—265

1. a) Прямая проходит через начало координат; b) прямая параллельна оси Oz; c) прямая параллельна плоскости xOz; d) прямая параллельна оси Ox; e) прямая совпадает с осью Oy; f) прямая перпендику-

лярна оси Ox и пересекает её; g) прямая лежит в плоскости yOz. **2*.** $D=3$. *Указание.* Координаты точки, в которой прямая пересекает ось Oz, будут $(0, 0, z_1)$, где z_1—неизвестная координата. Эти координаты должны удовлетворять обоим данным уравнениям, так как обе плоскости должны пересекать ось Oz в одной и той же точке. Подставив значения $(0, 0, z_1)$ вместо текущих координат в данные уравнения, получим два уравнения относительно z_1 и D: $2z_1-6=0$, $-z_1+D=0$, откуда найдём: $D=3$. **3*.** $B=-6$; $D=-27$. *Указание.* Так как прямая должна лежать в плоскости xOy, то она пересекает оси Ox и Oy. Координаты точек, в которых прямая пересекает эти оси, соответственно будут: $(x_1, 0, 0)$, $(0, y_1, 0)$. Подставляя эти значения в данные уравнения, получаем четыре уравнения относительно неизвестных x_1, y_1, B и D: $x_1-9=0$, $3x_1+D=0$, $-2y_1-9=0$, $By_1+D=0$, откуда находим: $B=-6$, $D=-27$. **4*.** a) $D=0$, $D_1=0$. b) $A=0$; $A_1=0$, c) $\frac{B_1}{B}=\frac{D}{D_1}$; d) $C=D=0$, $C_1=D_1=0$. *Указание.* c) Для того чтобы прямая пересекла ось Oy, нужно чтобы обе плоскости пересекали ось Oy в одной и той же точке, т. е. чтобы координаты $(0, y_1, 0)$ (где y_1—неизвестная координата) удовлетворяли обоим уравнениям. Подставляя эти значения в уравнения прямой, получаем: $By_1+D=0$, $B_1y_1+D_1=0$, откуда $y_1=-\frac{D}{B}$, $y_1=-\frac{D_1}{B_1}$, и следовательно: $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$. **5.** Точка A лежит, а точка B не лежит на данной прямой. **7*.** $4x+5y-32=0$, $11x+10z-78=0$, $11y-8z-8=0$. *Указание.* Плоскость, проектирующая прямую на координатную плоскость xOy, должна удовлетворять двум условиям: 1) она должна проходить через данную прямую и 2) она должна быть перпендикулярна плоскости xOy, или, что то же, параллельна оси Oz. Исключим из двух данных уравнений координату z, для чего умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Таким образом, получим уравнение $4x+5y-32=0$. Полученное уравнение является уравнением проектирующей плоскости, так как: 1) оно является следствием двух данных уравнений, а потому значения координат (x, y, z), удовлетворяющие двум данным уравнениям, удовлетворяют и полученному уравнению, что свидетельствует о том, что эта плоскость проходит через данную прямую, и 2) полученная плоскость параллельна оси Oz (в уравнении отсутствует координата z). Уравнения плоскостей, проектирующих прямую на другие координатные плоскости, найдутся аналогичным образом. **8.** $\begin{cases} 9x-4y+13=0 \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 15x-8z+3=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y-6z-14=0, \\ x=0. \end{cases}$ **9*.** $x+y+z=0$, $y-z-1=0$. *Указание.* Уравнение всякой плоскости, проходящей через данную прямую, можно написать в виде $x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$, или $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-(1-\lambda)=0$. Из этих плоскостей нам нужно выбрать ту, которая проектирует нашу прямую на плоскость $x+y+z=0$. Так как проектирующая плоскость должна быть перпендикулярна плоскости проекции, то λ должно удовлетворять условию $(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$, откуда находим значение $\lambda=-1$. Следовательно, уравнение проектирующей плоскости будет: $y-z-1=0$. Так как проекция прямой должна лежать на плоскости, на которую прямая проектируется, т. е. на плоскости $x+y+z=0$, то, присоединяя это уравнение к найденному уравнению проектирующей плоскости, получим уравнения проекции: $x+y+z=0$, $y-z-1=0$. **10.** $2x+2y+z-15=0$, $4x-9y+10z-9=0$. **11.** a) $\cos\alpha=\frac{4}{13}$, $\cos\beta=-\frac{12}{13}$, $\cos\gamma=-\frac{3}{13}$; b) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$. **12.** a) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=\frac{z}{1}$; b) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z}{1}$; c) $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-12}{3}$. **13.** $\cos(L_1,L_2)=\frac{20}{21}$, $\cos(L_2, L_3)=\frac{106}{119}$, $\cos(L_3, L_1)=\frac{38}{51}$. **14*.** $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta=-\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{30}}$. *Указание.* Чтобы определить направляющие косинусы данной прямой, надо выразить прямую при помощи нормальных уравнений. Для этого решаем данную систему относительно каких-нибудь двух координат, например x и y: $x-12=5z$, $y+5=-2z$, откуда получаем нормальные уравнения: $\frac{x-12}{5}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z}{1}$. Далее, по известным формулам находим: $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{30}}$, $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{30}}$. **15.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **16.** $\cos\varphi=\frac{4}{21}$. **17.** a) $x-2=0$, $y+3=0$; b) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+8}{5}$. **18.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{3}$. **19.** $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. **21.** $y=22x+71$, $z=2x-3$. **22.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$. **23.** $x=3z-1$, $y=-5z-\frac{17}{4}$. **24.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\pm\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\pm\sqrt{6}}$. **25.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m' & n' & p' \\ a'-a & b'-b & c'-c \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m'' & n'' & p'' \\ a''-a & b''-b & c''-c \end{vmatrix}=0$. **26.** $\frac{x-a}{ap_1}=\frac{y-b}{bp_1}=\frac{z-c}{-(am_1+bn_1)}$.

27. $\begin{vmatrix} y-nz-b & -(x-mz-a) & (x-a)n-(y-b)m \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}=0$,

$\begin{vmatrix} y-n'z-b' & -(x-m'z-a') & (x-a')n'-(y-b')m' \\ m & n & 1 \\ m' & n' & 1 \end{vmatrix}=0$.

28. (1, 1, 1). **29.** (5, −1, 2). **30.** $\sin\varphi=\frac{3}{133}$. **31.** a) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-3}{-8}$; **33.** $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. **34*.** $\frac{2}{13}\sqrt{26}$. *Указание.* Следует провести прямую III через точку, лежащую на II прямой, параллельно I прямой, затем составить уравнение плоскости, проходящей через прямые II и III, наконец, найти расстояние от точки прямой I до этой плос-

кости. **35.** $p=-5$. **36.** $2x+3y+z+5=0$. **37.** $x-3y-z-10=0$. **38.** $x-3y+2z-4=0$. **39.** $x-2y-2z+2=0$. **40.** $2x+y-1=0$.

41. $\frac{x+1}{48}=\frac{y}{37}=\frac{z-4}{4}$. **42.** $x+y+z=0$. **43.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}=0$.

44. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}=0$. **45.** $(A_1m+B_1n+C_1p)(Ax+By+Cz+D)-(Am+Bn+Cp)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$.

46. $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}=0$. **47.** $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a'-a & b'-b & c'-c \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$.

48. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$, где положено $m=\begin{vmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ m' & n' & p' \\ 0 & -C & B \end{vmatrix}$;

$n=\begin{vmatrix} b-b' & c-c' & a-a' \\ n' & p' & m' \\ 0 & -A & C \end{vmatrix}$; $p=\begin{vmatrix} c-c' & a-a' & b-b' \\ p' & m' & n' \\ 0 & -B & A \end{vmatrix}$. **49.** $m(x-a)+n(y-b)+p(z-c)=0$.

К стр. 274—275

1. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0$. **2.** $(1, -2, 2)$, $R=4$. **3.** $(1, 0, 0)$, $R=1$. **4.** $(0, {}^5/_4, 0)$, $R={}^1/_4\sqrt{89}$. **5.** $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$. **6.** $x^2+y^2+z^2-2x=0$. **7.** $x^2=y^2+z^2$. **8.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=c$. **9.** $Ahx^2+2Bh^2xy+Ch^2y^2+2Dhxz+2Ehyz+Fz^2=0$. **10.** $x^2+y^2-x+1=0$. **11.** Конус, образованный вращением прямой линии $y=x$ около оси Ox. **12.** Эллипс. **13.** Конус с вершиной в начале координат и с направляющей $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, $z=1$. **14.** Цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $x^2+y^2-2x=0$, $z=0$. **15.** Эллипсоид, полученный от вращения около оси Oz эллипса $x^2+\frac{z^2}{{}^1/_4}=1$, $y=0$. **16.** Однополостный гиперболоид, полученный от вращения около оси Oz гиперболы $x^2-z^2=1$, $y=0$. **17.** Двухполостный гиперболоид, полученный от вращения около оси Ox гиперболы $x^2-y^2=4$, $z=0$. **18.** Параболоид, полученный от вращения около оси Oz параболы $z=x^2$, $y=0$. **19.** $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-{}^2/_3=0$.

Карело-Финская База
Академии Наук СССР
БИБЛИОТЕКА